Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisuja 2009

Matemaattisten aineiden opettajien liiton lukion matematiikkakilpailu on kaksiportainen. Kilpailun ensimmäinen kierros on kolmisarjainen, ja sarjojen osallistumisoikeuden määrittelee kilpailijan ikä. Lukuvuoden 2009–10 kilpailun ensimmäinen kierros pidettiin 29. lokakuuta 2009.

Useimpiin tehtäviin löytyy useita ratkaisutapoja ja niiden muunnelmia.

Perussarja 1. Olkoot v, h ja m vadelmien, herukoiden ja mustikoiden rasiahinnat euroina. Tehtävän ehdot voidaan kirjoittaa yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} 2v + 2h + m = 8 \\ v + 3h + m = 7{,}5 \\ 2v \phantom{{}+2h} + 3m = 7, \end{cases}$$

Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $5(v+h+m) = 22{,}5$ eli $v+h+m = 4{,}5$. Tästä ja toisesta yhtälöstä saadaan $2h = 7{,}5 - (h+v+m) = 7{,}5 - 4{,}5 = 3$, joten $h = 1{,}5$. Toisesta yhtälöstä saadaan nyt $3v + 2h + 3m = 3(v+h+m) - h = 3 \cdot 4{,}5 - 1{,}5 = 12$.

Perussarja ja välisarja 2. Ruudukon lukujen summa on

$$1 + 2 + \cdots + 16 = \frac{16 \cdot 17}{2} = 8 \cdot 17 = 4 \cdot 34,$$

joten kunkin vaakarivin ja pystysarakkeen lukujen summa on 34. Vasemman sarakkeen alimpaan ruutuun tulee siis luku 14 ja kolmannen rivin neljänteen ruutuun 15. Oikeanpuoleisen sarakkeen kahden tyhjän ruudun lukujen summa on 11. Lukuparit, joiden osien summa on 11, ovat (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7) ja (5, 6). Kaikkien muiden paitsi viimeisen parin luvuista ainakin toinen on jo käytetty. Jää siis selvitettäväksi kaksi mahdollisuutta: 5 on oikean sarakken ylin ja 6 alin luku tai 6 ylin ja 5 alin. Jos 5 on ruudukon oikeassa yläkulmassa, ylimmän rivin keskimmäisten lukujen summa on 25, ja luvut löytyvät pareista (9, 16), (10, 15), (11, 14) tai (12, 13). Jälleen vain luettelon viimeinen pari on mahdollinen. Luku 16 ei voi olla alimmassa rivissä, koska $14 + 16 + 6 > 34$. 16 on siis toisessa rivissä. 16 ei voi olla kolmannessa sarakkeessa, koska $12 + 16 + 10 > 34$. Luku 16 on siis toisen rivin toisessa ruudussa. Silloin 1 on saman rivin kolmannessa ruudussa, joten alarivissä keskimmäisissä ruuduissa ovat 2 ja 11. 12 ei voi olla ylärivin toisessa ruudussa, koska tällöin toisen sarakkeen lukujen summa olisi pariton. Ylärivissä on siis oltava järjestyksessä luvut 4, 13, 12 ja 5, ja kun alarivi on 14, 3, 11, 6, tehtävän ehto täyttyy. Yksi mahdollinen järjestys on siis

4	13	12	5
9	16	1	8
7	2	10	15
14	3	11	6

Toinen mahdollisuus on, että ruudukon oikeassa yläkulmassa on 6 ja oikeassa alakulmassa 5. Samoin kuin edellä päätellään, että ylärivin keskimmäisissä ruuduissa on oltava 13 ja 11, että luvun 16 on oltava toisen rivin toisessa ruudussa ja luvun 1 toisen rivin kolmannessa ruudussa, että luvun 12 on oltava alarivin kolmannessa ruudussa; tämän jälkeen lukujen 11, 13 ja 3 paikat määräytyvät, ja ruudukko on

