Lukion matematiikkakilpailu 22.1.1999

Ratkaisuehdotuksia

1. *Osoita, että yhtälollä*

$$x^3 + 2y^2 + 4z = n$$

on kokonaislukuratkaisu (x, y, z) *kaikilla kokonaisluvuilla* n.

Ratkaisu. Luku n on jotain seraavista neljästä muodosta: $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$ tai $n = 4k+3$. Jos $n = 4k$, yhtälön ratkaisu on esimerkiksi $(x, y, z) = (0, 0, k)$. Jos $n = 4k+1$, eräs ratkaisu on $(1, 0, k)$. Jos $n = 4k+2$, ratkaisu voi olla $(0, 1, k)$. Jos $n = 4k+3 = 4(k+1)-1$, ratkaisu voi olla $(-1, 0, k+1)$.

2. *Oletetaan, että positiiviset luvut* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *muodostavat aritmeettisen lukujonon; siis* $a_{k+1} - a_k = d$ *kaikilla* $k = 1, 2, \ldots, n-1$. *Osoita, että*

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}. \tag{1}$$

Ratkaisu. Aritmeettisen jonon ominaisuuksien perusteella $a_n = a_1 + (n-1)d$ ja $a_{n+1} = a_1 + nd$. Todistetaan väite induktiolla. Väitteen totuus on ilmeinen, kun $n = 2$. Oletetaan sitten, että (1) on voimassa.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} + \frac{1}{a_na_{n+1}} &= \frac{n-1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{a_n}\left(\frac{n-1}{a_1} + \frac{1}{a_1+nd}\right)\\ &= \frac{1}{a_n}\cdot\frac{(n-1)(a_1+nd)+a_1}{a_1a_{n+1}} = \frac{n}{a_n}\cdot\frac{a_1+(n-1)d}{a_1a_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.\end{aligned}$$

(1) on siis tosi, kun n korvataan $(n+1)$:llä. Induktioaskel on otettu ja väite todistettu.

3. *Selvitä, montako alkulukua on jonossa*

$$101,\ 10101,\ 1010101,\ \ldots$$

.

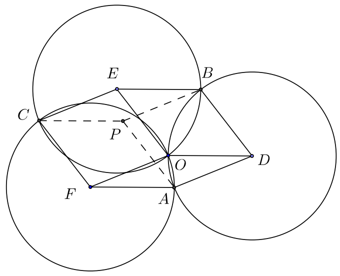
Ratkaisu. 101 on alkuluku. Osoitetaan, että kaikki muut jonon luvut ovat yhdistettyjä lukuja. Jos luvussa on parillinen määrä ykkösiä, se on ilmeisesti jaollinen luvulla 101, eikä siis alkuluku. Luvut ovat muotoa $a_k = 100^0 + 100^1 + \cdots + 100^k$, $k > 1$, kun $k+1$ on luvussa olevien ykkösten lukumäärä. Nyt

$$100^0 + 100^1 + \cdots + 100^k = \frac{100^{k+1}-1}{99}.$$

Kun k on pariton ja ≥ 3, niin $k+1 = 2p$, $p \geq 2$, ja $100^{2p} - 1 = (100^p+1)(100^p-1)$. Koska $p > 1$, molemmat tulon tekijät ovat suurempia kuin 99, joten a_k jakautuu ainakin kahdeksi ykköstä suuremmaksi tekijäksi.

4. *Kolmella 1-säteisellä ympyrällä on yhteinen piste O. Ympyrät leikkaavat lisäksi toisensa pareittain pisteissä A, B ja C. Osoita, pisteet A, B ja C ovat saman 1-säteisen ympyrän kehällä.*

Ratkaisu. Olkoot ympyröiden keskipisteet D, E, F. Olkoon B D- ja E-keskisten ympyröiden leikkauspiste, C E- ja F-keskisten ja A F- ja A-keskisten ympyröiden leikkauspiste. Silloin nelikulmiot $ADOF$, $BEOD$, $CFOE$ ovat neljäkkäitä, ja niiden sivujen pituus on 1. Täydennetään vielä ADB neljäkkääksi $ADBP$. Silloin $PA = PB = 1$. Mutta neljäkäsketua seuraamalla nähdään, että PB on yhdensuuntainen ja yhtä pitkä kuin AD, FO, CE. Tästä seura, että $PBEC$ on suunnikas. Koska $EB = 1$, on $PC = 1$. Pisteet A, B, C ovat siis kaikki P-keskisellä 1-säteisellä ympyrällä.



