Lukion matematiikkakilpailu 8.2.2002

Ratkaisuehdotelmia

1. Kaikilla reaaliluvuilla x on $f(\sin x) = f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(17\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - 17x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 17x\right) = \sin(17x)$.

2. Yhtälö

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

on yhtäpitävä yhtälön

$$(bc + ca + ab)(a + b + c) = abc$$

ja edelleen yhtälöiden

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc = 0$$

ja

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0$$

kanssa. Kun $(a,\, b,\, c)$ korvataan $(a^n,\, b^n,\, c^n)$:llä, nähdään, että yhtälö

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

on yhtäpitävä yhtälön

$$(a^n + b^n)(b^n + c^n)(c^n + a^n) = 0 \tag{1}$$

kanssa. Mutta koska n on pariton kokonaisluku, (1):n vasemman puolen tekijä on $(a + b)(b + c)(c + a)$. Koska tämä tekijä on $= 0$, yhtälö (1) on tosi.

3. Jos parien joukossa on ainakin yksi tyttöpari, on pareissa välttämättä myös ainakin yksi poikapari (n poikaa ei saa enintään $n - 2$:sta tytöstä paria itselleen). Tapahtuma "ainakin yksi tyttöpari" on siis tapahtuman "pelkkiä tyttö–poika-pareja" komplementti. Numeroidaan parit. Todennäköisyys, että ensimmäinen pari olisi tyttö–poika-pari on

$$\frac{n^2}{\binom{2n}{2}}.$$

Toinen pari on tätä tyyppiä todennäköisyydellä

$$\frac{(n-1)^2}{\binom{n-2}{2}}$$

jne. Todennäköisyys, että kaikki parit olisivat tyttö–poika-pareja on siis

$$\frac{n^2\cdot(n-1)^2\cdots 1^2}{\dfrac{(2n)!}{2!(2n-2)!}\cdot\dfrac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!}\cdots\dfrac{2!}{2!0!}}=\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}=\frac{2^n}{\dbinom{2n}{n}}.$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$1-\frac{2^n}{\dbinom{2n}{n}}.$$

4. Kuvio $\mathcal{K}$ on ympyrän $\mathcal{Y}$ sisäpuolella. Ellei näin olisi, olisi olemassa kaksi suoraa kulmaa, joista toinen olisi kokonaan toisen sisäpuolella ja joista molempien kyljet sivuaisivat $\mathcal{K}$:ta. Olkoon P jokin $\mathcal{K}$:n reunapiste ja O $\mathcal{Y}$:n keskipiste. Leikatkoon OP $\mathcal{K}$:n reunan myös pisteessä Q. Oletetaan, että $OQ < OP$. Piirretään Q:n kautta suora, joka leikkaa $\mathcal{Y}$:n pieteissa A ja B. A:n ja B:n kautta piirretyt AB:tä vastaan kohtisuorat suorat, jotka leikkaavat $\mathcal{Y}$:n pisteissä D ja C, koskettavat $\mathcal{K}$:ta. Mutta näin tekee myös CD. Suorakaide $ABCD$ on $\mathcal{K}$:n ympäri piirretty nelikulmio. Mutta O on $ABCD$:n keskipiste, joten CD on samalla etäisyydellä O:sta kuin AB. Tästä seuraa, että P on suorakaiteen ulkopuolella. Oletus $OQ < OP$ johtaa siis ristiriitaan, samoin $OP < OQ$. Siis O on $\mathcal{K}$:n symmetriakeskus.

5. Määritellään kahden kärjen P ja Q etäisyydeksi $d(P,\,Q)$ luku $k\equiv 1$, missä k on lyhemmällä kaarella $\overset{\frown}{PQ}$ olevien kärkien lukumäärä (päätepisteet mukaan lukien). Osoitetaan, että kärjistä mitkään neljä eivät ole samanväriset. Vastaoletus: $P_l = P_5$, P_2, P_3 ja P_4 ovat samanväriset. Silloin mikään luvuista $d(P_i,\,P_j)$, $1\le i<j\le 4$, ei ole muotoa 2^k. Olkoon $d(P_i,\,P_{j+1}) = a_i$. Silloin $a_1+a_2+a_3+a_4 = 17$ ja jokainen $a_i\ge 3$. Jokainen luvuista a_i on siis enintään $17\equiv 3\cdot 3 = 8$, mutta koska $8 = 2^3$, jokainen $a_i\le 7$. Mikään a_i ei ole 4; koska lukujen keskiarvo on < 5, ainakin jokin niistä on tasan 3. Oletetaan, että $a_1 = 3$. Silloin a_4 ja a_2 eivät ole 5 (koska $d(P_i,\,P_3)\ne 8\ne d(P_2,\,P_4)$. Jos $a_2 = 3$, on $a_3 = 6$ tai $a_3 = 7$. Edellisessä tapauksessa olisi oltava $a_4 = 5$, jälkimmäisessä $a_4 = 4$, mitkä kumpikin ovat poissuljettuja. Jos $a_2 = 6$, on $d(P_3,\,P_1) = 8$, mikä ei ole sallittua. Jos $a_2 = 7$, on $d(P_3,\,P_1) = 7$, mutta 7 ei ole summa joukkoon $\{3,\,5,\,6\}$ kuuluvista luvuista. Jokaiset neljä kärkeä ovat siis eriväriset. Olkoon tarvittavien värien määrä v. Koska millään värillä ei voi värittää kuin enintään 3 kärkeä, on $3v\ge 17$ eli $v\ge 6$. Väritys onnistuu kuudella värillä: jos kärjet ovat Q_i, $i = 1,\ldots,17$, niin väritetään kärjet Q_i, Q_{i+6} ja Q_{i+12} värillä V_i, $i = 1,\,\ldots,\,5$, ja pisteet Q_6 ja Q_{12} värillä V_6. Samanväristen kärkien etäisyys on tässä värityksessä joko 6 tai 5 eli sellaisella kaarella, jonka päätepisteet ovat samanväriset, on joko 7 tai 6 kärkeä.