Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

13. 11. 2012

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$+$	$-$
2.	$-$	$-$	$+$	$-$
3.	$-$	$+$	$-$	$+$
4.	$-$	$+$	$-$	$+$
5.	$+$	$-$	$+$	$-$
6.	$+$	$+$	$+$	$-$

P1. Koska massojen suhteet (alkuperäinen timantti mukaan lukien) ovat $3:4:7$, niin arvojen suhteet ovat $9:16:49$. Siis lohjenneen timantin arvo on siis alkuperäisestä arvosta

$$\frac{9+16}{49}\cdot 100\% \approx 51\%.$$

P2. Jos hunneja on aluksi $4t$ ja vandaaleja t, niin erottamisien jälkeen vandaalien osuus on

$$\frac{t}{\frac{1}{3}4t+t}=\frac{3}{7}.$$

P3. a) $2^{2^2}=2^4=16<27=3^3$, joten tehtävänannon vertailu on epätosi.

b) $3^{3^3}=3^{27}>3^{2\cdot 13}=9^{13}>5^5$, joten vastaava vertailu pitää paikkansa.

c) $(-4)^{-4}>0>(-5)^{(-5)}$, joten tehtävänannon vertailu on epätosi.

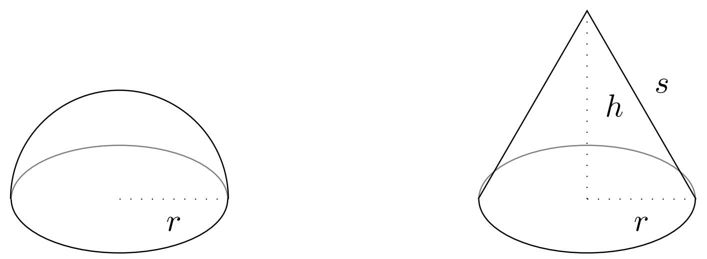
d) $(-2)^2=4$, joten $((-2)^2)^{((-2)^2)}=4^4$ pitää paikkansa.

P4.

$$\frac{2^{2013}+2^{2011}}{2^{2012}-2^{2010}} = \frac{2^{13}+2^{11}}{2^{12}-2^{10}} = \frac{2^3+2^1}{2^2-2^0} = \frac{8+2}{4-1} = \frac{10}{3},$$

joten kohdat b ja d ovat oikein, kohdat a ja c ovat selvästi eri suuria kuin nämä.

P5.



Puolipallon vaipan ala on $\frac{1}{2}4\pi r^2 = 2\pi r^2$ ja kartion vaipan ala on πrs, missä r on yhteisen pohjaympyrän säteen ja s on kartion sivusärmän pituus. Koska vaippojen alat ovat yhtä suuret, niin $2\pi r^2 = \pi rs$ eli $s = 2r$. Toisaalta kartio on suora, joten Pythagoraan lauseesta seuraa

$$r^2 + h^2 = s^2 = (2r)^2 = 4r^2 \Rightarrow h^2 = 3r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3}.$$

Siis tilavuudet ovat

$$V_{\mathrm{pp}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

ja

$$V_{\mathrm{k}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3} = \frac{\pi r^3}{\sqrt{3}}$$

ja näiden suhde on

$$V_{\mathrm{k}}/V_{\mathrm{pp}} = \frac{\pi r^3}{\sqrt{3}} : \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1,$$

joten kohdat c ja a ovat oikein sekä muut vääriä.

P6. a) Totta, suuren kuution voi kasata pelkästään yksikkökuutioista.

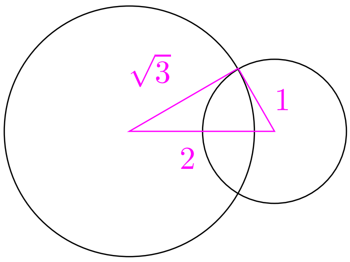
b) Totta: Sijoitetaan suuri kuutio koordinaatistoon niin, että särmät ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja keskipiste origossa. Tällöin jokainen kasaamisessa käytetty pikkukuutio, jonka särmän pituus on vähintään kaksi, sisältää ainakin yhden pisteistä $(\pm1,\pm1,\pm1)$. Siis tällaisia kuutioita käytetään kasaamisessa korkeintaan 8. Lisäksi näistä pikkukuutioista korkeintaan yhden särmän pituus on 3, sillä $3+3>5$, joten tällaisten pikkukuutioiden yhteistilavuus on korkeintaan $3^3+7\cdot2^3 = 27+56 = 83$. Yksikkökuutioita tarvitaan siis vähintään $5^3-83 = 125-83 = 42$ kappaletta, ja pikkukuutioita kaikkiaan vähintään $8+42 = 50$ kappaletta (mitä pienempiä pikkukuutiot ovat, niin sitä enemmän niitä tietenkin tarvitaan).