4	13	11	6
9	16	1	8
7	2	10	15
14	3	12	5

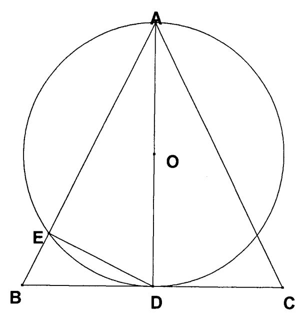
Perussarja 3. Kiekot voidaan aina asettaa kiinni toisiinsa. Voidaan siis rajoittua tutkimaan tapausta, jossa kiekot sivuavat toisiaan. Jos kiekkojen keskipisteitä yhdistävä suora muodostaa kulman α toisen neliön sivun, sanokaamme vaakasivun kanssa, niin pysytysivujen etäisyyden on oltava ainakin$r + 2r\cos\alpha + r = 2r(1 + \cos\alpha)$ ja vaakasivujen etäisyyden on oltava ainakin $r + 2r\sin\alpha + r = 2r(1 + sin\alpha)$. Laatikon sivun on oltava suurempi luvuista $2r(1+\cos\alpha)$, $2r(1+\sin\alpha)$. Kun $\alpha = 45^\circ$, molemmat luvut ovat $2r\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Kun $\alpha < 45^\circ$, niin $\cos\alpha > \cos 45^\circ$ ja kun $\alpha > 45^\circ$, niin $sin\alpha > \sin 45^\circ$. Etäisyyksistä suurempi on siis pienin mahdollinen, kun $\alpha = 45^\circ$, joten pienin mahdollinen a on $2r\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Perussarja 4. Etsitään positiivisia kokonaislukuja x ja y, joille $2009 = x^2 - y^2 = (x + y)(x-y)$. Lukujen $x+y$ ja $x-y$ on oltava luvun 2009 tekijöitä. Mutta $2009 = 7\cdot 287 = 7^2\cdot 41$, ja koska $x + y > x - y$, on x:n ja y:n on toteutettava jokin seuraavista yhtälöpareista:

$$\begin{cases} x + y = 2009 \\ x - y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 287 \\ x - y = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 49 \\ x - y = 41 \end{cases}.$$

Yhtälöparien ratkaisuiksi saadaan helposti $(x, y) = (1005, 1004)$, $(147, 140)$ ja $(45, 4)$.

Välisarja 2. Olkoon kolmio ABC tasakylkinen, olkoin $BC = 2r$ ja $AD = 2r$ kolmion korkeusjana. Olkoon O AD:n keskipiste ja leikatkoon O-keskinen r-säteinen ympyrä sivun AB pisteessä E. Valitaan mittayksikkö niin, että $EB = 1$. Olkoon $AE = x$. Thaleen lauseen perusteella $\angle AED = 90^\circ$, joten $DE = h$ on kolmion ABD korkeusjana. Suorakulmaisen kolmion tunnetun ominaisuuden (tai yhdenmuotoisten suorakulmaisten kolmioiden AED ja DEB perusteella) tiedetään, että $h^2 = AE \cdot EB = x$. Suorakulmaisesta kolmiosta BDE nähdään, että $x = h^2 = r^2 - 1$ eli $r^2 = 1 + x$. Suorakulmaisesta kolmiosta



AED puolestaan saadaan $x^2+h^2=4r^2$. Siis $x^2+x=4(x+1)$ eli $x^2-3x-4=0$. Tämän toisen asteen yhtälön ainoa positiivinen ratkaisu on $x=4$. Jakosuhde on siis $4:1$.

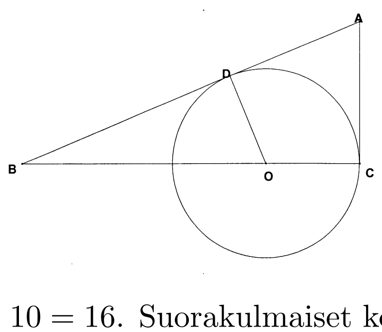
Välisarja 3. Kukin pelaaja pelaa neljä peliä ja pelejä on yhteensä $\binom{5}{2}=10$. Olkoon P_1 yksi pelaajista. Todennäköisyys, että P_1 voittaa tasan kaksi peliä, on $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$. Oletamme, että P_1 voittaa P_2:n ja P_3:n ja että P_2 voittaa P_3:n ja että P_1 häviää pelaajille P_4 ja P_5 ja että P_4 voittaa P_5:n. On käsitelty kuusi peliä. Loppujen neljän pelin on kaikkien päädyttävä määrättyyn lopputulokseen: Kaksi peliä hävinneen P_3:n on voitettava P_4 ja P_5, tämän jälkeen kaksi peliä hävinneen P_5:n on voitettava P_2 ja kaksi peliä hävinneen P_2:n on voitettava P_4. Todennäköisyys, että nämä neljä peliä päättyisivät juuri näin on $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$. Todennäköisyys, että jokainen pelaaja voittaisi juuri kaksi peliä on siten $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{16}=\frac{3}{128}$.