5. *Tavallista dominolaattaa voidaan pitää lukuparina (k, m), missä luvut k ja m voivat saada arvoja* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *ja* 6. *Parit (k, m) ja (m, k) määrittelevät saman laatan. Erityisesti pari (k, k) määrittelee dominolaatan. Sanomme, että kaksi dominolaattaa sopii yhteen, jos niissä esiintyy sama luku. Yleistetyissä n-dominolaatoissa m ja k voivat saada arvoja* $0, 1, \ldots, n$. *Kuinka suuri on todennäköisyys, että kaksi satunnaisesti valittua n-dominolaattaa sopii yhteen?*

Ratkaisu. Tehtävän sanamuoto antaa mahdollisuuksia hiukan eri tulkintoihin. Teksti ei kerro, mistä joukosta ”satunnainen valinta tapahtuu”: onko esimerkiksi mahdollista, että kaksi satunnaisesti valittua laattaa olisivat samat. Ratkaistaan tehtävä olettaen, että jokaista kuvailtua laattaa on tasan yksi kappale. Koska (k, m) ja (m, k) ovat sama laatta, voidaan olettaa, eyyä $m \le k$. Laattoja, joissa $m < k$, on silloin $\binom{n}{2}$ ja laattoja, joissa $m = k$ on n kappaletta; laattoja on yhteensä

$$\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

kappaletta. Laatta, joka on muotoa (m, m) on yhteensopiva jokaien laatan (s, m), $s < m$, ja (m, r), $m < r \le n$ kanssa. Edellisiä on $m-1$, jälkimmäisiä $n-m$ kappaletta. Laattoja, jotka ovat yhteensopivia laatan (m, m) kanssa on siis $n-1$ kappaletta. Laatta, joka on muotoa (m, k), $m < k$, on yhteensopiva jokaisen laatan (s, k), $s \le k$, $s \ne m$ kanssa, jokaisen laatan (m, r), $m \le r \le n$, $r \ne k$, kanssa, jokaisen laatan (s, m), $s \le m$, kanssa, ja jokaisen laatan (k, r), $k \le r \le n$ kanssa. Ensimmäisen lajin laattoja on $k-1$ kappaletta, toisen lajin $n-(m-1)-1 = n-m$ kappaletta, kolmannen lajin m kappaletta ja neljännen lajin $n-(k-1)$ kappaletta. Tässä laatat (k, k) ja (m, m) on kuitenkin laskettu kahdesti. Laatta (m, k) on siis yhteensopiva kaikkiaan $k-1+n-m+m+n-k+1-2 = 2(n-1)$ laatan kanssa. Yhdistetyn todennäköisyyden ominaisuuksien perusteella kysytty todennäköisyys on

$$\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n-1}{\frac{n(n+1)}{2}-1} + \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{2(n-1)}{\frac{n(n+1)}{2}-1}.$$

(Huomattakoon, että kun yksi umpimähkäinen laatta on valittu, toisella on yksi mahdollisuus vähemmän. Sievennysten jälkeen todennäköisyydeksi saadaan

$$\frac{4n(n-1)}{(n+1)(n(n+1)-2)}.$$

Mahdollinen oletus olisi myös esimerkiksi se, että laattoja on äärettömän paljon ja kaikkkien esiintymistodennäköisyys on sama. Silloin on mahdollista, että kaksi umpimähkäisesti valittua laattaa ovat samat ja itse kunkin laattatyypin esiintymistodennäköisyys on $\frac{2}{n(n+1)}$. Tässä tapauksessa kysytty todennäköisyys olisi

$$\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{2n-1}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

eli sievennettynä

$$\frac{2(2n^2-n+1)}{n(n+1)^2}.$$