c) Totta: Oletetaan, että suuren kuution pinta on kasattu kokonaan yksikkökuutioista. Tällöin ei voi siis tietää, onko suuren kuution ytimessä pikkukuutio, jonka sivun pituus on 3, vai esimerkiksi pelkkiö yksikkökuutioita. Edellisessä tapauksessa tarvitaan $5^3 - 3^3 + 1 = 99$, jälkimmäisessä tapauksessa $5^3 = 125$ pikkukuutiota.

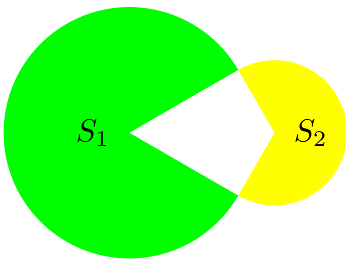
d) Ei pidä paikkaansa, sillä jokaisen pikkukuution ala on parillinen kokonaisluku $6 \cdot s^2$, missä s on kokonaisluku. Siis yhteispinta-alakin on parillinen kokonaisluku.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Koska ympyröiden säteet ovat $\sqrt{3}$ ja 1 sekä keskipisteiden etäisyys 2, niin Pythagoraan käänteislauseesta seuraa, että säteet muodostavat keskipisteiden yhdysjanan kanssa suorakulmaisen kolmion, sillä $(\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$.



Lisäksi kulmat ovat 30°, 60° ja 90°, sillä pienimmän kateetin ja hypotenuusan suhde on 1 : 2. Ympyröiden peittämästä alueesta voi siis ottaa pois kaksi tällaista suorakulmaista kolmiota,



jolloin jäljelle jää kaksi isoa sektoria, joiden alat ovat

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{5\pi}{6} \cdot 3 = \frac{5\pi}{2}$$

ja

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot 1^2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Ko. suorakulmaisen kolmion ala puolestaan on $\Delta = \sqrt{3}/2$, joten ympyröiden peittämä ala on kaikkiaan

$$S_1 + S_2 + 2\Delta = \frac{5}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} = 3\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}.$$

Toisaalta ympyröiden pinta-alojen summa on $\pi(\sqrt{3})^2 + \pi \cdot 1^2 = 4\pi$. Leikkausalueen pinta-ala on näiden erotus eli

$$4\pi - 3\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3} = \frac{5}{6} - \sqrt{3}.$$

P8. Merkitään $f(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Koska $f(n)$ on viidellä jaollinen, kun n on kokonaisluku, niin erityisesti $f(0) = c$, $f(1) = a1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$ ja $f(-1) = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c$ ovat viidellä jaollisia, mistä seuraa $5 \mid c$, $5 \mid f(1) + f(-1) = a + b + c + a - b + c = 2a + 2c$ ja $5 \mid f(1) - f(-1) = a + b + c - (a - b + c) = 2b$. Koska kokonaisluvuilla 2 ja 5 ei ole yhteisiä tekijöitä, niin edelleen $5 \mid b$ ja $5 \mid (a + c) - c = a$. Siis kaikki polynomin f kertoimet ovat viidellä jaollisia.

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$+$	$+$
2.	$+$	$-$	$+$	$-$
3.	$+$	$+$	$+$	$-$

V1. Kun $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, niin $\tan\alpha > 1$, joten $\sin^2\alpha + \tan^2\alpha \geq \tan^2\alpha > 1$ (siis a epätosi). $\sin\alpha \leq \alpha$ pitää paikkansa (b tosi), sillä α on yksikköympyrän kulmaa α vastaavan kaaren pituus, kun taas $\sin\alpha$ on tämän kaaren kohtisuora projektio y-akselille. Koska $0 < \cos\alpha < 1$, niin $\tan^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha \geq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (c tosi). Kohta d seuraa suoraan tangentin määritelmästä $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ ja siitä, että $\cos\alpha \neq 0$, kun α on terävä kulma.

