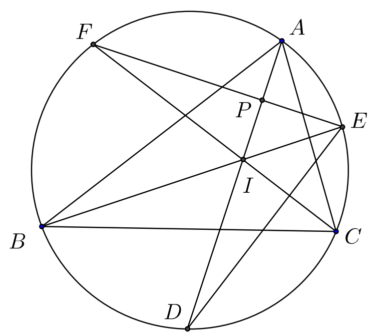
Lukion matematiikkakilpailu 7.2.2003

Ratkaisuehdotuksia

1. *Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Puolisuorat AI, BI ja CI leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteissä D, E ja F. Todista, että AD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.*

Ratkaisu. Olkoon P AD:n ja EF:n leikkauspiste. Tarkastellaan kolmiota DEP. Kolmion kulman vieruskulmaa koskevan lauseen perusteella $\angle APE = \angle DEP + \angle PDE$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle PED = \angle FED = \angle FEB + \angle BED = \angle FCB + \angle BAD$ ja $\angle PDE = \angle ADE = \angle ABE$. Tunnetusti I on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Kulmien $\angle FCB$, $\angle BAD$ ja $\angle ABE$ summa on siten puolet kolmion ABC kulmien summista, eli $90°$. Mutta näin ollen myös $\angle APE = 90°$, ja väite on todistettu.



2. *Minkä peräkkäisten kokonaislukujen välissä on lausekkeen*

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \frac{1}{x_3+1} + \frac{1}{x_{2001}+1} + \frac{1}{x_{2002}+1}$$

arvo, kun $x_1 = 1/3$ ja $x_{n+1} = {x_n}^2 + x_n$?

Ratkaisu. Koska $x_n^2 + x_n = x_n(x_n+1)$, niin

$$\frac{1}{x_n(x_n+1)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1}$$

ja

$$\frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Siis

$$\sum_{n=1}^{2002} \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2003}} = 3 - \frac{1}{x_{2003}}.$$

Jono (x_n) on kasvava. Lasketaan sen ensimmäiset jäsenet:

$$x_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{4}{9}, \quad x_3 = \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}+1\right) = \frac{52}{81}, \quad x_4 = \frac{52}{81}\left(\frac{52}{81}+1\right) = \frac{6916}{6561} > 1.$$

Koska jono on kasvava, $0 < \dfrac{1}{x_{2003}} < 1$. Tehtävän summan arvo on siis lukujen 2 ja 3 välissä.

3. *Pöydällä on kuuden eri ihmisen tyhjät kukkarot. Kuinka monella tavalla niihin voidaan sijoittaa 12 kahden euron kolikkoa niin, että korkeintaan yksi jää tyhjäksi?*

Ratkaisu. Tunnetusti tapoja sijoittaa m esinettä n:ään lokeroon on $\binom{m+n-1}{n-1}$. [Esineet ja lokeroiden väliseinät, yhteensä $m+n-1$ objektia laitetaan jonoon; tässä jonossa mahdollisia väliseinien paikkoja on edellä mainittu lukumäärä.] Tapoja sijoittaa kolikot kukkaroihin niin, että joka kukkarossa on ainakin yksi kolikko, on siten $\binom{6+5}{5}$. Tällaiset sijoittelut voidaan nimittäin tehdä niin, että laitetaan jokaiseen kukkaroon yksi kolikko ja sitten sijoitetaan loput 6 kolikkoa kukkaroihin mielivaltaisesti. Sijoittelut, joissa tasan yksi kukkaro jää tyhjäksi, voidaan tehdä niin, että valitaan tyhjäksi jäävä kukkaro (6 eri mahdollisuutta), sijoiteaan viiteen kukkaroon yksi kolikko kuhunkin, ja sitten seitsemän kolikkoa viiteen kukkaroon mielivaltaisesti. Näitä sijoitteluja on siis kaikkiaan $6 \cdot \binom{7+4}{4}$. Eri sijoitteluja on siis kaikkiaan

$$\binom{11}{5} + 6\binom{11}{4} = \frac{11!}{4! \cdot 6!}\left(\frac{1}{5} + \frac{6}{7}\right) = 37 \cdot 11 \cdot 6 = 2442.$$

4. *Etsi ne positiivisten kokonaislukujen parit* $(n,\, k)$*, joille*

$$(n+1)^k - 1 = n!.$$

Ratkaisu. Olkoon n jokin tehtävän yhtälön toteuttava luku. Jos p on luvun $n+1$ alkutekijä, se on myös luvun $n!+1$ tekijä. Mutta mikään $p \le n$ ei ole tekijänä luvussa $n!+1$. On siis oltava $p = n+1$. Jos $n+1 = 2$, niin $n = 1$ ja $2^k - 1 = 1$. On oltava $k = 1$. Pari $(1,\, 1)$ on siis ratkaisu. Jos $n+1 = 3$, saadaan samoin $3^k - 1 = 2$ ja $k = 1$. Pari $(2,\, 1)$ on myös ratkaisu. Jos $n+1 = 5$, $5^k - 1 = 24$, joten $(4,\, 2)$ on ratkaisu.

Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Jos $(n,\, k)$ olisi tällainen ratkaisu, niin $n+1$ olisi pariton alkuluku ja ≥ 7, joten olisi $n = 2m$, $m > 2$. Koska $2 \le n-1$ ja $m \le n-1$, niin $n = 2m$ on luvun $(n-1)!$ tekijä. Näin ollen $n!$ olisi jaollinen luvulla n^2. Siis myös $(n+1)^k - 1 = n^k + kn^{k-1} + \cdots + \frac{k(k-1)}{2}n^2 + kn$ olisi jaollinen n^2:lla. Mutta silloin k olisi jaollinen n:llä ja siis $k \ge n$. Tästä syntyisi ristiriita $n! = (n+1)^k - 1 > n^k \ge n^n > n!$.

5. *Pelaajat Aino ja Eino valitsevat vuorotellen eri lukuja joukosta* $\{0,\, \ldots,\, n\}$*, missä* $n \in \mathbb{N}$ *on ennalta kiinnitetty luku. Peli päättyy, kun jommankumman pelaajan luvuista voi valita neljä, jotka sopivassa järjestyksessä muodostavat aritmeettisen jonon. Pelin voittaa pelaaja, jonka luvuista tällaisen jonon voi muodostaa. Osoita, että on olemassa sellainen* n*, että aloittajalla on voittostrategia. Etsi mahdollisimman pieni tällainen* n*.*

Ratkaisu. Oletetaan, että Aino aloittaa pelin. Osoitetaan, että Ainolla on voittostrategia, kun $n = 14$. Olkoot Ainon valitsemat luvut a_1, a_2, …, ja Einon valitsemat luvut b_1, b_2, …. Olkoon $a_1 = 7$. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $b_1 > 7$. Tarkastellaan eri mahdollisuuksia.

1. Olkoon $b_1 = 8$. Aino valitsee $a_2 = 5$. Einon on valittava $b_2 = 3$ tai $b_2 = 9$, sillä muuten Aino valitsee $a_3 = 3$ jos 1 on vapaa tai $a_3 = 9$, jos 11 on vapaa, ja toinen näistä on vapaa.
   1.1. Oletetaan, että $b_3 = 3$. Silloin $a_3 = 4$ ja välttämättä $b_3 = 6$. Kun $a_4 = 10$, niin valinnat $a_5 = 13$ tai $a_5 = 1$ johtavat Ainon voittoon; b_4 voi estää vain toisen näistä.
   1.2. Olkoon $b_2 = 9$. Jäleen $a_3 = 4$ ja välttämättä $b_3 = 6$. Nyt $a_4 = 10$ johtaa Ainon voittoon.
2. Olkoon $b_1 = 9$. Nyt $a_2 = 4$. Kuten edellä, päätellään, että $b_2 = 1$, $b_2 = 10$ tai $b_2 = 13$.
   2.1. If $b_2 = 1$, niin $a_3 = 6$. On oltava $b_3 = 5$. Olkoon sitten $a_4 = 8$. a_5:ksi on jälleen kaksi mahdollisuutta, 2 ja 10.
   2.2. Olkoon $b_2 = 10$. Silloin $a_3 = 6$ ja $b_3 = 5$. Valinta $a_4 = 2$ johtaa taas Ainon voittoon joko valinnalla $a_5 = 0$ tai $a_5 = 8$.
   2.3. Olkoon sitten $b_2 = 13$. Jos $a_3 = 6$, Einon on valittava $b_3 = 5$. Nyt $a_4 = 2$ antaa kaksi retittiä voittoon joko $a_5 = 0$ tai $a_5 = 8$ -valintojen kautta.
3. Seuraava mahdollisuus on $b_1 = 10$. Nyt $a_2 = 5$ ja joko $b_2 = 3$ tai $b_2 = 9$. Molemmissa tapauksissa $a_3 = 6$ antaa mahdollisuuden $a_4 = 4$ ja $a_4 = 8$.
4. Jos $b_1 = 11$, niin $a_2 = 4$ ja $b_2 = 1$ tai $b_2 = 10$.
   4.1. Jos $b_2 = 1$, niin $a_3 = 6$ ja $b_3 = 5$. Kun $a_4 = 8$, niin a_5 voi olla joko 2 tai 10.
   4.2. Jos $b_2 = 10$, Aino valitsee $a_3 = 5$. Silloin $b_3 = 6$, $a_4 = 3$, $b_4 = 2$, $a_5 = 9$.
5. Jos $b_1 \geq 12$, $a_2 = 9$, $b_2 = 5$ tai $b_2 = 11$, $a_3 = 8$ ja a_4 on joko 6 or 10.

Luettelo kattaa kaikki tapaukset, joten Ainolla on aina voittostrategia, kun $n = 14$. Se, että 14 on pienin mahdollinen n, on varmistettu tietokoneohjelmalla. – Otamme mielellämme vastaan asialle ilman koneapua tehtyjä todistuksia.