Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävien ratkaisuja 1975–94

75.1. Todistettava väite on sama kuin
$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
Merkitään $S_0 = T_0 = 0$ ja
$$S_k = \sum_{i=1}^{k} y_i, \quad T_k = \sum_{i=1}^{k} z_i.$$
Koska luvut y_i ovat laskevassa suuruusjärjestyksessä, mutta luvut z_i mahdollisesti muussa järjestyksessä, on $S_k \ge T_k$ kaikilla k, mutta $S_n = T_n$. Koska $x_i - x_{i+1} \ge 0$, saadaan
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i (S_i - S_{i-1}) = x_n S_n + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+i}) S_i \\ &\ge x_n T_n + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) T_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (T_i - T_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i.\end{aligned}$$

75.2. Tarkastellaan jonon lukujen jakojäännöksiä modulo a_1. Jokin jakojäännös, esimerkiksi r, $0 \le r < a_1$, esiintyy äärettömän monta kertaa. Olkoot tämän jakojäännöksen antavat eri luvut $a_{k_i} = q_i a_1 + r$, $i = 1, 2, \ldots$. Silloin $a_{k_1} \ne a_1$, ja kun $i > 1$ on $a_{k_i} = (q_i - q_1) a_1 + q_i a_1 + r = x a_1 + y a_{k_1}$, missä $x = q_i - q_1 > 0$ ja $y = 1$.

75.3. Valitaan tason suunnistus niin, että vektorien $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ välinen kulma on positiivinen. Olkoot f ja g tason kierrot $45°$ vastapäivään ja myötäpäivään. Väitös voidaan kirjoittaa muotoon $f(\overrightarrow{RP}) = g(\overrightarrow{RQ})$. Piirretään apukuvioksi ABC:n ulkopuolelle tasasivuinen kolmio BAS. Tehtävän kulmaehdoista nähdään, että kolmiot SBR, BPC, ACQ ja ASR ovat yhdenmuotoiset. Lisäksi nähdään, että $f(\overrightarrow{RB}) = a\overrightarrow{SB}$, $f(\overrightarrow{BP}) = b\overrightarrow{BC}$, $g(\overrightarrow{RA}) = c\overrightarrow{SA}$ ja $g(\overrightarrow{AQ}) = d\overrightarrow{AC}$ joillakin positiivisilla luvuilla a, b, c ja d. Mainitusta yhdenmuotoisuudesta ja kolmioiden SBR ja ASR yhtenevyydestä seuraa, että $a = b = c = d$. Mutta koska kierrot f ja g ovat lineaarisia kuvauksia, on
$$f(\overrightarrow{RP}) = f(\overrightarrow{RB}) + f(\overrightarrow{BP}) = a\overrightarrow{SB} + a\overrightarrow{BC} = a\overrightarrow{SC},$$
$$g(\overrightarrow{RQ}) = g(\overrightarrow{RA}) + g(\overrightarrow{AQ}) = a\overrightarrow{SA} + a\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{SC}.$$

75.4. Jos $f(x)$ on luvun x numeroiden summa, niin tunnetusti $f(x) \equiv x \bmod 9$. Siis
$$f(B) \equiv B = f(A) \equiv A = f\left(4444^{4444}\right) \equiv 4444^{4444} \bmod 9.$$
Mutta modulo 9 on $4444 \equiv 7$, $7^2 \equiv 4$ ja $7^3 \equiv 1$; koska $4444 \equiv 1 \bmod 3$, on edelleen $4444^{4444} \equiv 7 \bmod 9$. Arvioidaan vielä luvun $f(B)$ suuruutta: koska $4444^{4444} < 10^{4 \cdot 5000}$, on varmasti $A < 9 \cdot 20\,000 = 180\,000$ ja $B = f(A) < 1 + 5 \cdot 9 = 46$ sekä $f(B) < 4 + 9 = 13$. Ainoa 13:a pienempi positiivinen kokonaisluku, joka on $\equiv 7 \bmod 9$ on 7. Siis $f(B) = 7$.