V2. Jos luvut ovat a ja b, niin $a = 4x$, $b = 4y$ eikä x:llä ja y:llä ole yhteisiä tekijöitä. Toisaalta $24 = at = bu$, eikä t:llä ja u:lla ole yhteisiä tekijöitä. Ei siis voi olla $x = y$. Oletetaan, että $x < y$; silloin $a < b$ ja $u < t$. Koska $6 = xt = yu$, x ja y ovat joukossa $\{1, 2, 3, 6\}$ ja x joukossa $\{1, 2\}$. Jos $x = 1$, on $t = 6$, joten $u = 1$. Luvut $a = 4$, $b = 24$ toteuttavat ehdon; summa on 28. Jos $x = 2$, $t = 3$, joten $u = 2$, $y = 3$. ($u = 1$, $y = 6$ ei käy, koska silloin x ja y olisivat kahdella jaollisia.) $a = 8$, $b = 12$ on kelvollinen pari; summa on 20.

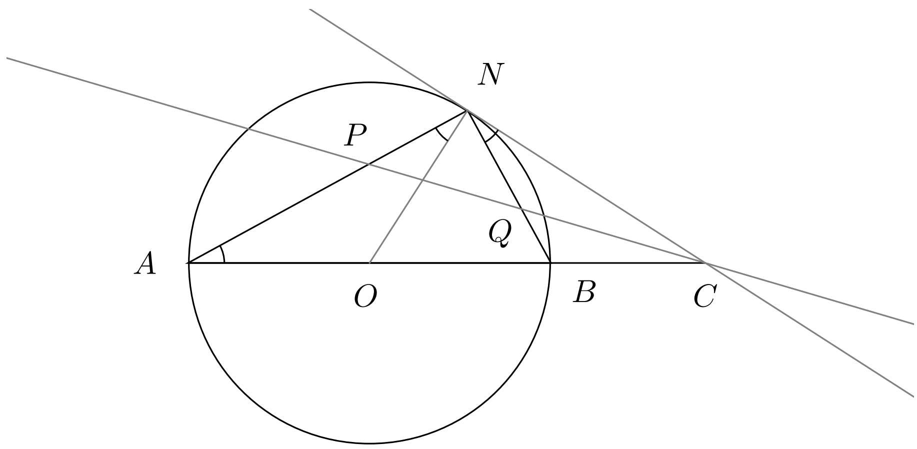
V3=P6.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4=P8.

V5. Olkoon $\alpha = \sphericalangle NAB$ ja O ympyrän keskipiste. Koska $\triangle AON$ on tasakylkinen (molemmat kyljet ovat ympyrän säteitä), niin myös $\sphericalangle ANO = \alpha$. Toisaalta $\sphericalangle ANB$ ja $\sphericalangle ONC$ ovat suoria kulmia, edellinen halkaisijaa AB vastaavana kehäkulmana ja jälkimmäinen siksi, että NC on ympyrän tangentti ja ON säde. Siis

$$\sphericalangle BNC = \sphericalangle ANC - \sphericalangle ANB = \sphericalangle ANC - \sphericalangle ONC = \sphericalangle ANO = \alpha.$$



Merkitään $\beta = \sphericalangle ACN$. Koska suora CP puolittaa kulman β, niin

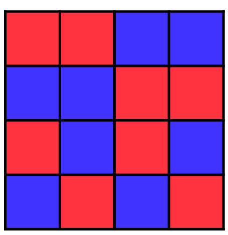
$$\sphericalangle APC = \pi - \sphericalangle CAP - \sphericalangle ACP = \pi - \alpha - \frac{\beta}{2}.$$

Tämän komplementtikulmalle saadaan siis $\sphericalangle NPQ = \alpha + \beta/2$. Toisaalta

$$\sphericalangle NQC = \pi - \sphericalangle QNC - \sphericalangle QCN = \pi - \alpha - \frac{\beta}{2},$$

joten myös $\sphericalangle NQP = \alpha + \beta/2$. Siis $\triangle NPQ$ on tasakylkinen (ja huippu on N), joten $|PN| = |NQ|$. $\square$

V6. Jos $n = 4$, esimerkiksi seuraava väritys on vaatimusten mukainen:



Jos $n = 5$, niin jossain rivissä, esimerkiksi ylimmässä, on ainakin kolme samanväristä, esimerkiksi punaista. Näiden punaisten sarakkeissa ei millään muulla rivillä saisi olla kahta punaista. Joka rivillä on siis ainakin kaksi sinistä. Nämä kaksi sinistä voivat olla kolmessa eri asemassa (mahdollinen kolmas, punainen, ruutu voi olla kolmessa aasemassa), joten ainakin kahdella rivillä ne ovat samoissa sarakkeissa. 5×5-ruudukko ei voi toteuttaa ehtoa, ei myöskään $n \times n$-ruudukko, jos $n > 5$.

