Lukion matematiikkakilpailu
Loppukilpailu 28. tammikuuta 2000
Ratkaisuhahmotelmia

1. Olkoot $P \in BD$ ja $Q \in CE$ ympyröiden keskipisteet. Koska ympyröiden säteet PA ja QA ovat molemmat kohtisuorassa ympyröiden pisteen A kautta kulkevaa yhteistä tangenttia vastaan, A on janalla PQ. Koska BD ja CE ovat kohtisuorassa ympyröiden yhteistä tangenttia vastaan, $BD \| CE$. Siis $\angle DPA = \angle CQA$. Kolmiot DPA ja CQA ovat tasakylkisiä ja niillä on sama huippukulma. Siis myös kantakulmat $\angle PAD$ ja $\angle QAC$ ovat yhtä suuret. Siis DAC on suora.

2. Binomikaavan perusteella

$$(3+\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (\sqrt{5})^{n-k} = a + b\sqrt{5}$$

, missä a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja. Lisäksi

$$(3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} (\sqrt{5})^{n-k} = a - b\sqrt{5}.$$

(Binomikehitelmä tuottaa $\sqrt{5}$-termejä parittomilla potensseilla.) Siis $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2a$. Mutta koska $2 < \sqrt{5} < 3$, on $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$, joten $2a-1 < (3+\sqrt{5})^n < 2a$, ja luvun $(3+\sqrt{5})^n$ kokonaisosa on $2a-1$ eli pariton luku.

3. Kun $n = 1$, $n! = 1 = \sqrt{1^1} = \sqrt{n^n}$ ja kun $n = 2$, $n! = 2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{n^n}$. Olkoon sitten $n \geq 3$. Nyt

$$(n!)^2 = (1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n) \cdot (1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n) = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdots ((n-1) \cdot 2) \cdot (n \cdot 1).$$

Koska $k(n+1-k) = kn + k - k^2 = n + kn - n + k - k^2 = n + (n-k)(k-1) \geq n$ kaikilla $1 \leq k \leq n$ ja $> n$ kaikilla $1 < k < n$, ovat edellisen tulon kaikki n tekijää $\geq n$ ja tekijöistä $n-2 > 1$ kappaletta on $> n$. Tulo on siis $> n^n$. Siis $n! > \sqrt{n^n}$ täsmälleen silloin, kun $n > 2$.

4. Oletusten mukaan jokaiset kolme annetuista seitsemästä pisteestä ovat kolmion kärkipisteitä. Kolmioita on siis yhtä monta kuin on tapoja valita seitsemästä pisteestä 3, eli kaikkiaan $\binom{7}{3} = 35$ kpl. Jos kolmion sivut eivät ole samanväriset, kutsumme kolmiota *kirjavaksi*. Kirjavan kolmion kärjistä on tasan kaksi sellaisia, joista lähtevät sivut ovat eriväriset. Kutsumme tällaista kärkeä samoin kirjavaksi. Koska jokaisesta kärjestä lähtee kuusi janaa, kärki voi olla kirjava $s(6-s)$:ssä kolmiossa, missä s on kärjestä lähtevien sinisten sivujen määrä. Selvästi lausekkeen $s(6-s)$ suurin arvo on 9. Täten kaikkien kirjavien kolmioiden kirjavien kärkien määrä on enintään $7 \cdot 9 = 63$ ja kirjavien kolmioiden määrä siis enintään $\left[\frac{1}{2} \cdot 63\right] = 31$. Yksivärisiä kolmioita on ainakin $35 - 31 = 4$ kappaletta. – On helppo konstruoida esimerkki, jossa yksivärisiä kolmioita on tasan neljä. Tätä ei kuitenkaan tehtävässä kysytty.

5. Todennäköisyys, että peli ei päättyisi kummankaan pelaajan voittoon, on 0. Jos heittovuorossa olevan pelaajan vastustajan pelinappula on heittäjän kiertosuuntaan katsoen yhden tai kahden askeleen päässä heittäjän nappulasta, peli päättyy todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ vuorossa olevan heittoon, jos taas vastustajan nappula on kolmen askeleen päässä, peli ei pääty vuorossa olevan heittoon, mutta seuraavalla vastustajan vuorolla pelin päättymisen todennäköisyys on taas $\frac{1}{2}$. Todennäköisyys, että peli ei ole päättynyt kahden peräkkäisen vuoron aikana on siis pienempi kuin $\frac{1}{2}$, ja todennäköisyys, että peli ei olisi päättynyt $2n$:n vuoron aikana on alle $\frac{1}{2^n}$ ja siis $\to 0$, kun $n \to \infty$. Olkoon nyt p_j, $j = 1, 2, 3$, todennäköisyys, että heittovuorossa oleva pelaaja voittaa pelin, kun vastustajan nappula on heittäjän kiertosuunnan mukaisesti j:n askeleen päässä heittäjän nappulasta. Tällöin

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - p_3),$$

sillä heittäjä voittaa pelin, jos hän saa klaavan, mutta jos hän saa kruunan, hänen nappulansa menee asemaan, joka on kolmen askeleen päässä vastustajan nappulasta tämän kiertosuuntaan katsottuna, ja vuorossa oleva heittäjä voittaa pelin täsmälleen silloin, kun vastustaja ei voita. Jos nappuloiden etäisyys on 2 askelta, heittäjä voittaa saadessaan kruunan, mutta klaava vie hänen nappulansa asemaan, joka on yhden askeleen päässä vastustajan nappulasta tämän kiertosuunnassa. Samoin kuin edellä, päätellään, että

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - p_1).$$

Jos nappuloiden etäisyys on 3 askelta, kruuna vie asemaan, joka on yhden ja klaava asemaan, joka on kahden askeleen päässä vastustajan nappulasta tämän kiertosuunnassa. siis

$$p_3 = \frac{1}{2}(1 - p_1) + \frac{1}{2}(1 - p_2).$$

Edellä johdettujen kolmen yhtälön muodostaman ryhmän ratkaisu on

$$p_1 = \frac{6}{7}, \quad p_2 = \frac{4}{7}, \quad p_3 = \frac{2}{7}.$$

Koska aloittaja Irjan nappula oli kahden askeleen päässä Valtterin nappulasta, vastaus on $p_2 = \frac{4}{7}$.