Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun tehtävien ratkaisuehdotuksia 29.1.2010

1. *Todista, että suorakulmaisen kolmion keskijanojen neliöiden summa on* $\dfrac{3}{4}$ *kolmion sivujen neliöiden summasta.*

Olkoon ABC suorakulmainen kolmio ja $\angle ABC$ suora kulma, $BC = a$, $CA = b$ ja $AB = c$. Olkoot D, E ja F sivujen BC, CA ja AB keskipisteet. Olkoot vielä keskijanat $AD = m_a$, $BE = m_b$ ja $CF = m_c$.

1. ratkaisu. Kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävä jana on kolmion kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaan puolet siitä. Siis $ED \| AB$ ja $ED = \dfrac{1}{2}AB$. Siis kolmio BDE on suorakulmainen. Pythgagoraan lauseen perusteella saadaan suorakulmaisista kolmioista ABD, FBC ja BDE

$$\begin{aligned}
m_a^2 &= AD^2 = AB^2 + BD^2 = c^2 + \frac{1}{4}a^2,\\
m_c^2 &= CF^2 = BC^2 + BF^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2,\\
m_b^2 &= BD^2 + DE^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2.
\end{aligned}$$

Siis $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{2}(a^2 + c^2) = \dfrac{3}{4}(2a^2 + 2c^2) = \dfrac{3}{4}(a^2 + c^2 + b^2)$; viimeinen yhtälö perustuu Pythagoraan lauseeseen sovellettuna kolmioon ABC.

2. ratkaisu. Tunnetun (ja Pythagoraan lauseen nojalla helposti todistettavan) *suunnikaslauseen* mukaan suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa. Kolmio ABC voidaan kolmella eri tavalla täydentää suunnikkaaksi: sivut a ja b, lävistäjät c ja $2m_c$; sivut b ja c, lävistäjät a ja $2m_a$; sivut c ja a, lävistäjät b ja $2m_b$. Näihin kolmeen suunnikkaaseen sovelletaan kuhunkin suunnikaslausetta. Siis $c^2 + 4m_c^2 = 2(a^2 + b^2)$, $a^2 + 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2)$ ja $b^2 + 4m_b^2 = 2(a^2 + b^2)$. Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen ja ratkaistaan $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$, saadaan heti väite. Oletusta kolmion ABC suorakulmaisuudesta ei tarvita. – Olennaisesti suunnikaslauseesta on kysymys myös silloin, kun käytetään tunnettua ja kaavakokoelmistakin löytyvää kolmion keskijanan pituuden lauseketta $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$. Johdutaan samoihin yhtälöihin kuin yllä.

3. ratkaisu. Olkoon $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Kosinilause sovellettuna kolmioihin ADC, BEA ja CFB antaa $m_a^2 = b^2 + \dfrac{1}{4}a^2 - ab\cos\gamma$, $m_b^2 = c^2 + \dfrac{1}{4}b^2 - bc\cos\alpha$ ja $m_c^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2 - ac\cos\beta$ Toisaalta kosinilause sovellettuna kolmion ABC antaa yhtälöt $2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$, $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$ ja $2ac\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2$. Kun jälkimmäisistä yhtälöistä sijoitetaan kosinitermit edellisiin ja lasketaan yhtälöt yhteen, saadaan väite.

2. *Määritä pienin* n*, jolle luvulla* $n!$ *on ainakin 2010 eri tekijää.*

Ratkaisu. Jos luvun n alkutekijähajotelma on $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, niin n:n tekijöiden määrä on $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$. Kun $m < n$, niin jokainen $m!$:n tekijä on $n!$:n tekijä, mutta $n!$:lla on tekijöitä, jotka eivät ole $m!$:n tekijöitä (esimerkiksi $n!$). $d(n!)$ on siis n:n aidosti kasvava funktio. Kokeillaan: 16!:ssa on tekijänä $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ kakkosta, $5 + 1 = 6$ kolmosta ja 3 viitosta ja 2 seitsemää, 11 ja 13. Tekijöitä siis $16 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 \cdot 21 = 21 \cdot 256 > 5000$, 15!:ssa kakkosia vain 11; tekijöiden lukumaarä $\dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$ kertaa 16!:n tekijöiden lukumäärä, mutta siis yli 3000, 14!:ssa viitoset ja kolmoset vähenevät yhdellä, siis tekijöitä $12 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60 \cdot 36 = 2160 > 2010$. Kun mennään 13!:aan, seitsemäisiä on yksi vähemmän, joten tekijämäärän ilmaisevassa tulossa ainakin yksi 3 muuttuu kahdeksi, joten tulo putoaa alle 2000:n. Vastaus on siis $n = 14$.

3. *Olkoon $P(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi, jolla on juuret 1997 ja 2010. Oletetaan lisäksi, että $|P(2005)| < 10$. Mitä kokonaislukuarvoja $P(2005)$ voi saada?.*

Ratkaisu. Jos $P(x_0) = 0$, niin $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. Jos erityisesti P:n kertoimet ovat kokonaislukuja ja x_0 on kokonaisluku, niin Q:kin on kokonaislukukertoiminen. [Todistus: Jos $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ja $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$, niin $a_n = b_n$, $a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - x_0 b_{n-1}$, $a_{n-2} = b_{n-3} - x_0 b_{n-2}$, $\ldots$, $a_1 = b_0 - x_0 b_1$. Kun näistä yhtälöistä ratkaistaan järjestyksessä b_{n-1}, b_{n-2}, $\ldots$, b_0, nähdään, että kaikki ovat kokonaislukuja.] Tämän perustuloksen mukaan tehtävän polynomi voidaan kirjoittaa muotoon $P(x) = (x - 1997)(x - 2010)Q(x)$, missä Q on kokonaislukukertoiminen polynomi. Siis erityisesti $|P(2005)| = |2005 - 1997| \cdot |2005 - 2010| \cdot |Q(2005)| = 40|Q(2005)|$. $Q(2005)$ on kokonaisluku. Jos olisi $Q(2005) \neq 0$, olisi $|P(2005)| \geq 40 > 10$, vastoin oletusta. Siis $Q(2005) = 0$ ja $P(2005) = 0$.