75.5. Etsitään pisteitä muodossa $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$. Kahden tällaisen pisteen etäisyys on

$$\sqrt{(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)^2} = \sqrt{2 - 2\cos 2(\alpha - \beta)}$$
$$= 2|\sin(\alpha - \beta)| = 2|\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta|.$$

Jos löydetään 1975 eri kulmaa, joiden sekä sini että kosini ovat rationaalisia, niin tehtävä on ratkaistu. Mutta tällainen valinta onnistuu asettamalla esimerkiksi

$$\cos\alpha_k = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \quad \sin\alpha_k = \frac{2k}{k^2 + 1},$$

$k = 1, 2, \ldots, 1975$, $0 < \alpha_k < \dfrac{\pi}{2}$.

75.6. Oletamme, että P on eräs tehtävän ehdot täyttävä polynomi. Asetetaan $Q(x) = P(x, 1 - x)$. Silloin $Q(1) = 1$. Jos tehtävän toiseen ehtoon sijoitetaan $a = x$, $b = y$ ja $c = 1 - x - y$, saadaan

$$Q(x + y) + Q(1 - x) + Q(1 - y) = 0. \tag{1}$$

Kun tässä x:ää pidetään muuttujana ja y:tä vakiona, saadaan derivaattayhtälö

$$Q'(x + y) = Q'(1 - x);$$

erityisesti, kun $x = 0$, saadaan $Q'(y) = Q'(1)$. Tämä on mahdollista vain, jos $Q(y) = my + n$, missä m ja n ovat vakioita. Kun (1):een sijoitetaan $x = y = 0$, saadaan $n = Q(0) = -2Q(1) = -2$, ja $m = Q(1) - n = 3$. Tehtävän homogeenisuusehto antaa

$$P(x, y) = (x + y)^n P\left(\frac{x}{x + y}, 1 - \frac{x}{x + y}\right)$$
$$= (x + y)^n \left(3\frac{x}{x + y} - 2\right) = (x - 2y)(x + y)^{n-1}.$$

– Toisaalta on helppo todentaa, että tällaiset polynomit täyttävät tehtävän ehdot.

76.1. Olkoon etsitty nelikulmio $ABCD$ ja olkoon AC lävistäjä, jonka pituutta x haetaan. Piirretään pisteiden B ja D kautta AC:n suuntaiset suorat l_1 ja l_2. Koska nelikulmion ala on 32, suorien etäisyys on $\dfrac{64}{x}$. Olkoon A' pisteen A peilikuva suoran l_1 suhteen ja C' pisteen C peilikuva suoran l_2 suhteen. Silloin $|A'C'| \le |A'B| + |BD| + |DC'| = |AB| + |BD| + |DC| = 16$, ja yhtäsuuruus vallitsee silloin ja vain silloin, kun A', B, D ja C' ovat samalla suoralla. Mutta $A'C'$ on sellaisen kolmion hypotenuusa, jonka kateetit ovat x ja $\dfrac{128}{x}$. Siis

$$x^2 + \left(\frac{128}{x}\right)^2 \le 256$$

eli

$$\left(x - \frac{128}{x}\right)^2 \le 0.$$

Ainoa positiivinen x, jolle viimeinen epäyhtälö voi toteutua on $x = \sqrt{128}$.

76.2. Jos $|x| > 2$, niin $P_1(x) - x = x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 > 0$ ja $P_1(x) > 2$. Tehdään induktio-oletus: kun $|x| > 2$, niin $P_j(x) > x$ ja $P_j(x) > 2$. Silloin $P_{j+1}(x) = P_1(P_j(x)) > P_j(x)$. Siis $P_{j+1}(x) > x$ ja $P_{j+1}(x) > 2$. Yhtälöllä $P_j(x) = x$ ei siis voi olla ratkaisuja x, joissa $|x| > 2$. Kaikki yhtälön ratkaisut ovat muotoa $x = 2\cos t$ jollain t. Mutta $P_1(2\cos t) = 4\cos^2 t - 2 = 2\cos 2t$ ja siten yleisesti $P_j(2\cos t) = 2\cos(2^j t)$. Yhtälö $P_j(x) = x$ palautuu yhtälöksi $\cos(2^j t) = \cos t$. Tämän yhtälön juuret saadaan kaavoista

$$2^j t = t + 2n\pi, \qquad 2^j t = -t + 2n\pi,$$

eli

$$\begin{aligned} t &= \frac{2n\pi}{2^j - 1}, \quad n = 0, 1, \ldots, 2^{j-1} - 1, \\ t &= \frac{2n\pi}{2^j + 1}, \quad n = 1, 2, \ldots, 2^{j-1}. \end{aligned}$$

