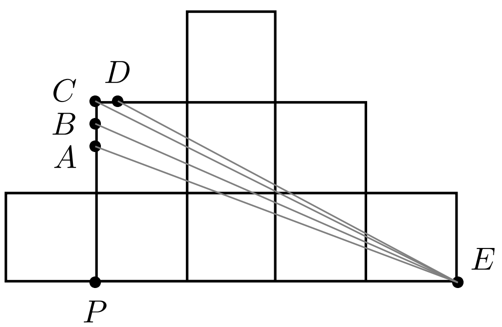
1. 11. Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut 2011

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	+	−	−	+
2.	−	+	−	−
3.	+	−	+	+
4.	−	+	+	+
5.	+	−	+	−
6.	−	−	+	−

P1. $5^{140} \cdot 8^{47} = 5^{140} \cdot (2^3)^{47} = 5^{140} \cdot 2^{3 \cdot 47} = 5^{140} \cdot 2^{141} = 2 \cdot (5 \cdot 2)^{140} = 2 \cdot 10^{140}$, jossa on 141 numeroa, siis pariton määrä.

P2. Piirretään kuvioon apupiste P ja eri leikkausvaihtoehdot.



Kolmiot APE, BPE ja CPE ovat kaikki suorakulmaisia, ja niillä on yhteinen kateetti PE, jonka pituus on 4, mutta toisen kateetin pituus h, ja siten myös kolmion ala $4h/2 = 2h$ vaihtelee. Jotta hypotenuusa jakaisi kuvion kahteen yhtäsuureen osaan, täytyy olla $1+2h = 9/2$ eli $h = 7/4 = 1\frac{3}{4}$. Koska janan BP pituus on juuri $2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$, niin vaihtoehto b on oikein ja a sekä c vääriä. Janalla ED leikkaaminenkaan ei käy päinsä, koska janan ED yläpuolelle jää vielä vähemmän alaa kuin CE:n.

P3. Olkoon tarkasteltava kuusikulmio $ABCDEF$. Kuusikulmion lävistäjien lukumäärä on $6(6-3)/2 = 9 < 10$, joten vaihtoehto a on oikein. Jos kuusikulmion lävistäjillä olisi yhteinen piste O, niin lävistäjillä AC, AD ja AE olisi kaksi yhteistä pistettä A ja O, joten A, C, D ja E olisivat samalla suoralla. Samalla tavalla päätellä, että D, F, A ja B ovat samalla suoralla, joten kaikki kuusikulmion kärjet ovat samalla suoralla, mikä on mahdotonta, joten b on väärin. Jos $ABCDEF$ on säännöllinen, niin lävistäjät BF ja DE ovat yhdensuuntaiset, sillä ne saadaan toisistaan $180°$ kierrolla symmetriakeskipisteen suhteen. Nämä lävistäjät eivät leikkaa toisiaan. Siis c ja d ovat oikein.

P4. Jos kolmion sivut ovat $2a$, a^2+1 ja a^2-1, missä $a > 1$, niin kolmio on suorakulmainen Pythagoraan (käänteis)lauseen nojalla, sillä

$$(a^2-1)^2 + (2a)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2+1)^2.$$

Siis suurin kulmista on suora ja muut teräviä (a väärin ja b oikein) sekä hypotenuusa a^2+1 on sivuista pisin. Kateettien suuruusjärjestys riippuu sen sijaan luvun a arvosta: jos $a = 2$, niin $2a = 4 > 3 = a^2 - 1$, jos taas $a = 3$, niin $2a = 6 < 8 = a^2 - 1$.

