Lukion matematiikkakilpailu 2005

Loppukilpailun tehtävien ratkaisuja

1. Olkoon ison neliön sivu a ja pienten, vasemmalta oikealle, b, c ja d. Silloin $b+c+d=a$. Oletetaan, että $b \geq d$. Täydennetään kuvion neliöiden keskipisteitä yhdistävät janat hypotenuusina suorakulmaiset kolmiot, joiden kateetit ovat neliöiden sivujen suuntaiset. "Vaakasuoran" kolmion pystysuoran ja vaakasuoran kateetin suhde on

$$\frac{\dfrac{b-d}{2}}{\dfrac{b}{2}+c+\dfrac{d}{2}} = \frac{b-d}{a+c}.$$

"Pystysuoran" kolmion lyhemmän ja pitemmän kateetin suhde puolestaan on

$$\frac{b+\dfrac{c}{2}-\dfrac{a}{2}}{\dfrac{c}{2}+\dfrac{a}{2}} = \frac{2b+c-a}{a+c} = \frac{b-d}{a+c}.$$

Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset. Koska kolmioiden kateetit ovat pareittain kohtisuorassa toisiaan vastaan, ovat hypotenuusatkin.

2. Voidaan ajatella, että pöydän ympärillä on alkuun seitsemän tuolia. Sen jälkeen kun ensimmäinen mies on istunut yhdelle näistä, voivat muut kuusi istua muille tuoleille $6! = 720$ eri järjestykseen. Tuolien väleissä on 7 rakoa. Niistä viisi voidaan valita $\binom{7}{5} = 21$ eri tavalla naisten tuolien paikoiksi. Jokaista miesten istumajärjestystä ja jokaista rakojen valintaa kohden on $5! = 120$ erilaista naisten istumajärjestystä. Erilaisia järjestyksiä on siis $720 \cdot 21 \cdot 120 = 1814400$.

3. Olkoon (x, y, z) yhtälöryhmän ratkaisu. Voidaan olettaa, että $x \leq y \leq z$. Koska $t \mapsto t^3$ on aidosti kasvava funktio, niin $z = (x+y)^3 \leq (y+z)^3 = x$. Siis $z = x = y$. x toteuttaa yhtälön $(2x)^3 = x$, joten on oltava $x = 0$ tai $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{8}}$. Sijoittamalla alkuperäisiin yhtälöihin nähdään, että $(0, 0, 0)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}, \dfrac{1}{\sqrt{8}}, \dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$ ja $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{8}}, -\dfrac{1}{\sqrt{8}}, -\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$ kelpaavat ratkaisuiksi (x, y, x).

4. Lukujen 1379, 1793, 3719, 1739, 1397, 1937 ja 1973 jakojäännökset seitsemällä jaettaessa ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Otetaan tarkasteltavan luvun neljäksi viimeiseksi numeroksi 1, 3, 7 ja 9. Luku on siis $a + 1397$. Jos a:n jakojäännös seitsemällä jaettaessa on b, järjestetään 1, 3, 7 ja 9 luvuksi c, jonka jakojäännös seitsemällä jaettaessa on $7 - b$. Luku $a + c$ on seitsemällä jaollinen ja sen numerot ovat samat kuin alkuperäisen luvun.

5. Jonot (0) ja (0, 1) ovat sekaisin ja luettelevat joukot $\{0\}$ ja $\{0, 1\}$ toistoitta. Olkoon $k > 0$; oletetaan, että jokaisella $n < 2k$ on olemassa sekaisin oleva jono, joka luettelee joukon $\{0, 1, \ldots, n\}$ toistotta. Osoitetaan, että tällöin on olemassa jonot, jotka luettelevat joukot $\{0, 1, \ldots, 2k\}$ ja $\{0, 1, \ldots, 2k + 1\}$ toistoitta. Väite seuraa tämän jälkeen induktioperiaatteesta. – Koska $k < 2k$, on olemassa sekaisin oleva jono $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, joka luettelee joukon $\{0, 1, \ldots, k\}$ toistoitta. Määritellään jono $(b_0, b_1, \ldots, b_{2k+1}) = (2a_0, \ldots, 2a_k, 2a_0 + 1, \ldots, 2a_k + 1)$, eli

$$b_i = \begin{cases} 2a_i, & \text{kun } i \le k \\ 2a_i + 1, & \text{kun } i > k. \end{cases}$$

Jonon ensimmäiset $k+1$ alkiota luettelevat joukon $\{0, 2, \ldots, 2k\}$ ja viimeiset $k+1$ alkiota joukon $\{1, 3, \ldots, 2k + 1\}$. Jono $(b_0, \ldots, b_{2k+1})$ luettelee siis joukon $\{0, 1, \ldots, 2k + 1\}$. Osoitetaan, että jono on sekaisin. Tarkastellaan kahta jonon alkiota b_i ja b_j. Jos toinen näistä on parillinen ja toinen pariton, niiden keskiarvo ei ole kokonaisluku eikä siis esiinny jonossa. Jos b_i ja b_j ovat parillisia, mutta niiden keskiarvo on pariton, niin b_i ja b_j ovat jonon alkupuolikkaassa ja keskiarvo loppupuolikkaassa, eikä siis b_i:n ja b_j:n välissä. Jos b_i ja b_j ovat parittomia, mutta niiden keskiarvo on parillinen, niin keskiarvo on alkupuolikkaassa ja b_i, b_j loppupuolikkaassa. Keskiarvo ei ole b_i:n ja b_j:n välissä. Jos b_i ja b_j sekä $\dfrac{b_i + b_j}{2}$ ovat parillisia, niin $\dfrac{b_i + b_j}{2} = \dfrac{2a_i + 2a_j}{2} = 2 \cdot \dfrac{a_i + a_j}{2} = 2a_m = b_m$. Koska jono $(a_0, \ldots, a_k)$ on sekaisin, a_m ei ole a_i:n ja a_j:n välissä. Koska jonon $(a_0, \ldots, a_k)$ järjestys on sama kuin jonon $(b_0, \ldots, b_{2k+1})$:n ensimmäisen puoliskon, ei b_m ole b_i:n ja b_j:n välissä. Samoin käsitellään tapaus, jossa b_i, b_j ja $\dfrac{b_i + b_j}{2}$ ovat kaikki parittomia. Jos sekaisin olevasta jonosta poistetaan alkio, jää jäljelle sekaisin oleva jono. Joukon $\{0, 1, \ldots, 2k\}$ luetteleva sekaisin oleva jono saadaan jonosta $(b_0, \ldots, b_{2k+1})$ poistamalla siitä luku $2k+1$.