4. *Parillinen määrä, n jalkapallojoukkuetta pelaa yksinkertaisen sarjan, ts. kukin joukkue pelaa kerran kutakin toista vastaan. Osoita, että sarja voidaan ryhmitellä $n - 1$ kierrokseksi siten, että kullakin kierroksella jokainen joukkue pelaa tasan yhden pelin.*

Ratkaisu. Numeroidaan joukkueet numeroin 1, 2, $\ldots$, n. Tarkastellaan kierrosta i, $1 \leq i \leq n - 1$, ja joukkuetta x, $x < n$. Asetetaan joukkueen x vastustajaksi se joukkue, jolle $x + y + i$ on jaollinen luvulla $n - 1$ ja $1 \leq y < n$. Jos $x + x + i = 2x + i$ on jaollinen $n - 1$:llä, asettaan x:n vastustajaksi joukkue n. On osoitettava, että kaikki joukkueet pelaavat joka kierroksella ja että jokainen joukkue tulee pelanneeksi jokaista muuta vastaan. Todetaan ensin, että joukkue n pelaa joka kierroksella. Jos luvuilla $2x_1 + i$ ja $2x_2 + i$ on sama jakojäännös $(n - 1)$:llä jaettaessa, olisi $2(x_1 - x_2)$ parittoman luvun $n - 1$ monikerta, mutta koska $|x_1 - x_2| < (n - 1) - 1 < n - 1$, on $x_1 - x_2$. Jakojäännökset ovat eri lukuja, niitä on $n - 1$ kappaletta ja ne ovat välin $[0, n - 2]$ kokonaislukuja, joten tasan yksi niistä on 0. n saa aina vastustajan. Samoin osoitetaan, että jos $2x + i$ ei ole jaollinen $n - 1$:llä, on tasan yksi $y \neq x$, jolle $x + y + i$ on $n - 1$:n monikerta. Näin ollen jokaisella joukkueella on vastustaja kierroksella i, ja jos x saa vastustajakseen y:n, niin y saa vastustajakseen x:n. On vielä osoitettava, että jokaiset kaksi joukkuetta tulevat pelaamaan. Jos $x \neq y$, niin lukujen $x + y + 1$, $x + y + 2$, $\ldots$, $x + y + (n - 1)$ jakojäännökset $n - 1$:llä jaettaessa ovat eri lukuja (todistus samoin kuin edellä); tasan yksi niistä, sanokaamme luvun $x + y + i$ jakojäännös, on nolla. x ja y pelaavat siis keskenään kierroksella i ja vain kierroksella i. Lisäksi luvuista $2x + 1$, $2x + 2$, $\ldots$, $2x + (n - 1)$ tasan yksi, esimerkiksi $2x + i$, on $n - 1$:n monikerta. x ja n pelaavat siis kierroksella i.

5. *Olkoon S jokin tason pistejoukko. Sanomme, että piste P näkyy pisteestä A, jos kaikki janan AP pisteet kuuluvat joukkoon S ja että joukko S näkyy pisteestä A, jos jokainen S:n piste näkyy pisteestä A. Oletetaan, että S näkyy kolmion ABC jokaisesta kolmesta kärjestä. Todista, että joukko S näkyy jokaisesta muustakin kolmion ABC pisteestä.*

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että jos joukko S näkyy pisteistä P ja Q, niin jana PQ sisältyy joukkoon S ja S näkyy jokaisesta janan PQ pisteestä. Näkymisen määritelmästä seuraa, että pisteet P ja Q kuuluvat joukkoon S. Koska Q näkyy P:stä, niin jana PQ sisältyy joukkoon S. Olkoon nyt X mielivaltainen janan PQ piste ja Y mielivaltainen joukon S piste. Silloin janat PY ja QY sisältyvät joukkoon S. Jos Y on suoralla PQ ja janan PQ ulkopuolella, niin jana XY sisältyy joko janaan PY tai janaan QY, jotka puolestaan sisältyvät joukkoon S. Oletetaan, että PQY on (aito) kolmio, mutta janalla XY on piste Z, joka ei kuulu joukkoon S. Puolisuora PZ leikkaa janan QY pisteessä T. Koska T on S:n piste, se näkyy pisteestä P, joten Z onkin joukon S piste. Ristiriita osoittaa, että Y näkyy pisteestä X. Oletuksen mukaan S:n jokainen piste näkyy pisteistä A, B ja C. Edellä sanotun perusteella kolmion sivut AB, BC ja CA sisältyvät joukkoon S ja S näkyy jokaisesta näiden janojen pisteestä. Mielivaltainen kolmion ABC piste X on (usealla) sellaisella janalla, jonka päätepisteet ovat kolmion sivuilla. Edellä osoitetun mukaan S:n jokainen piste näkyy siis myös pisteestä X.