P5. $f(0) = a\cdot 0^5 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0 + 2 = 2$, joten a on oikein. Edelleen $f(3)+f(-3) = a\cdot 3^5 + b\cdot 3^3 + c\cdot 3 + 2 + a\cdot(-3)^5 + b\cdot(-3)^3 + c\cdot(-3) + 2 = a\cdot 3^5 + b\cdot 3^3 + c\cdot 3 + 2 - a\cdot -3^5 - b\cdot 3^3 - c\cdot 3 + 2 = 4$, mistä seuraa $f(-3) = 4 - f(3) = 4 - 5 = -1$, joten myös c on oikein, mutta loput vaihtoehdoista vääriä.

P6. Jos luvussa $n \in \mathbb{N}$ on yli 10 numeroa, kaikki numerot eivät voi olla eri numeroita. Koska $100^5 = 10^{10}$ on 11-numeroinen luku, haluttuja lukuja on enintään 99. Edelleen huomataan, että jos $64 \leq n < 100$, niin $10^{10} > n^5 > 64^5 = (2^6)^5 = 2^{30} = (2^{10})^3 > 1000^3 = 10^9$, joten tässä tapauksessa luvussa n^5 on täsmälleen 10 numeroa ja jos numerot eivät toistu, niin luvun n^5 numeroiden summa $\sum_{k=0}^{9} k = 0+1+2+\cdots+9 = 45$ on kolmella jaollinen luku, jolloin luvut n^5 ja n ovat myös kolmella jaollisia. Tällaisia lukuja n on korkeintaan $(99-66)/3+1 = 12$ kappaletta, joten haluttuja lukuja on enintään $63 + 12 = 75$. Karsitaan vielä luvut $n = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 90$, sillä näiden viidensissä potensseissa on ainakin viisi nollaa. Haluttujen lukuja on enintään $75 - 7 = 68$. Vain c on siis oikein.

Huomautus: Itse asiassa halutunlaisia lukuja on vain kymmenen, ja ne ovat seuraavassa taulukossa potensseineen:

n	1	2	3	4	5	7	8	14	16	38
n^5	1	32	243	1024	3125	16807	32768	537824	1048576	79235168

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Kun junat kulkevat samaan suuntaan, niin nopeampi juna etenee suhteellisella nopeudella $u-v$ hitaampaan nähden. Merkitään junien yhteistä pituutta a:lla. Sivuuttaessa nopeamman junan on edettävä matka $2a$ hitaampaan verrattuna, joten sivuuttamisaikaa tässä tapauksessa on

$$t = \frac{2a}{u-v}.$$

Kun junat kulkevat vastakkaisiin juniin, niin sivuuttamisajaksi saadaan vastaavasti

$$u = \frac{2a}{u+v}.$$

Koska oletettiin, että $t = 2u$, niin

$$\frac{2a}{u-v} = \frac{4a}{u+v} \iff u+v = 2(u-v) \iff 3v = u \iff u/v = 3.$$

P8. Epäyhtälö on varmasti tosi, kun $x \le 0$. Kun $0 < x < 1$, huomataan, että $x^6 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^6 + x^2(1-x) + (1-x) > 0$. Kun $x \ge 1$, on $x^6 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^3(x^3-1) + x(x-1) + 1 \ge 1$. $\square$

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	+	−	−
2.	+	−	−	+
3.	+	−	−	+

V1. Voidaan olettaa, että pelipotti on kaikkiaan $270x$. Alussa pelaajilla on $108x$, $90x$ ja $72x$, lopussa $105x$, $90x$ ja $75x$. Voittanut pelaaja on siis viimeinen, ja hänen voittonsa on $3x = 3$. Siis $x = 1$ ja pelaajalla on lopussa 75 euroa. Siis b.

