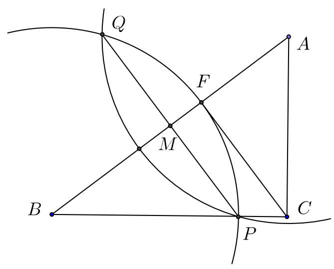
Lukion matematiikkakilpailu 2.2.2001

Ratkaisuehdotuksia

1. *Suorakulmaisessa kolmiossa ABC hypotenuusaa AB vastaan piirretty korkeusjana on CF. F:n kautta kulkeva B-keskinen ympyrä ja samansäteinen A-keskinen ympyrä leikkaavat toisensa sivun CB pisteessä. Määritä suhde $FB : BC$.*



Ratkaisu. . Olkoon tehtävän A- ja B-keskisten ympyröiden BC:llä sijaitseva leikkauspiste P ja olkoon Q ympyröiden toinen leikkauspiste. Silloin QP leikkaa ympyröiden keskipisteiden välisen janan AB tämän keskipisteessä M ja $QP \perp AB$. Jos $BP = BF = r$, $BC = a$ ja $AB = c$, niin yhdenmuotoisista kolmioista BPM ja BCF saadaan $\dfrac{BM}{BP} = \dfrac{BF}{BC}$ eli $r^2 = \dfrac{ac}{2}$. Toisaalta yhdenmuiotoisista kolmioista BCF ja BAC saadaan $\dfrac{BF}{BC} = \dfrac{BC}{BA}$ eli $r = \dfrac{a^2}{c}$. Siis $\dfrac{ac}{2} = \dfrac{a^4}{c^2}$, josta ratkaistaan $\dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Mutta $\dfrac{FB}{BC} = \dfrac{r}{a} = \dfrac{a}{c}$, joten tehtävä on ratkaistu.

2. *Toisiaan leikkaamattomien käyrien yhtälöt ovat $y = ax^2 + bx + c$ ja $y = dx^2 + ex + f$, missä $ad < 0$. Todista, että on olemassa tason suora, joka ei leikkaa kumpaakaan näistä käyristä.*

Ratkaisu. Väite on uskottava, jos ajattelee kahta vastakkaisiin suuntiin aukeavaa toisaan leikkaamatonta paraabelia ja toisen paraabelin tangentteja. Tällaista tangenttia voi kiertää pitkin paraabelia sellaiseen asentoon, että se ei leikkaa toista paraabelia. Tällaisen tangentin suuntaiset, sen lähellä olevat suorat eivät silloin leikkaa kumpaakaan paraabelia.

Todistetaan väite kuitenkin täsmällisesti laskemalla. Koska paraabelit eivät leikkaa, yhtälöllä $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$ ei ole ratkaisuja. Yhtälön $(a-d)x^2 + (b-e)x + c - f = 0$ diskrimantti $(b-e)^2 - 4(a-d)(c-f)$ on siis negatiivinen. Paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ pisteeseen $(h,\, k)$ piirretyn tangentin yhtälö on $y - k = (2ah + b)(x - h)$ eli $y = ah^2 + bh + c + (2ah+b)(x-h) = (2ah+b)x - ah^2 + c$. Selvitetään, voiko h:n valita niin, että tangentti ei leikkaa paraabelia $y = dx^2 + ex + f$. Jotta tangentti ja suora eivät leikkaisi, yhtälöllä $(2ah+b)x - ah^2 + c = dx^2 + ex + f$ eli $dx^2 + (e - 2ah - b)x + f + ah^2 - c = 0$ ei saa olla ratkaisua. On siis voitava valita sellainen h, että $(e - 2ah - b)^2 - 4d(f + ah^2 - c) < 0$. Tämän epäyhtälön vasen puoli on h:n toisen asteen polynomi $(4a^2 - 4ad)h^2 - 4a(e-b)h + (e-b)^2 - 4d(f-c)$. Lasketaan vielä tämän polynomin diskriminantti. Se on $16a^2(e-b)^2 - 16(a^2 - ad)((e-b)^2 - 4d(f-c)) = 16ad(e-b)^2 + 64(a^2 - ad)d(f-c) = 16ad((e-b)^2 - 4(a-d)(c-f)$. Koska $ad < 0$ ja, niin kuin alussa todettiin, $(e-b)^2 - 4(a-d)(c-f) < 0$ Diskriminantti on positiivinen. Yhtälöllä $(4a^2 - 4ad)h^2 - 4a(e-b)h + (e-b)^2 - 4d(f-c) = 0$ on siis kaksi juurta h_1 ja h_2, ja kun $h_1 < h < h_2$, niin paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ tangentti $y = (2ah + b)x - ah^2 + c$ ei leikkaa paraabelia $y = dx^2 + ex + f$. Riittävän lähellä tätä tangettia olevat sen suuntaiset suorat eivät leikkaa kumpaakaan tehtävän kahdesta paraabelista.

