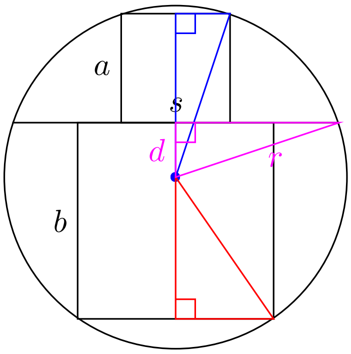
Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu

3. 2. 2012

1. *Jänne jakaa ympyrän kahteen segmenttiin. Segmenttien sisään on piirretty neliöt siten, että molempien neliöiden kärjistä kaksi on jänteellä ja kaksi ympyrän piirillä. Neliöiden sivujen suhde on* $5 : 9$. *Laske jänteen ja ympyrän säteen pituuksien suhde.*

Ratkaisu: Merkitään pienemmän neliön sivua a:lla, suuremman b:llä, jolloin $a : b = 5 : 9$. Merkitään edelleen ympyrän sädettä r:llä, jänteen etäisyyttä ympyrän keskipisteestä d:llä ja jänteen pituutta s:llä.



Pythagoraan lauseella saadaan (sinistä, punaista ja sinipunaista suorakolmaista kolmiota vastaavat) yhtälöt

$$\begin{cases} (a+d)^2 + (a/2)^2 = r^2 \\ (b-d)^2 + (b/2)^2 = r^2 \\ d^2 + (s/2)^2 = r^2. \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä seuraa

$$\begin{aligned} &(a+d)^2 + (a/2)^2 = (b-d)^2 + (b/2)^2 \\ &\iff 4(a+d)^2 + a^2 = 4(b-d)^2 + b^2 \\ &\iff 5a^2 + 8ad + 4d^2 = 5b^2 - 8bd + 4d^2 \\ &\iff 5a^2 + 8ad = 5b^2 - 8bd \\ &\iff 8(a+b)d = 5(b^2 - a^2). \\ &\iff 8d = 5(b-a). \end{aligned}$$

Koska $b = \frac{9}{5}a$, niin tämä sievenee muotoon $8d = 5(\frac{9}{5}a - a) = 4a$ eli $d = a/2$. Sijoittamalla tulos takaisin ensimmäiseen yhtälöön saadaan $r = \sqrt{(a+d)^2 + (a/2)^2} = \sqrt{(a + a/2)^2 + (a/2)^2} = a\sqrt{(3/2)^2 + (1/2)^2} = a\sqrt{10/4} = a\sqrt{5/2} = a\sqrt{10}/2$.

Kolmannesta yhtälöstä seuraa nyt

$$s = 2(s/2) = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{\frac{5}{2}a^2 - (a/2)^2} = 2a\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}} = 2a\sqrt{\frac{9}{4}} = 2a \cdot \frac{3}{2} = 3a,$$

joten

$$s : r = (3a) : (a\sqrt{10}/2) = 6 : \sqrt{10} = 3\sqrt{10} : 5.$$

2. *Oletetaan, että $x \neq 1$, $y \neq 1$ ja $x \neq y$. Osoita, että jos*

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y},$$

niin

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z.$$

Ratkaisu: Merkitään

$$\lambda = \frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y},$$

jolloin $\lambda(1 - x) = yz - x^2$ ja $\lambda(1 - y) = zx - y^2$. Koska $x \neq y$, niin

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\lambda(y - x)}{y - x} = \frac{\lambda((1 - x) - (1 - y))}{(1 - x) - (1 - y)} = \frac{\lambda(1 - x) - \lambda(1 - y)}{y - x} \\
&= \frac{yz - x^2 - (zx - y^2)}{y - x} = \frac{xy + y^2 + yz - x^2 - xy - zx}{y - x} \\
&= \frac{y(x + y + z) - x(x + y + z)}{y - x} = \frac{(y - x)(x + y + z)}{y - x} = x + y + z. \quad \square
\end{aligned}$$