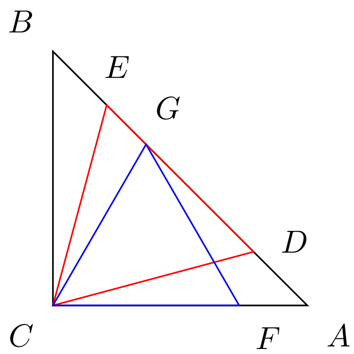
V2. Paritonta astetta olevalla polynomiyhtälöllä on tunnetusti reaalisia ratkaisuja. Toisaalta: Kun $x_0 < x_1$, niin myös $x_0^{2011} < x_1^{2011}$, sillä 2011 on pariton. Siis kuvaus $x \mapsto x^{2011} + x + 1$ on aidosti kasvava, joten reaalinen ratkaisu on yksikäsitteinen eli vaihtoehto a on oikein. Koska $0^{2011} + 0 + 1 = 1$, niin vastaavan polynomiyhtälön kasvavuudesta seuraa, että tämä ratkaisu on negatiivinen eli c on väärin. Se on välillä $[-1, 1]$, sillä $(-1)^2011 + (-1) + 1 = -1 < 0$ ja $1^{2011} + 1 + 1 = 3$. Yksikäsitteinen ratkaisu ei kuitenkaan voi olla rationaalinen, sillä tunnetun yleisen kriteerion mukaan ainoat rationaaliset ehdokkaat ovat $x = \pm 1$, eikä kumpikaan näistä ole juuri (siis b on väärin).

V3. Koska $211 < 17^2 = 289$, riittää testata jaollisuutta pienillä alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11 ja 13. Viimeisestä numerosta 1 nähdään, ettei 211 ole jaollinen kahdella tai viidellä. Koska $211 - 1 = 210 = 3 \cdot 7 \cdot 10$, ei jaollisuus kolmella tai seitsemällä tule myöskään kyseeseen. Koska vuorotteleva summa $2 - 1 + 1 = 2$ ei ole luvulla 11 jaollinen, ei myöskään 211 ole. Lopuksi todetaan, että $211 = 13 \cdot 16 + 2$. Siis 211 on alkuluku (vaihtoehto a). Alkuluvun määritelmän nojalla se ei voi olla kahden alkuluvun tulo, joten b on väärin. Pariton luku voi olla kahden alkuluvun summa vain, jos toinen näistä alkuluvuista on 2, mutta $211 - 2 = 209 = 19 \cdot 11$, joten c on väärin. Luvulle 211 on olemassa sen sijaan lukuisia esityksiä kolmen alkuluvun summana, kuten $211 = 101 + 97 + 13$, joten d on oikein.

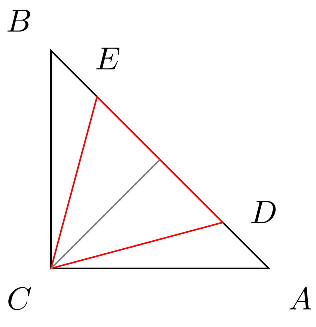
Huomautus: Goldbachin otaksuman heikon muodon mukaan ei ainoastaan luku 211, vaan jokainen pariton kokonaisluku $n \geq 5$ voidaan esittää kolmen alkuluvun summana. Otaksuman tiedetään pitävän paikkansa kaikilla riittävän suurilla kokonaisluvuilla ja lisäksi kaikilla luvuilla, jotka ovat pienempiä kuin 2 triljoonaa.

Välisarjan perinteiset tehtävät

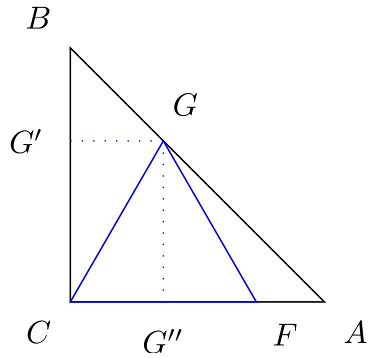
V4. Nimetään tehtävään liittyvät pisteet seuraavasti.



Kolmio k_1 on siis CDE, kolmio k_2 taas CFG. Kolmion k_1 sivun pituuden s_1 saa johdettua siitä, että kolmioilla k_1 ja CAF on yhteinen kärjestä C lähtevä kanta, jonka pituus on toisaalta $a/\sqrt{2}$, toisaalta $s_1\sqrt{3}/2$. Siis $s_1 = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$.