Koska polynomin P_j aste on 2^j, tehtävän väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että kaikki saadut juuret $x = 2\cos t$ ovat keskenään eri suuret. Kosinifunktio on aidosti vähenevä välillä $[0, \pi]$, joten riittää, kun osoitetaan, että

$$\frac{2n}{2^j - 1} \neq \frac{2m}{2^j + 1}$$

kun $0 \le n \le 2^{j-1} - 1$ ja $1 \le m \le 2^{j-1}$. Mutta yhtälöstä $\dfrac{2n}{2^j - 1} = \dfrac{2m}{2^j + 1}$ seuraisi $2^j(m - n) = m + n$, mikä on mahdotonta, koska $m + n \le 2^j - 1$.

76.3. Olkoot laatikon sivujen pituudet a_1, a_2 ja a_3, $a_1 \le a_2 \le a_3$. Asetetaan $b_i = \left[\dfrac{a_i}{\sqrt[3]{2}}\right]$. Laatikkoon mahtuu $b_1 b_2 b_3$ kappaletta kuutioita, joiden tilavuus on 2; näiden kuutioiden yhteenlaskettu tilavuus on $2b_1 b_2 b_3$. Jotta kuutioiden tilavuus olisi 40 % laatikon tilavuudesta, on oltava

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3} = 5.$$

Pieniä a:n arvoja vastaavat lukujen $b = \left[\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]$ ja a/b arvot ovat

a:	2	3	4	5	6	7
b:	1	2	3	3	4	5
$\frac{a}{b}$:	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

Jos $a \ge 8$, niin $b \ge 6$ ja

$$\frac{a}{b} < \left(1 + \frac{1}{b}\right)\sqrt[3]{2} \le \frac{7}{6}\sqrt[3]{2} < \frac{3}{2}.$$

Jos $a_1 > 2$, niin $\dfrac{a_i}{b_i} \le \dfrac{5}{3}$, ja
$$\frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3} < 5.$$

Siis $a_1 = 2$. Jos nyt myös $a_2 = 2$, on oltava $\dfrac{a_3}{b_3} = \dfrac{5}{4} < \sqrt[3]{2}$. Tämä on mahdotonta, joten $a_2 \ge 3$. Jos $a_2 = 3$, niin $\dfrac{a_3}{b_3} = \dfrac{5}{3}$, eli $a_3 = 5$. Jos olisi $a_2 = 4$, olisi $\dfrac{a_3}{b_3} = \dfrac{15}{8} > \dfrac{5}{3}$, mikä on mahdotonta. Jos $a_2 = 5$, on oltava $\dfrac{a_3}{b_3} = \dfrac{3}{2}$, eli $a_3 = 6$. Jos olisi $a_2 \ge 6$, olisi $\dfrac{a_2a_3}{b_2b_3} \le \dfrac{9}{4} < \dfrac{5}{2}$, mikä on myös mahdotonta. Mahdolliset särmiön sivujen pituudet ovat siis (2, 3, 5) ja (2, 5, 6).

76.4. Tehtävän lukujen a_1, a_2, ... joukossa ei saa esiintyä lukua 1, koska yhteenlaskettavien tulo suurenee, jos jokin tekijöistä a_i korvataan $(a_i + 1)$:llä. Maksimaalisen tulon antavissa yhteenlaskettavissa ei saa esiintyä lukua $2k$, $k > 2$, koska tällainen yhteenlaskettava voitaisiin korvata k:lla kakkosella; $2k < 2^k$. Yhteenlaskettavissa ei voi myöskään olla lukua $2k + 3$, $k \ge 1$, koska k:n kakkosen ja kolmosen tulo on $> 2k + 3$. Yhteenlaskettava 4 voidaan korvata $(2 + 2)$:lla muuttamatta summaa tai tuloa. Maksimaalinen tulo on siis muotoa 2^r3^s, missä $2r + 3s = 1976$. Siis
$$2^r3^s = 2^r3^{\frac{1976-2r}{3}} = 3^{\frac{1976}{3}}(2\cdot 3^{-\frac{2}{3}})^r.$$