3. *Todista, että kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 2$ luku $k^{k-1} - 1$ on jaollinen luvulla $(k-1)^2$.*

Ratkaisu: Jokaisella $\ell \in \mathbb{Z}_+$ kokonaisluku $k - 1$ jakaa kokonaisluvun $k^\ell - 1$, koska

$$k^\ell - 1 = (k - 1)(k^{\ell-1} + k^{\ell-2} + \cdots + 1) = (k - 1)\sum_{j=0}^{\ell-1} k^j.$$

Huomattakoon, että tässä summassa on ℓ muotoa k^j olevaa yhteenlaskettavaa. Siis

$$\begin{aligned}
k^{k-1} - 1 &= (k - 1)\sum_{j=0}^{k-2} k^j = (k - 1)\big((k - 1) + \sum_{j=0}^{k-2}(k^j - 1)\big) \\
&= (k - 1)\big((k - 1) + \sum_{j=0}^{k-2}((k - 1)\sum_{i=0}^{j-1} k^i)\big) = (k - 1)^2\big(1 + \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=0}^{j-1} k^i\big),
\end{aligned}$$

mikä merkitsee, että $(k - 1)^2$ jakaa luvun $k^{k-1} - 1$. $\square$

4. *Olkoot $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$. Todista, että*

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} \leq n^k$$

Ratkaisu: Olkoon A joukko, jossa on k alkiota, ja B joukko, jonka koko on n. A ja B ovat epätyhjiä, koska n ja k ovat positiivisia. Vertaillaan kuvauksien $f\colon A \to B$ ja kuvajoukkojen lukumääriä $f[A]$. Tällaisia kuvauksia on n^k, ja jokaista kuvausta f vastaa kuvajoukko $f[A]$. Eri kuvauksilla f arvojoukko $f[A]$ käy läpi kaikki B:n epätyhjät osajoukot, joissa on korkeintaan k alkiota. Siis

$$\begin{aligned} &\left|\{\, f[A] \mid f\colon A \to B \,\}\right| = \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} \\ &\leq \left|\{\, f \mid f\colon A \to B \,\}\right| = n^k. \quad \square \end{aligned}$$

5. *Collatzin funktio on kuvaus $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, jolle*

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{kun } x \text{ on pariton} \\ x/2, & \text{kun } x \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Merkitään lisäksi $f^1 = f$ ja induktiivisesti $f^{k+1} = f \circ f^k$, ts. $f^k(x) = \underbrace{f(\ldots(f}_{k \text{ kpl}}(x)\ldots)$.

Todista, että on olemassa $x \in \mathbb{Z}_+$, jolle

$$f^{40}(x) > 2012x.$$

Ratkaisu: Todistetaan ensin induktiolla luvun $k \in \mathbb{Z}_+$ suhteen, että kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$f^{2k}(m \cdot 2^k - 1) = m \cdot 3^k - 1.$$

Tapauksessa $k = 1$ saadaan nimittäin $f^2(m \cdot 2^1 - 1) = f(f(2m-1)) = f(3(2m-1)+1) = f(6m-2) = 3m-1$. Jos väite on voimassa arvolla k, niin $f^{2(k+1)}(m \cdot 2^{k+1} - 1) = f^2(f^{2k})(2m \cdot 2^k - 1) = f(f(2m \cdot 3^k - 1)) = f(3(2m \cdot 3^k - 1) + 1) = f(2m \cdot 3^{k+1} - 2) = m \cdot 3^{k+1} - 1$, joten induktioväite pätee arvolla $k+1$.

Erityisesti luvulle $x = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575$ saadaan

$$f^{40}(x) = 3^{20} - 1 > (3/2)^{20}(2^{20} - 1) = (3/2)^{20}x > 2012x,$$

sillä

$$(3/2)^{20} = ((3/2)^4)^5 = \left(\frac{3^4}{2^4}\right)^5 = \left(\frac{81}{16}\right)^5 > 5^5 = 3125 > 2012. \quad \square$$