Välisarja 4 ja avoin sarja 3. Koska ratkaistavana on yhtälö $2009=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ ja $2009=7^2\cdot 41=7\cdot 287$, kokonaislukujen x ja y, $x>y$, on toteutettava jokin yhtälöpareista

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=2009 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2=287 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-y=41 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}.$$

Ensimmäinen pari johtaa yhtälöön $x^2+x(x-1)+(x-1)^2=2009$ eli $3x^2-3x=2008$. Koska 2008 ei ole jaollinen kolmella, yhtälö ei toteudu millään kokonaisluvulla x. Vastaavasti toinen yhtälöpari johtaa yhtälöön $x^2+x(x-7)+(x-7)^2=287$ eli $3x^2-21x+49=7\cdot 41$. Siis x^2 on jaollinen 7:llä. Mutta silloin x on jaollinen 49:llä samoin kuin $21x$:kin. Yhtälön oikea puoli ei ole jaollinen 49:llä, joten yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua. Jos viimeisellä yhtälöparilla olisi ratkaisu, jossa x on positiivinen kokonaisluku, niin $x\geq 41$ ja $x^2+xy+y^2\geq 41^2>49$. Ratkaisua ei siis ole. Tehtävässä kysyttyjä tapoja kirjoittaa luku 2009 ei siis ole olemassa.

Avoin sarja 1. Olkoon suorakulmaisessa kolmiossa ABC C suoran kulman kärki ja $AC=10$, $BC=24$. Silloin $AB^2=4\cdot(5^2+12^2)=4\cdot 169=26^2$, joten $AB=26$. Olkoon O sivun BC piste ja sivutkoon r-säteinen O-keskinen ympyrä Γ AC:tä ja AB:tä. Koska $BC\perp AC$, Γ sivuaa AC:tä pisteessä C. Olkoon D Γ:n ja AB:n yhteinen piste. Silloin $OD\perp AB$. Tangenttien leikkauspisteen ja sivuamispisteiden väliset janat ovat yhtä pitkät, joten $AD=AC=10$. Siis $BD=26-10=16$. Suorakulmaiset kolmiot ABC ja BOD ovat yhdenmuotoiset. Siis $\frac{r}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{5}{12}$ ja $r=\frac{16\cdot 5}{12}=\frac{20}{3}=6\,\frac{2}{3}$.



Avoin sarja 2. Kolmion sivut ovat a, qa ja q^2a. Oletetaan ensin, että $q\geq 1$. Kolmion pisin sivu on lyhempi kuin kahden muun summa. Siis $aq^2<a+aq$ eli $q^2-q-1<0$.

Epäyhtälössä on yhtälö, kun $q = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, joten epäyhtälö on voimassa, vain kun $1 \le q < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Siis $2 \le 2q < 1+\sqrt{5}$. Oletetaan sitten, että $0 < q < 1$. Nyt a on kolmion pisin sivu, joten $a < aq + aq^2$ eli $q^2 + q - 1 > 0$. Epäyhtälössä on yhtälö, kun $q = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, joten epäyhtälö on voimassa vain kun $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) < q < 1$ eli $-1+\sqrt{5} < 2q < 2$. Luku q toteutattaa siis tehtävässä ilmoitetun kaksoisepäyhtälön.

Avoin sarja 4. Riittää, että kuvailee jonkin tavan järjestää soitot niin, että tehtävän ehto toteutuu. Olkoon suomalaiset S_0, S_2, $\ldots$, S_9 ja ruotsalaiset R_1, R_2, $\ldots$, R_9. Soittakoon suomalainen S_i ruotsalaisille R_i, R_{i+1} ja R_{i+3}, missä indeksit luetaan $\bmod 10$. Puheluja on $3 \cdot 10 = 30$, eikä kukaan suomalainen soita kellekään ruotsalaiselle kahdesti, joten ehto 1) täyttyy. Ehdon 2) voimassolon todistamiseksi riittää, kun tarkastellaan kaaviota, johon on merkitty kaikki puhelut:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \end{array} \\
\begin{array}{c} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccc}
x & x & & x & & & & & & \\
 & x & x & & x & & & & & \\
 & & x & x & & x & & & & \\
 & & & x & x & & x & & & \\
 & & & & x & x & & x & & \\
 & & & & & x & x & & x & \\
 & & & & & & x & x & & x \\
x & & & & & & & x & x & \\
 & x & & & & & & & x & x \\
x & & x & & & & & & & x
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Jos jotkin kaksi suomalaista S_i ja S_k soittaisivat kahdelle ruotsalaiselle R_m ja R_n kaikki neljä mahdollista puhelua, kaaviossa olisi rivien m ja n sekä sarakkeiden i ja k määrittämän suorakaiteen kaikissa kärjissä x. Kaaviota riveittäin tarkastamalla näkee kuitenkin, että siinä ei ole yhtään sellaista suorakaidetta, jonka kaikissa kärjissä olisi x.