Tasasivuisen kolmion k_2 sivun pituus s_2 saadaan seuraavasti: Olkoon G' pisteen G kohtisuora projektio sivulle BC ja G'' sivulla AC.



Tällöin kolmio $BG'G$ on myös suorakulmainen tasakylkinen kolmio, joten $|BG'| = |G'G| = |CG''| = \frac{1}{2}s_2$. Toisaalta

$$|BG'| = |BC| - |G'C| = a - |GG''| = a - \frac{\sqrt{3}}{2}s_2,$$

joten $\frac{1}{2}s_2 = a - \frac{\sqrt{3}}{2}s_2$ eli $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})s_2 = a$ eli $s_2 = \dfrac{2a}{1+\sqrt{3}}$. Siis kysytty suhde on

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{6}}}{\frac{2a}{1+\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} \approx 1{,}12.$$

V5. On oltava $x^2 - y^2 = 0$ ja joko $x^2 + y^2 - 8 = 0$ tai $1 - xy = 0$. Edellinen ehto tarkoittaa, että $|x| = |y|$. Siis joko $2x^2 = 8$ eli $|x| = 2$ tai $|x| = 1$, $x = y$. Ratkaisuja ovat siis parit $(x,\, y) = (1,\, 1)$, $(-1,\, -1)$, $(2,\, 2)$, $(2,\, -2)$, $(-2,\, 2)$, $(-2,\, -2)$.

V6. Kun $n, p \in \mathbb{Z}_+$, $p \geq 2$, merkitään $\mathrm{ord}_p(n)$:llä suurinta eksponenttia $\alpha \in \mathbb{N}$, jolle $p^\alpha \mid n$. Jos p on alkuluku, voidaan näyttää, että

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor.$$

Luvuista $1, \ldots, n$ on nimittäin alkuluvulla p jaollisia $\lfloor n/p \rfloor$ kappaletta, näistä edelleen p^2:lla jaollisia $\lfloor n/p^2 \rfloor$ lukua jne.

Erityisesti jos $n \geq 625$, niin

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_2(n!) \geq \lfloor 625/2 \rfloor = 312,\\
&\mathrm{ord}_5(n!) \geq \lfloor 625/5 \rfloor + \lfloor 625/25 \rfloor + \lfloor 625/125 \rfloor + \lfloor 625/625 \rfloor = 125 + 25 + 5 + 1 = 156,
\end{aligned}$$

joten $\mathrm{ord}_{10}(n!) = 156 > 154$. Toisaalta jos $n \leq 624$, niin

$$\mathrm{ord}_5(n!) \leq \lfloor 624/5 \rfloor + \lfloor 624/25 \rfloor + \lfloor 624/125 \rfloor + \lfloor 624/625 \rfloor = 124 + 24 + 4 = 152,$$

joten tällöin $\mathrm{ord}_{10}(n!) = 152 < 154$. *Siis minkään positiivisen kokonaisluvun kertoma ei pääty täsmälleen 154 nollaan.*

Avoin sarja

A1. Pienten ympyröiden säde on 2. Varjostetun osan ala on 1/6 alasta, joka on ison ympyrän ala 36π vähennettynä seitsemän pienen ympyrän alalla $7 \cdot 4\pi = 28\pi$ ja kuudella kolmen pienen ympyrän väliin jäävän alueen pinta-alalla; tällainen alue on alaltaan 4-sivuisen tasasivuisen kolmion ala $4\sqrt{3}$ vähennettynä kolmella 2-säteisen ympyrän kuudenneksella eli 2π:llä. Kysytty ala on siis $\frac{1}{6}(36\pi - 28\pi - 6 \cdot (4\sqrt{3} - 2\pi)) = \frac{10}{3}\pi - 4\sqrt{3}$.

