Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu

29. 1. 2010

1. Todista, että suorakulmaisen kolmion keskijanojen neliöiden summa on $\frac{3}{4}$ sivujen neliöiden summasta.

2. Määritä pienin $n \in \mathbb{N}$, jolle kertomalla $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ on ainakin 2010 positiivista tekijää.

3. Olkoon $P(x)$ kokonaiskertoiminen polynomi, jolla on juuret 1997 ja 2010. Oletetaan lisäksi, että $|P(2005)| < 10$. Mitä kokonaislukuarvoja $P(2005)$ voi saada?

4. Parillinen määrä, n jalkapallojoukkuetta pelaa yksinkertaisen sarjan, ts. kukin joukkue pelaa kerran kutakin toista vastaan. Osoita, että sarja voidaan ryhmitellä $n-1$ kierrokseksi siten, että kullakin kierroksella jokainen joukkue pelaa täsmälleen yhden pelin.

5. Olkoon S jokin tason epätyhjä pistejoukko. Sanomme, että piste P *näkyy* pisteestä A, jos kaikki janan AP pisteet kuuluvat joukkoon S ja että joukko S näkyy pisteestä A, jos jokainen S:n piste näkyy pisteestä A. Oletetaan, että S näkyy kolmion ABC jokaisesta kolmesta kärjestä. Todista, että joukko S näkyy jokaisesta muustakin kolmion ABC pisteestä.

Laskuaikaa on **3 tuntia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).