Lukion matematiikkakilpailu
Loppukilpailu 22. tammikuuta 1999

1. Osoita, että yhtälöllä

$$x^3 + 2y^2 + 4z = n$$

on kokonaislukuratkaisu $(x,\, y,\, z)$ kaikilla kokonaisluvuilla n.

2. Oletetaan, että positiiviset luvut $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ muodostavat aritmeettisen lukujonon; siis $a_{k+1} - a_k = d$ kaikilla $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$. Osoita, että

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

3. Selvitä, montako alkulukua on jonossa

$$101,\ 10101,\ 1010101\ \ldots$$

4. Kolmella 1-säteisellä ympyrällä on yhteinen piste O. Ympyrät leikkaavat lisäksi toisensa pareittain pisteissä A, B ja C. Osoita, pisteet A, B ja C ovat saman 1-säteisen ympyrän kehällä.

5. Tavallista dominolaattaa voidaan pitää lukuparina $(k,\, m)$, missä luvut k ja m voivat saada arvoja 0, 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Parit $(k,\, m)$ ja $(m,\, k)$ määrittelevät saman laatan. Erityisesti pari $(k,\, k)$ määrittelee dominolaatan. Sanomme, että kaksi dominolaattaa sopii yhteen, jos niissä esiintyy sama luku. *Yleistetyissä n-dominolaatoissa* m ja k voivat saada arvoja $0,\, 1,\, \ldots,\, n$. Kuinka suuri on todennäköisyys, että kaksi satunnaisesti valittua n-dominolaattaa sopii yhteen?

Aikaa 3 tuntia

Kirjoita jokainen ratkaisu omalle paperilleen.
Muista kirjoittaa nimesi jokaiseen ratkaisupaperiin!
Laskimien ja taulukkokirjojen käyttö on kielletty.