Viimeinen tulon tekijä on ykköstä pienempi, joten tulo maksimoituu, kun r valitaan mahdollisimman pieneksi, ts. $r = 1$. Maksimaalinen tulo on $2 \cdot 3^{658}$.

76.5. Sovelletaan laatikkoperiatetta. Itseisarvoltaan enintään p olevia kokonaislukuja on $2p + 1$ kappaletta ja q:n tällaisen kokonaisluvun jonoja on $(2p + 1)^q = (4p^2 + 4p + 1)^p = (2pq + 2q + 1)^p$ kappaletta. Jos kaikki $|x_i|$:t ovat $\le p$, niin yhtälöiden
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q &= y_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q &= y_2\\ &\vdots\\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q &= y_p \end{aligned}$$

määrittämät luvut y_j ovat kokonaislukuja ja $|y_j| \le pq$. Jonoja $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ on siis enintään $(2pq + 1)^p$ kappaletta. Ainakin kahden eri x_i-jonon, esimerkiksi jonojen $(s_1, s_2, \ldots, s_q)$ ja $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$, on tuotettava sama y_j-jono. Mutta tällöin $x_i = t_i - s_i$ on tehtävän ehdot täyttävä yhtälöryhmän ratkaisu: ainakin yksi x_i on $\ne 0$ ja $|x_i| \le |t_i| + |s_i| \le 2p = q$.

76.6. Merkitään
$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

jolloin $a_0 = 0$, $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$$

ja

$$a_n - 2a_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Osoitetaan induktiolla, että

$$u_n = 2^{a_n} + 2^{-a_n} \tag{1}$$

kaikilla n. Yhtälö (1) on tosi, kun $n = 0$ ja $n = 1$. Oletetaan, että (1) on tosi kaikilla $n \le k$. Silloin

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (2^{a_k} + 2^{-a_k})(2^{2a_{k-1}} + 2^{-2a_{k-1}}) - \frac{5}{2} \\ &= 2^{a_k+2a_{k-1}} + 2^{-(a_k+2a_{k-1})} + 2^{2a_{k-1}-a_k} + 2^{a_k-2a_{k-1}} - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Oikean puolen kolmannen ja neljännen yhteenlaskettavan eksponentit ovat 1 ja -1 tai -1 ja 1, joten

$$u_{k+1} = 2^{a_{k+1}} + 2^{-a_{k+1}} + 2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}.$$

Induktioperiaatteen nojalla $u_n = 2^{a_n} + 2^{-a_n}$ kaikilla n. Koska $a_n \ge 1$, kun $n \ge 1$, $[u_n] = 2^{a_n}$, kuten väitettiin.

77.1. Olkoon O neliön $ABCD$ keskipiste. Voidaan olettaa, että neliön sivu on 1. Kolmio LOK on tasasivuinen suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituus on $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ LK:n (ja symmetrian vuoksi myös LM:N, MN:n ja NK:n) keskipisteen etäisyys O:sta on siten $\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$. Pythagoraan lauseen nojalla myös sivun AK (ja muiden kolmionsivujen) keskipisteen etäisyys O:sta on

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1).$$

Kaikki tutkittavat 12 pistettä ovat samalla O-keskisellä ympyrällä.

