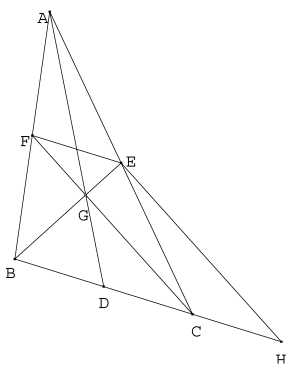
Lukion matematiikkakilpailu 2006

Loppukilpailutehtävinen ratkaisuhahmotelmia

1. Koska $(x+1)(y+1) = x+y+xy+1$, tehtävän yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $(x+1)(y+1) = 2007$ kanssa. Nyt $2007 = 9 \cdot 223 = 3 \cdot 669$. Selvästi 223 ei ole jaollinen kolmella eikä viidellä. Kokeilemalla huomaa, että 223 ei ole jaollinen 7:llä, 11:llä eikä 13:lla. Koska $15^2 = 225 > 223$, suurempia mahdollisia tekijöitä ei tarvitse tutkia; 223 on alkuluku. Koska on oltava $x+1 \ge 2$ ja $y+1 \ge 2$, on oltava joko $x+1 = 9$ ja $y+1 = 223$ eli $x = 8$, $y = 222$ tai $x+1 = 223$ ja $y+1 = 222$ eli $x = 222$ ja $y = 8$ tai $x+1 = 3$ ja $y+1 = 669$ eli $x = 2$ ja $y = 668$ tai $x+1 = 669$ ja $y+1 = 3$ eli $x = 668$ ja $y = 2$. – Selvästi kaikki saadut lukuparit ovat alkuperäisen yhtälön ratkaisuja.

2. Lasketaan epäyhtälön vasemman ja oikean puolen erotus: $3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2 = 3+3a^2+3a^4-1-a^2-a^4-2a-2a^2-2a^3 = 2a^4-2a^3-2a+2 = (a^4-2a^3+a^2)+(a^4-2a^2+1)+(a^2-2a+1) = a^2(a-1)^2+(a^2-1)^2+(a-1)^2 \ge 0$. Epäyhtälö on siis tosi kaikilla a (ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $a = 1$).

3. $p = 5a+b$, $a \ge 0$, $0 \le b \le 5$. Jos $b = 0$, $p = 5$. $4 \cdot 5^2 + 1 = 101$. $6 \cdot 5^2 + 1 = 151$. Nopeasti kokeilemalla huomataan, että 101 ja 151 ovat alkulukuja. Jos $p \ne 5$, $1 \le b \le 4$. $p^2 = 5c + b^2$. $1^2 = 1$, $2^2 = 5-1$, $3^2 = 10-1$, $4^2 = 15+1$. Jos $b = 1$ tai $b = 4$, $4p^2+1 = 5d$ ja $4p^2+1 \ne 5$. $4p^2+1$ ei ole alkuluku. Jos $b = 2$ tai $b = 3$, $6p^2+1 = 5f$ ja $6p^1+1 \ne 5$. Siis $6p^2+1$ ei ole alkuluku. Ainoa mahdollisuus on, että $p = 5$.



4. Oletetaan, että kolmion ABC keskijanat ovat AD, BE ja CF ja että $BE \perp CF$. Keskijanojen leikkauspiste on G. Koska BCG on suorakulmainen kolmio, BC on sen ympäri piirretyn ympyrän halkaisija ja D saman ympyrän keskipiste. Siis $DG = BD = DC$ ja $BC = 2DG$. Piirretään E:n kautta CF:n suuntainen suora, joka leikkaa suoran BC pisteessä H. Koska FE on kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävänä janana BC:n suuntainen, $CHEF$ on suunnikas ja $CH = FE$ $= \dfrac{1}{2}BC = DG$. CH on kolmasosa BH:sta ja DG on kolmasosa AD:stä. Siis $BH = AD$. Kolmio BHE on suorakulmainen, koska $EH \| CF$ ja $CF \perp BE$.

5. Oletetaan, että pelaajat ovat A ja B ja että A kirjoittaa ensimmäisen numeron. Merkitään $S(R)$:llä ruutua, joka on symmetrinen ruudun R kanssa kuvion keskipisteen suhteen. Pelaaja B voittaa aina, jos B käyttä seuraavaa strategiaa: kun A on kirjoittanut ruutuun R luvun n, B kirjoittaa ruutuun $S(R)$ luvun n. Tämä ruutu on vapaa. A jos A:n ensimmäinen luku on ruudussa R, niin $S(R)$ on varmasti vapaa. Jokaista A:n siirtoa edeltäneet siirrot ovat aina varanneet jonkin parin R, $S(R)$, joten A:n viimeinen siirto on tehty sellaiseen ruutuun R_k, jolle $S(R_k)$ on vapaa. Koska neliössä on parillinen määrä rivejä, $S(R_k)$:n vaaka- ja pystyrivin ruudut ovat R_k:n vaaka- ja pystyrivin ruutujen kanssa symmetrisiä. Myös se 4-pikkuneliö, johon $S(R_k)$ kuuluu, koostuu R_k:n pikkuneliön kanssa symmetrisistä neliöistä. Ennen A:n viimeistä siirtoa R_k:n ja $S(R_k)$:n vaaka- ja pystyriveillä sekä pikkuneliöissä on samat luvut. Jos A voi kirjoittaa R_k:hon luvun n_k, voi B siis myös kirjoittaa $S(R_k)$:hon luvun n_k. Näin ollen ainoa tapa, jolla peli voi päättyä, on että A ei voi kirjoittaa mihinkään vapaaseen ruutuun tai vapaita ruutuja ei ole. Tilanne, jossa B ei voisi jatkaa peliä A:n siirron jälkeen ei voi esiintyä.