Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu

1.2. 2013

1. Polynomifunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, kertoimet a, b ja c ovat keskenään erisuuria, nollasta eroavia kokonaislukuja. Lisäksi $f(a) = a^3$ ja $f(b) = b^3$. Määritä kertoimet a, b ja c.

2. Eräässä eurooppalaisessa kaupungissa myydään joukkoliikenteeseen vain kausilippuja, joista toiset ovat 7 päivän, toiset 30 päivän lippuja. Edelliset maksavat 7,03€, jälkimmäiset 30€. Aina Algebrikko päättää kerralla hankkia liput, joilla hän pääsee matkustamaan koko kolmivuotisen (2014–2016) eli 1096-päiväisen oleskelunsa ajan kaupungin julkisella kulkuneuvoilla. Mikä on edullisin ratkaisu?

3. Pisteet A, B ja C sijaitsevat yksikköympyrän kehällä. Lisäksi tiedetään, että AB on ympyrän halkaisija ja

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{3}{4}\,.$$

Kulman ABC puolittaja leikkaa ympyrän kehän pisteessä D. Määritä janan AD pituus.

4. Joukon $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ osajoukon E sanotaan olevan *erikoinen*, jos se ei sisällä yhtään muotoa $\{x, 3x\}$ olevaa paria. Erikoinen joukko E on *supererikoinen*, jos se on mahdollisimman monta alkiota sisältävä erikoinen joukko. Montako alkiota supererikoisessa joukossa on ja montako eri supererikoista joukkoa on olemassa?

5. Etsi kaikki kokonaislukukolmikot (m, p, q), jotka toteuttavat yhtälön

$$2^m p^2 + 1 = q^5$$

ja joissa lisäksi $m > 0$ sekä p ja q ovat alkulukuja.