Merkitään BK:n keskipistettä X:llä, CM:n keskipistettä Y:llä, KN:n keskipistettä Z:lla ja CL:n keskipistettä T:llä. Koska kolmio BCL on tasasivuinen, kulman LBC puolittaja BK kulkeen T:n kautta. Pisteet X ja Y ovat yhtä etäällä BC:stä, joten $XY \| BC$ ja siis $\angle YXK = \angle YXT = 30°$. Olkoon $\angle XON = \alpha$. Vastapäivään tehty $90°$ kierto O:n ympäri vie X:n T:ksi ja N:n K:ksi. Siten $\angle TOK = \alpha$. Lisäksi $ON \perp YX$, mistä seuraa, että $\angle NOY = \alpha$. Koska kulma NOK on suora, $2\alpha + 60° = 90°$. Siis $\angle XON = 2\alpha = 30°$. Helposti nähdään vielä, että OZ on kulman NOK ja myös kulman YOT puolittaja, mistä seuraa $\angle YOZ = \angle ZOT = 30°$. Symmetrian nojalla kaikki 12 pistettä ovat $30°$:een päässä toisistaan, ja siis säännöllisen 12-kulmion kärjissä.

77.2. Jos jonossa olisi 17 termiä, olisi

$$\begin{aligned} 0 &> (x_1 + x_2 + \ldots + x_7) + (x_2 + x_3 + \ldots + x_8) + \ldots + (x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{17}) \\ &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{11}) + (x_2 + x_3 + \ldots + x_{12}) + \ldots + (x_7 + x_8 + \ldots + x_{17}) > 0. \end{aligned}$$

Jonossa ei voi olla 17:ää termiä. Termejä voi olla 16. Sen osoittaa jono 5, 5, −13, 5, 5, 5, −13, 5, 5, −13, 5, 5, 5, −13, 5, 5.

77.3. Jos $n = 2$, luku $9 \cdot 25 = 15^2$ on vaadittua muotoa: luvuilla 9, 15 ja 25 on kullakin vain yksi tekijöihinjakotapa.

Oletetaan, että $n > 2$. Todetaan, että $(n-1)^2 \in V_n$, $(2n-1)^2 \in V_n$ ja $(n-1)(2n-1) \in V_n$. Koska V_n:n pienin luku on $1+n$, luku $(n-1)^2$ on varmasti jaoton V_n:ssä. Jos $(2n-1)^2 = pq$, p, $q \in V_n$, $p \le q$, niin $p = 1 + n$ ja joko $q = 1 + 2n$ tai $q = 1 + 3n$. Edellinen vaihtoehto johtaisi ristiriitaan $2n = 7$ ja jälkimmäinen toteutuu vain, kun $n = 8$. Siis $(2n-1)^2$ on jaoton V_n:ssä, kun $n \ne 8$. Jos $(n-1)(2n-1) = pq$, p, $q \in V_n$, on oltava $p = q = n + 1$. Yhtälö toteutuu vain, kun $n = 5$. Kun $n \ne 5$, niin $(n-1)(2n-1)$ on jaoton V_n:ssä. Kun siis $n \ne 5$ ja $n \ne 8$, luvuksi r kelpaa

$$r = ((n-1)(2n-1))^2 = (n-1)^2(2n-1)^2.$$

Joukossa V_5 luvuksi r kelpaa

$$r = (56)^2 = 16 \cdot 196;$$

sekä $56 = 7 \cdot 8$ että $196 = 14 \cdot 14 = 7 \cdot 28$ ovat jaottomia V_5:ssä (samoin kuin aikaisemman perusteella luku $16 = (5-1)^2$). Joukossa V_8 luvuksi r käy vaikkapa

$$r = (7 \cdot 23)^2 = 49 \cdot 529.$$

77.4. Kaikilla x pätee $f(x) + f(x + \pi) \ge 0$ eli

$$2 - 2A\cos 2x - 2B\sin 2x \ge 0.$$

Jos merkitään

$$\cos y = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin y = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

saadaan

$$\sqrt{A^2 + B^2}\cos(2x - y) \le 1$$

kaikilla x. Kun valitaan $2x = y$, saadaan $A^2 + B^2 \le 1$.

Kaikilla x pätee myös $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \ge 0$ eli

$$\begin{aligned} &2 - a(\cos x - \sin x) - b(\cos x + \sin x) \\ &= 2 - \sqrt{2}\,a\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\,b\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 0. \end{aligned}$$

Samoin kuin edellä tästä johdetaan

$$\sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - z\right) \le \sqrt{2}$$

ja $a^2 + b^2 \le 2$.

