Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu

3. 2. 2012

1. Jänne jakaa ympyrän kahteen segmenttiin. Segmenttien sisään on piirretty neliöt siten, että molempien neliöiden kärjistä kaksi on jänteellä ja kaksi ympyrän piirillä. Neliöiden sivujen suhde on $5 : 9$. Laske jänteen ja ympyrän säteen pituuksien suhde.

2. Oletetaan, että $x \neq 1$, $y \neq 1$ ja $x \neq y$. Osoita, että jos

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{zx - y^2}{1-y},$$

niin

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{zx - y^2}{1-y} = x + y + z.$$

3. Todista, että kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 2$ luku $k^{k-1} - 1$ on jaollinen luvulla $(k-1)^2$.

4. Olkoot $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$. Todista, että

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} \leq n^k$$

5. *Collatzin funktio* on kuvaus $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, jolle

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{kun } x \text{ on pariton} \\ x/2, & \text{kun } x \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Merkitään lisäksi $f^1 = f$ ja induktiivisesti $f^{k+1} = f \circ f^k$, ts. $f^k(x) = \underbrace{f(\ldots(f}_{k \text{ kpl}}(x)\ldots)$.

Todista, että on olemassa $x \in \mathbb{Z}_+$, jolle

$$f^{40}(x) > 2012x.$$