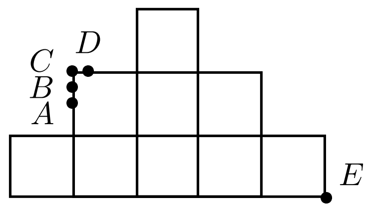
Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

1\. 11. 2011

1. Kun luku $5^{140} \cdot 8^{47}$ kirjoitetaan tavalliseen tapaan, niin luvussa on numeroita

a) pariton määrä b) 47 c) 48 d) 141

2. Oheinen kuvio muodostuu yhdeksästä neliöstä, joista jokaisen sivu on 1. Lisäksi janat AB, BC ja CD ovat pituudeltaan $1/4$. Yksi suorista AE, BE, CE ja DE jakaa kuvion kahteen yhtä suureen osaan. Mikä niistä?



a) AE b) BE c) CE d) DE

3. Mitkä seuraavista kuusikulmion lävistäjiä koskevista väitteistä ovat tosia?:

a) Kuusikulmiolla on vähemmän kuin kymmenen lävistäjää.
b) Kuperan kuusikulmion lävistäjillä voi olla yksi yhteinen piste.
c) Kuusikulmiolla voi olla kaksi lävistäjää, jotka eivät leikkaa.
d) Säännöllisellä kuusikulmiolla on kaksi lävistäjää, jotka ovat yhdensuuntaiset.

4. Kolmion sivujen pituudet ovat $2a$, a^2+1 ja a^2-1, missä $a > 1$. Kolmiolle on voimassa:

a) suurin kulma voi olla tylppä b) suurin kulma on aina suora
c) a^2+1 on aina sivuista pisin d) riippuu a:n arvosta, mikä sivuista on lyhin

5. Funktiosta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 2$, tiedetään, että $f(3) = 5$. Mitä funktion f arvoista voi päätellä?

a) $f(0) = 2$ b) $f(-3) = -5$ c) $f(-3) = -1$ d) $f(3) + f(-3) = 8$

6. Kokonaisluvun viidennen potenssin kaikki numerot voivat olla eri numeroita, kuten luvuissa $2^5 = 32$ ja $3^5 = 243$, tai jotkin numerot voivat toistua, kuten luvussa $10^5 = 100000$. Sellaisia positiivisia kokonaislukuja, joiden viidennen potenssin kaikki numerot ovat eri numeroita, on

a) vähintään 70 b) vähintään 90 c) enintään 100 d) yli 1000

7. Kaksi yhtä pitkää junaa kulkee vierekkäisiä raiteita nopeuksilla u ja v, missä $u > v > 0$. Jos junat kulkevat samaan suuntaan, on sivuuttamisaika kaksi kertaa niin suuri kuin junien kulkiessa vastakkaisiin suuntiin. (*Sivuuttamisaika* on se aika, jona junat ovat ainakin osittain vierekkäin.) Laske suhde u/v.

8. Todista, että kaikilla reaaliluvuilla x on $x^6 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0$.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

1. 11. 2011

1. Kolme uhkapeluria pelasi rahasta. Pelin alussa heidän hallussaan olleiden rahasummien suhde oli $6 : 5 : 4$ ja pelin lopussa $7 : 6 : 5$. Yksi pelaajista voitti 3 euroa. Montako euroa hänellä oli pelin lopussa?

a) 72	b) 75	c) 90	d) 108

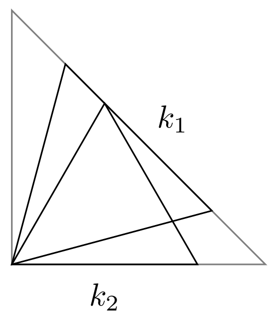
2. Mitä voidaan päätellä yhtälön $x^{2011} + x + 1 = 0$ ratkaisuista?

a) Yhtälöllä on yksikäsitteinen reaalinen ratkaisu.
b) Yhtälöllä on ainakin yksi rationaalinen ratkaisu.
c) Yhtälöllä ei ole negatiivisia ratkaisuja.
d) Yhtälön kaikki ratkaisut ovat välillä $[-1, 1]$.

3. Mitkä seuraavista lukua 211 koskevista väitteistä ovat tosia?

a) 211 on alkuluku.	b) 211 on kahden alkuluvun tulo.
c) 211 on kahden alkuluvun summa.	d) 211 on kolmen alkuluvun summa.

4. Suorakulmaisen tasakylkisen kolmion kateettien pituus on a. Kolmion sisällä on kaksi tasasivuista kolmiota k_1 ja k_2. Molempien kolmioiden kärjistä yksi on suoran kulman kärjessä. Kolmion k_1 yksi sivu on hypotenuusalla ja kolmion k_2 yksi sivu on kateetilla ja yksi kärki hypotenuusalla. Määritä kolmioiden k_1 ja k_2 sivujen pituuksien suhde.



5. Ratkaise yhtälö

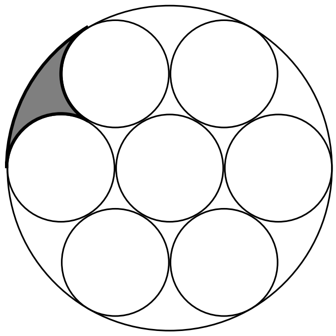
$$(x^2 + y^2 - 8)^2(1 - xy)^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 0.$$

6. Onko olemassa sellaista positiivista kokonaislukua n, että sen kertoma $n!$ päättyy täsmälleen 154 nollaan? (Positiivisen kokonaisluvun n *kertoma* on tulo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$.)

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

1.11. 2011

1. Kuviossa ison ympyrän säde on 6, pienet ympyrät ovat samankokoisia ja sisin sekä uloin ympyrä sivuavat muita ympyröitä. Määritä kuvion varjostetun osan ala.



2. Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$x^2 + (10y - y^2)^2 + y^6 = 2011$$

eli etsi ylläolevan yhtälön kokonaislukuratkaisut.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 2011x + 1}{x^2 + 1}.$$

Osoita, että $|f(x) - f(y)| \leq 2011$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

4. Taso laatoitetaan valkoisilla ja mustilla yksikköneliöillä niin, että toisiaan koskettavilla laatoilla on joko kokonainen yhteinen sivu tai vain yhteinen kärki. Tasoon piirretyn janan sanotaan olevan valkoinen, jos on olemassa sellaiset valkoiset laatat, että jana pysyy näiden sisäpuolella lukuun ottamatta kohtia, joissa se leikkaa sivuja; vastaavasti määritellään musta jana. Osoita, että taso voidaan laatoittaa niin, ettei minkään valkoisen tai mustan janan pituus ole suurempi kuin 5.

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).