77.5. Jos $q^2 + r = 1977$, niin $q \le \left[\sqrt{1977}\right] = 44$. Silloin $a^2 + b^2 < 44(a+b) + (a+b) = 45(a+b)$, ja koska $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, niin $(a+b)^2 < 90(a+b)$ eli $a+b < 90$. Siis $r \le 88$ ja $q^2 = 1977 - r \ge 1889$. Tästä seuraa $q > 43$. On oltava $q = 44$ ja $r = 41$. Kokonaisluvut a ja b toteuttavat yhtälön $a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41$ eli

$$(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009.$$

Tutkitaan yhtälön $x^2 + y^2 = 1009$ ratkaisuja, kun x ja y ovat kokonaislukuja ja $0 \le x \le y$. Silloin on oltava $y^2 \le 1009 \le 2y^2$. Tämä rajoittaa y:n välille $23 \le y \le 31$. Helposti kokeillaan, että vain pari $x = 15$, $y = 28$ toteuttaa yhtälön. Kysytyt a ja b löytyvät nyt yhtälöparien

$$|a-22| = 15, \quad |b-22| = 28$$

ja

$$|a-22| = 28, \quad |b-22| = 15$$

ratkaisuista (37, 50), 7, 50), (50, 37) ja (50, 7).

77.6. Osoitetaan ensin induktiolla, että $f(k) \ge n$ kaikilla $k \ge n$. Asia on selvä, kun $n = 1$. Olkoon $n \ge 1$ ja $f(k) \ge n$ kaikilla $k \ge n$; olkoon $k \ge n+1$. Koska $k - 1 \ge n$, niin $f(k-1) \ge n$ ja $f(f(k-1)) \ge n$. Mutta koska $f(k) > f(f(k-1))$, niin $f(k) \ge n+1$. Erityisesti pätee siis $f(n) \ge n$ kaikilla n. Oletetaan, että $f(n) > n$ jollakin n. Olkoon $f(m) = \min_{k>n} f(k)$. Silloin $m - 1 \ge n$ ja $f(m-1) > n$, sillä jos $m - 1 > n$, niin $f(m-1) \ge m - 1$ ja jos $m - 1 = n$, niin $f(m-1) = f(n) > n = m - 1$. Merkitään $p = f(m-1)$. Mutta silloin $f(m) > f(f(m-1)) = f(p)$, mikä on ristiriidassa m:n minimiominaisuuden kanssa. Siis $f(n) = n$ kaikilla n.

78.1. Luku $1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1)$ on jaollinen 1000:lla eli $2^3 5^3$:lla. Koska $1978^m = 2^m 989^m$, niin $m \ge 3$. Kun kirjoitetaan $m + n = 2m + (n-m)$, nähdään, että $m + n$ tulee minimoiduksi, jos valitaan $m = 3$ ja pienin mahdollinen $d = n - m$, jolla $5^3 = 125$ on tekijänä luvussa $1978^d - 1$. Käytetään hyväksi yleistä tulosta: jos d on pienin positiivinen kokonaisluku, jolla $a^d \equiv 1 \bmod p$ ja jos $a^s \equiv 1 \bmod p$, niin d on s:n tekijä. Todistus: jos olisi $s = qd + r$, missä $0 < r < d$, niin $a^r \equiv a^{qd} a^r = a^s \equiv 1 \bmod p$, mikä olisi ristiriidassa d:n minimaalisuuden kanssa. Eulerin lauseen nojalla

$$1978^{\phi(125)} \equiv 1 \bmod 125.$$

Toisaalta $\phi(125) = \phi(5^3) = 5^2(5-1) = 100$. Luku d on jokin luvun 100 tekijöistä 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Lasketaan modulo 125: $1978 \equiv -22$, $1978^2 \equiv 22^2 = 484 \equiv -16$, $1978^4 \equiv 16^2 = 256 \equiv 6$, $1978^5 \equiv -22 \cdot 6 = -132 \equiv -7$, $1978^{10} \equiv 7^2 = 49$, $1978^{20} \equiv 49^2 = 2401 \equiv 26$, $1978^{25} \equiv -7 \cdot 26 = -182 = -57$, $1978^{50} \equiv 57^2 = 3249 \equiv -1$. Pienin ehdon täyttävä d on siis 100, ja pienin $m + n = 106$.