A2. Koska $x^2 + (10y - y^2)^2 \geq 0$, yhtälöstä $x^2 + (10y - y^2)^2 + y^6 = 2011$ seuraa $y^6 \leq 2011$. Huomataan, että $y^6 \geq 4^6 = 2^{12} = 4096 > 2011$, kun $|y| \geq 4$, joten mahdollisia luvun y kokonaisia arvoja ovat $y = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Ratkaistava yhtälö edellyttää, että $2011 = x^2 + (10y - y^2)^2 + (y^6)^2$ on kolmen neliön summa. Koska kuitenkin kaikilla $t \in \mathbb{Z}$ pätee joko $t^2 \equiv 0 \pmod 4$ (nimittäin jos t on parillinen) tai $t^2 \equiv 1 \pmod 4$ (jos t on pariton) sekä $2011 \equiv 3 \pmod 4$, niin näiden kolmen neliön täytyy olla parittomia. Erityisesti y on pariton.

Jos $y = -3$, niin yhtälöstä seuraa $x^2 = 2011 - (10 \cdot (-3) - (-3)^2)^2 - (-3)^6 = -239 < 0$, mikä on mahdotonta. Jos $y = -1$, niin $x^2 = 2011 - (10 \cdot (-1) - (-1)^2)^2 - (-1)^6 = 2011 - 121 - 1 = 1889$, mutta $43^2 = 1849 < 1889 < 1936 = 44^2$, joten kokonaista ratkaisua ei saada tässäkään tapauksessa. Jos $y = 1$, niin $x^2 = 2011 - (10 \cdot 1 - 1^2)^2 - 1^6 = 2011 - 81 - 1 = 1929$ on samalla välillä. Lopulta jos $y = 3$, niin $x^2 = 2011 - (10 \cdot 3 - 3^2)^2 - 3^6 = 2011 - 441 - 729 = 841 = 29^2$, joten

$$\begin{cases} x = \pm 29 \\ y = 3 \end{cases}$$

on yhtälön ratkaisu.

A3. Selvästi $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$. Koska

$$f'(x) = \frac{2011(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2},$$

f on kasvava väleillä $(-\infty, -1)$ ja $(1, \infty)$ ja vähenevä välillä $(-1, 1)$. Koska $f(-1) = \frac{2013}{2} > 1$ ja $f(1) = -\frac{2009}{2} < 1$, $f(-1)$ ja $f(1)$ ovat f:n saamista arvoista suurin ja pienin. Kaikille x ja y pätee siis $|f(x) - f(y)| \leq f(-1) - f(1) = 2011$.

A4. Asetetaan laatat tasoon niin, että niiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja keskipisteiden koordinaatit kokonaislukuja. Pisteen (m, n), $m, n \in \mathbb{Z}$, päälle asetetaan valkoinen laatta, jos joko m on kolmella jaollinen ja n parillinen tai m ei ole kolmella jaollinen ja n on pariton, muuten valitaan musta laatta. Valitun laatoituksen voi siis ajatella koostuvan yksikköneliöistä ja 2×1-suorakaiteista. Yksivärinen jana ei voi leikata

y-akselin suuntaisia laattojen sivuja, ei edes edellä hahmoteltujen 2×1-suorakaiteiden, vaan sen on kuljettava kärkien kautta. Jos tällainen jana leikkaa korkeintaan yhden suoraparven $y = m + \frac{1}{2}$ suorista, niin se pysyy kolmen yksikköneliön sisällä, mistä saadaan pituudelle yläraja $3\sqrt{2} < 5$. Jos se leikkaa kahta suoraparven suoraa, niin sen kulmakerroin on joko 1 tai $\frac{1}{2}$. Edellisessä tapauksessa yksivärisen janan suurin mahdollinen pituus on $3\sqrt{2} < 5$, jälkimmäisessä $2\sqrt{5} < 5$. $\square$