3. *Luvut a, b ja c ovat positiivisia kokonaislukuja ja* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. *Osoita, että*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{41}{42}.$$

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $a \le b \le c$. Selvästi $a \ge 2$. Jos $a = 2$, niin $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$. Silloin $b \ge 3$. Jos $b = 3$, niin $\frac{1}{c} < \frac{1}{6}$, joten $c \ge 7$. Silloin

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}.$$

Jos $b \ge \frac{1}{4}$, niin $\frac{1}{c} < \frac{1}{4}$, joten $c \ge 5$. Tässä tapauksessa

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < \frac{41}{42}.$$

Olkoon sitten $a = 3$. Jos myös $b = 3$, on oltava $\frac{1}{c} < \frac{1}{3}$ eli $c \ge 4$. Silloin

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{2}{3} + 14 = \frac{11}{12} < \frac{41}{42}.$$

Jos $b \ge 4$, on

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} < \frac{41}{42}.$$

Jos viimein $a \ge 4$, on

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{3}{4} < \frac{41}{42}.$$

4. *Jokaviikkoisessa jokeriarvonnassa arvotaan seitsemän numeron jono. Jokainen numero voi olla mikä tahansa luvuista* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *Kuinka suuri on todennäköisyys, että jokeriarvonnan jonossa esiintyy korkeintaan viittä numeroa?*

Ratkaisu. Erilaisia jokeririvejä on 10^7 kappaletta. Lasketaan, kuinka monessa on seitsemän tai kuusi eri numeroa. Rivejä, joissa on seitsemän eri numeroa, on $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ kappaletta. (Ensimmäiselle numerolle on kymmenen vaihtoehtoa; kun ensimmäinen numero on kiinnitetty, toiselle on yhdeksän vaihtoehtoa jne.). Jos rivissä on kuusi eri numeroa, siinä esiintyy jokin numero kahdesti. Kaksoisnumeron paikalle on $\binom{7}{2} = 21$ eri vaihtoehtoa. Rivejä, joissa on tasan yksi kaksoisnumero, on siten $21 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ kappaletta. (Kakoisnumero voidaan valita kymmenestä vaihtoehdosta, lopuista viidestä paikasta ensimmäinen voidaan täyttää jollakin yhdeksästä eri numerosta jne.) Jokeririvejä, joissa on ainakin kuusi eri numeroa on siis yhteensä $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 + 21)$ kappaletta, ja todennäköisyys, että arvottu rivi olisi tällainen, on

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 + 21)}{10^7} = \frac{9 \cdot 6 \cdot 7}{1000} = \frac{189}{500}.$$

Tehtävässä kysytty todennäköisyys on siis

$$1 - \frac{189}{500} = \frac{311}{500} = 0{,}622.$$

5. *Määritä sellaiset $n \in \mathbb{N}$, että $n^2 + 2$ on luvun $2 + 2001n$ tekijä.*

Ratkaisu. $n^2 + 2 = 2 + 2001n$, kun $n = 0$ tai $n = 2001$. Ainakin 0 ja 2001 ovat tehtävän ratkaisuja, ja kaikki ratkaisut on ≤ 2001. Jos n ei ole jaollinen kolmella, siis $n = 3k \pm 1$, niin $n^2+2 = 9k^2 \pm 6k+1+2$ on jaollinen kolmella, mutta $2+2001n = 2+3\cdot 667n$ ei ole. Tehtävän ehdon toteuttava luku on siis aina muotoa $n = 3k$, ja on oltava $2 + 9 \cdot 667k = q(9k^2 + 2)$ eli $9(667k - qk^2) = 2(q - 1)$ jollain luonnollisella luvulla q. Luvun $q - 1$ on oltava jaollinen 9:llä eli $q = 9j + 1$ jollain j. Siis $667k - (9j + 1)k^2 = 2j$ eli $k(667 - k) = (2 + 9k^2)j$. Tarkastellaan erikseen tapaukset k parillinen, $k = 2m$, ja k pariton, $k = 2m + 1$. Edellisessä tapauksessa on oltava $m(667 - 2m) = (1 + 18m^2)j$. Koska luvuilla m ja $1 + 18m^2$ ei ole yhteisiä tekijöitä, $667 - 2m$ on jaollinen $1 + 18m^2$:lla. Silloin $1 + 18m^2 \leq 667 - 2m$ eli $18m^2 < 667$, $2m^2 \leq 74$, $m \leq 6$. Käymällä läpi luvut $m = 1, \ldots, 6$ huomataan, että $665 = 667 - 2 \cdot 1$ on jaollinen $1 + 18 \cdot 1^2$:lla, mutta muut m:t eivät kelpaa. Löytyi siis ratkaisu $n = 3(2 \cdot 1) = 6$. Jos $k = 2m+1$, luvuilla k ja $9k^2+2$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Siis luvun $667 - 2m - 1 = 2(333 - m)$ on oltava jaollinen parittomalla luvulla $9(2m+1)^2+2$. On oltava $9(2m+1)^2+2 \leq 333 - m$. Tästä nähdään helposti, että $2m + 1 \leq 7$ ja $m = 1$, 2 tai 3. $664 = 666 - 2 \cdot 1$ on jaollinen luvulla $9(2 \cdot 1 + 1)^2 + 2 = 83$, mutta $m = 2$ ja $m = 3$ eivät ole mahdollisia. Löytyi ratkaisu $n = 3(2 \cdot 1 + 1) = 9$. Tehtävässä kysyttyja lukuja on siis kaikkiaan neljä $n = 0$, $n = 6$, $n = 9$ ja $n = 2001$.