Lukion matematiikkakilpailu

Loppukilpailu 6. helmikuuta 2004

Ratkaisuehdotuksia/ ML

1. *Yhtälöillä*

$$x^2 + 2ax + b^2 = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + 2bx + c^2 = 0$$

on kummallakin kaksi erisuurta reaalista ratkaisua. Kuinka monta reaalista ratkaisua on yhtälöllä

$$x^2 + 2cx + a^2 = 0?$$

Ratkaisu. Toisen asteen yhtälöllä on kaksi eri suurta reaalista ratkaisua silloin ja vain silloin, kun yhtälön diskriminantti on positiivinen. Siis

$$4a^2 - 4b^2 > 0 \quad \text{ja} \quad 4b^2 - 4c^2 > 0.$$

Siis yhtälön $x^2 + 2cx + a^2 = 0$ diskriminantti

$$4c^2 - 4a^2 = 4c^2 - 4b^2 + 4b^2 - 4a^2 < 0.$$

Yhtälöllä $x^2 + 2cx + a^2 = 0$ ei siis ole reaalisia ratkaisuja.

2. *Luvut a, b ja c ovat positiivisia kokonaislukuja ja*

$$\frac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c}$$

on rationaaliluku. Osoita, että

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$$

on kokonaisluku.

Ratkaisu. Koska $\sqrt{3}$ on irrationaaliluku, $b\sqrt{3} - c \neq 0$. Voidaan siis laventaa:

$$\frac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c} = \frac{(a\sqrt{3} + b)(b\sqrt{3} - c)}{3b^2 - c^2} = \frac{3ab - bc + (b^2 - ac)\sqrt{3}}{3b^2 - c^2}.$$

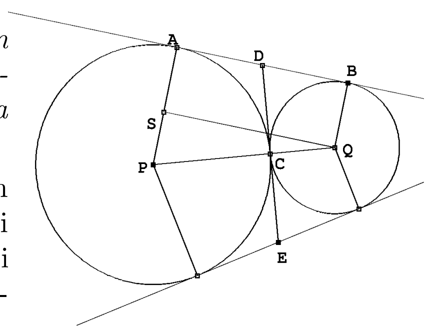
Tämä luku on rationaaliluku vain, kun $b^2 - ac = 0$. Nyt

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + b^2) = (a + b + c)(a - b + c).$$

Siis

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = a - b + c.$$

3. *Ympyrät, joiden säteet ovat r ja R, sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Kuinka pitkän janan ympyröiden sivuamispisteen kautta kulkevasta ympyröiden yhteisestä tangentista erottavat ympyröiden kaksi muuta yhteistä tangenttia?*



Ratkaisu. Olkoon $R > r$ ja olkoon R-säteisen ympyrän keskipiste P, toisen Q. Ympyröiden sivuamispiste on C, ei yhteisen sivuamispisteen kautta kulkeva yhteinen tangentti sivuaa ympyröitä pisteissä A ja B, ja ympyröiden sivuamispisteen kautta kulkeva tangentti leikkaa muut yhteiset tangentit pisteissä D ja E. Piste S säteellä PA on valittu niin, että $BQBA$ on suorakaide. Ympyrän tangenttien yleisten ominaisuuksien nojalla $AD = DC = DB$. Symmetrian perusteella $CD = CE$. Siis $DE = AB = BQ$. Sovelletaan Pythagoraan lausetta kolmioon PQB: $BQ^2 = PQ^2 - PB^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4rR$. Siis $DE = 2\sqrt{rR}$.

4. *Luvut* $2005! + 2$, $2005! + 3$, $\ldots$, $2005! + 2005$ *muodostavat 2004:n peräkkäisen kokonaisluvun jonon, jossa ei ole yhtään alkulukua. Onko olemassa jokin 2004:n peräkkäisen kokonaisluvun jono, jossa on tasan 12 alkulukua?*

Ratkaisu. Verrataan alkulukujen määrää jonoissa a, $a+1$, $\ldots$, $a+2003$ ja $a+1$, $a+2$, $\ldots$, $a+2004$. Jos molemmat luvut a ja $a+2004$ ovat alkulukuja tai yhdistettyjä lukuja, kummassakin jonossa on yhtä monta alkulukua. Jos luvuista tasan toinen on alkuluku, jonoissa olevien alkulukujen määrä eroaa tasan yhdellä. Jonossa 1, 2, $\ldots$, 2004 on enemmän kuin 12 alkulukua (ainakin 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41). Koska jonossa a, $a+1$, $\ldots$, $a+2003$ ei ole yhtään alkulukua, kun $a = 2005!+2$, on jollain b, $1 < b < a$ oltava jono b, $b+1$, $\ldots$, $b+2003$, jossa on tasan 12 alkulukua.

5. *Valtakunnassa otetaan käyttöön uusi rahayksikkö, markka, joka jakautuu sataan penniin. Eri kolikkoarvoja otetaan käyttöön vain kolme. Mitkä kolikkoarvot olisi valittava, jotta mikä tahansa markkaa pienempi ostos voitaisiin maksaa tasarahalla kukkarosta, jossa on mahdollisimman vähän kolikkoja?*

Ratkaisu. On selvää, että yksi kolikkolaji on yhden pennin kolikko. Olkoot muut arvot a ja b penniä, $a < b$. Oletetaan, mikä tahansa enintään 99 pennin summa voidaan maksaa enintään x:llä pennin, y:llä a:n pennin ja z:lla b:n pennin kolikolla. Silloin on erityisesti oltava

$$\begin{cases} a - 1 \le x \\ b - 1 \le x + ay \\ \quad 99 \le x + ay + bz. \end{cases}$$

Kun ensimmäinen ja toinen epäyhtälö yhdistetään, saadaan välttämätön ehto $b - 1 \le x + ya \le x + y(x+1)$ eli $b \le (x+1)(y+1)$, ja kun tämä yhdistetään viimeiseen epäyhtälöön, saadaan edelleen $100 = 99 + 1 \le x + ya + zb + 1 \le x + y(x+1) + z(x+1)(y+1) + 1 = (x+1)(y+1)(z+1)$. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välinen yhtälö kertoo, että

$$\frac{x+y+z+3}{3} \ge \sqrt[3]{100}.$$

Koska esimerkiksi $4{,}5^3 = 4{,}5 \cdot 20{,}25 < 100$, niin $x + y + z > 3 \cdot 4{,}5 - 3 = 10{,}5$. Koska $x + y + z$ on kokonaisluku, on $x + y + z \ge 11$. Jos pienin luvuista x, y, z, sanokaamme z, olisi 2, olisi

$$(x+1)(y+1) \ge \frac{100}{3},$$

eli $(x+1)(y+1) \ge 34$. Tällöin olisi

$$\frac{x+y+2}{2} \ge \sqrt{34} > 5{,}5.$$

Siis $x + y + z = x + y + 2 > 11$. Samoin nähdään, että jos pienin luvuista on 1, niin $x + y + z > 11$. Mutta kolmikot, joissa luvuista kaksi on nelosia ja yksi kolmonen, antavat ratkaisuja: jos $x = 3$, voidaan valita $a = 4$, $b = 20$, jos $y = 3$, voidaan valita $a = 5$, $b = 20$, ja jos $z = 3$, voidaan valita $a = 5$, $b = 25$. Kaikissa näissä tapauksissa maksut voidaan suorittaa kukkarosta, jossa on 11 kolikkoa.