78.2. Olkoon tehtävän "lävistäjän toinen päätepiste" X. Jos pallon S keskipiste on O ja säde r sekä $|\overrightarrow{OP}| = d$, niin

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{OX}|^2 &= |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|^2 \\
&= |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OP}|^2 \\
&= 3r^2 + 4d^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} \\
&\quad - 4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} - 4\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} - 4\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Mutta koska PA, PB ja PC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, on

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} + d^2 = 0, \\
(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP} + d^2 = 0, \\
(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) &= \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} + d^2 = 0.
\end{aligned}$$

Kun nämä sijoitetaan (1):een, saadaan $|\overrightarrow{OX}|^2 = 3r^2 - 2d^2$. Piste X sijaitsee aina O-keskisen $(3r^2 - 2d^2)$-säteisen pallon pinnalla S'.

On vielä todistettava, että kaikki tämän pallonpinnan S' pisteet ovat vaaditunlaisia lävistäjän toisia päätepisteitä. Olkoon siis X jokin sellainen piste, että $|\overrightarrow{OX}|^2 = 3r^2 - 2d^2$. Jana PX leikkaa pallon S; samoin PX-halkaisijainen pallo. Valitaan näiden kahden pallon leikkausympyrältä mielivaltainen piste A. Täydennetään PAX suorakulmioksi $PAXY$; tällöin $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{AP}$ ja $|\overrightarrow{OY}|^2 = |\overrightarrow{OX}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$. Kun otetaan huomioon kohtisuoruus $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AX} = 0$ eli $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX} - |\overrightarrow{OA}|^2 + \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$, saadaan $|\overrightarrow{OY}|^2 = 2r^2 - d^2$. Tarkastellaan suoran PY kautta kulkevaa ja vektoria $\overrightarrow{PA}$ vastaan kohtisuoraa tasoa; tämän tason PY-halkaisijainen ympyrä leikkaa ympyrän S kahdessa pisteessä. Olkoon toinen niistä B. Silloin $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{BY}$. Olkoon $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{PB}$. Silloin $PBYC$ on suorakulmio. Osoitetaan, että piste C on pinnalla S. Lasketaan samoin kuin edellä $|\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OY}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OY}\cdot\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OY}\cdot\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OY}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} = 2r^2 - d^2 + r^2 + d^2 - 2r^2 = r^2$. Konstruktion perusteella $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ ja $\overrightarrow{PC}$ ovat kaikki kohtisuorassa toisiaan vastaan ja $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$.

78.3. Koska $g(n) > 1$, on oltava $f(1) = 1$. Olkoon $n \geq 2$ mielivaltainen ja olkoon m ehdon $f(m) < n \leq f(m+1)$ toteuttava luku. Silloin

$$g(m) = f(f(m)) + 1 < f(n) + 1 \leq f(f(m+1)) + 1 = g(m+1).$$

Koska funktioiden f ja g arvojoukot ovat erillisiä, on

$$g(m) < f(n) < g(m+1).$$

Lukua $f(n)$ pienemmät kokonaisluvut ovat näin ollen $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n-1)$, $g(1)$, $g(2)$, ..., $g(m)$; koska lukuja on $n+m-1$ kappaletta, $f(n) = n + m = n + \max\{k \mid f(k) < n\}$. Olkoon t yhtälön

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

positiivinen juuri. Osoitetaan induktiolla, että $f(n) = [tn]$ kaikilla $n \geq 1$. Koska

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

niin $[t] = 1 = f(1)$. Okoon $n \geq 2$ ja olkoon $f(k) = [tk]$, kun $k < n$. Silloin $f(n) = n + \max\{k \mid [tk] < n\}$. Koska epäyhtälö $[tm] < n$ toteutuu silloin ja vain silloin, kun $tm < n$ eli $m < \frac{n}{t}$ eli $m \leq \left[\frac{n}{t}\right]$, on $\max\{k \mid [tk] < n\} = \left[\frac{n}{t}\right]$ ja siis

$$f(n) = n + \left[\frac{n}{t}\right] = \left[n + \frac{n}{t}\right] = [tn].$$

Täten $f(240) = [120(\sqrt{5}+1)] = 388$.