Avoin sarja

A1.

$$\begin{aligned}
&(x * x) * 1 = x * (x * 1)\\
\Longleftrightarrow\ &(x^2 + x^2 - x \cdot x) * 1 = x * (x^2 + 1^2 - x \cdot 1)\\
\Longleftrightarrow\ &(x^2) * 1 = x * (x^2 - x + 1)\\
\Longleftrightarrow\ &(x^2)^2 + 1^2 - x^2 \cdot 1 = x^2 + (x^2 - x + 1)^2 - x \cdot (x^2 - x + 1)\\
\Longleftrightarrow\ &x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - x + 1 - x) \cdot (x^2 - x + 1)\\
\Longleftrightarrow\ &(x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - x + 1)\\
\Longleftrightarrow\ &(x - 1)^2 (x + 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - x + 1)\\
\Longleftrightarrow\ &(x - 1)^2 = 0 \ \vee\ (x + 1)^2 = x^2 - x + 1\\
\Longleftrightarrow\ &x = 1 \ \vee\ x^2 + 2x + 1 = x^2 - x + 1\\
\Longleftrightarrow\ &x = 1 \ \vee\ 3x = 0\\
\Longleftrightarrow\ &x = 0 \ \vee\ x = 1
\end{aligned}$$

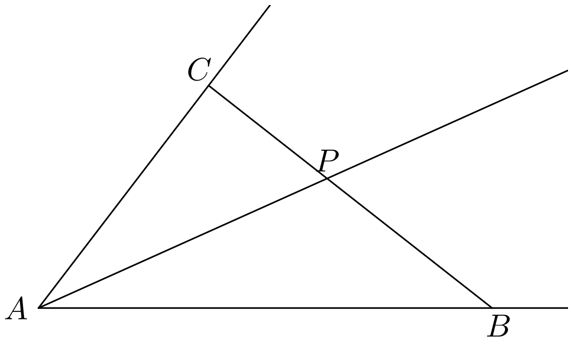
A2. Jos pelaajalla on edessään 3, 2 tai 1 merkkiä, hän voittaa. Jos vastustajalla on edessään 4 pelimerkkiä, niin hänen siirtonsa jälkeen laudalla on 1, 2 tai 3 merkkiä jne. – Pelaaja, joka voi pakottaa vastustajansa tilanteeseen, jossa tällä on edessään neljällä jaollinen määrä merkkejä, voittaa. Koska 2012 on 4:llä jaollinen, Olli voittaa.

A3. Kolmeen peräkkäiseen kuluvat työmäärä on

$$2^i + 2^{i+1} + 2^{i+2} = 2^i(1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^i,$$

missä i on kokonaisluku, siis 2^i kokonaista viikkoa. Ensimmäistä ruutua vastaava työ tulee tehtyä ensimmäisenä maanantaina, ja loput $64 - 1 = 63 = 3 \cdot 21$ ruutua voi ryhmitellä kolmea peräkkäistä ruutua vastaaviksi työrupeamiksi, jotka kestävät kokonaisia viikkoja. Siis *työ päättyy maanantaina.*

A4.



Kun $\triangle ABC$:n pinta-ala lasketaan kahdella eri tavalla (toisaalta suoraan ja toisaalta jakamalla $\triangle ABP$:ksi ja $\triangle APC$:ksi), saadaan

$$\frac{1}{2}|AB|\,|AC|\sin 2\alpha = \frac{1}{2}|AP|\,|AC|\sin\alpha + \frac{1}{2}|AB|\,|AP|\sin\alpha$$
$$\iff \frac{1}{|AP|}\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}.$$

Koska kulma α ja $|AP|$ ovat vakioita, niin myös yhtälön vasen puoli pysyy vakiona. $\square$