78.4. Kolmion ABC tasakylkisyydestä seuraa, että tehtävän kuvio on symmetrinen ABC:n ympäri piirretyn ympyrän halkaisijan AD suhteen; että D on tehtävän kahden ympyrän sivuamispiste; että $PQ \| BC$; että $\angle PDA = \angle QDA$; ja että PQ:n keskipiste I on AD:llä. Jos $\angle ABC = \beta$, niin $\angle APQ = \beta$ ja (samaa kaarta kuin tangenttikulma APQ vastaavana kehäkulmana) $\angle PDQ = \beta$ ja siis $\angle PDA = \frac{\beta}{2}$. Kulmat PID ja PBD ovat suoria. Nelikulmion $PBDI$ ympäri voidaan siten piirtää ympyrä. Kehäkulmalause sovellettuna tähän ympyrään antaa $\angle PBI = \angle PDI = \frac{\beta}{2}$. Siis I on myös kulman ABC puolittajalla. Kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste eli kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on, kuten väitettiin, piste I.

78.5. Olkoon n kiinteä; oletetaan, että joillekin luvuille j, k pätee $1 \leq j < k \leq n$, mutta $a_k < a_j$. Silloin

$$\frac{a_j}{j^2} + \frac{a_k}{k^2} - \frac{a_j}{k^2} - \frac{a_k}{j^2} = (a_j - a_k)\left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2}\right) > 0.$$

Tehtävän epäyhtälön vasen puoli pienenee, jos a_k ja a_j vaihdetaan keskenään. Äärellisen monen vaihdon jälkeen "kertoimet" a_j saadaan suuruusjärjestykseen; jos pienintä luvuista a_j merkitään b_1:llä, seuraavaa b_2:lla jne., on siten $b_k \geq k$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

78.6. Tehdään vastaoletus: joukko $\{1, 2, \ldots, 1978\}$ voidaan jakaa kuudeksi osajoukoksi A_1, A_2, ..., A_6, siten, että jos $x \in A_k$ $y \in A_k$, niin $x + y \notin A_k$. Koska $1978 = 6 \cdot 329 + 4$, ainakin yhdessä joukoista A_k on silloin ainakin 330 alkiota. Olkoon A_1 tällainen joukko ja $a_1 > a_2 > \ldots > a_{330}$ joukon A_1 alkioita. 329 positiivista lukua $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3$, ...,

$a_1 - a_{330}$ kuuluvat silloin kaikki joukkoihin A_2, A_3, A_4, A_5 tai A_6. Koska $329 = 5 \cdot 65 + 4$, ainakin yhteen joukoista, esim. joukkoon A_2, kuuluu ainakin 66 näistä luvuista, nimittäin luvut $b_1 = a_1 - a_{i_1}$, $b_2 = a_1 - a_{i_2}$, $\ldots$, $b_{66} = a_1 - a_{i_{66}}$. Koska $b_k - b_j = a_{i_k} - a_{i_j}$, b_j-lukujen positiiviset erotukset eivät kuulu kumpaankaan joukoista A_1 ja A_2. 65:sta luvusta $b_{66} - b_1$, $b_{66} - b_2$, $\ldots$, $b_{66} - b_1$ ainakin 17 kuuluu yhteen joukoista A_3, A_4, A_5 tai A_6; sanokaamme joukkoon A_3. Olkoot $c_1 > c_2 > \ldots > c_{17}$ tällaisia lukuja. Lukujen c_k erotukset voidaan kirjoittaa sekä b_j- että a_i- lukujen erotuksiksi, joten positiiviset erotukset $c_k - c_j$ luuluvat kaikki joukkoihin A_4, A_5 tai A_6. Kuudestatoista erotuksesta $c_1 - c_j$, $2 \le j \le 17$, voidaan ainakin kuuden, nimittäin lukujen $d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6$ olettaa olevan A_4:ssä. Näiden lukujen erotukset ovat samalla c_k-, b_j- ja a_i-lukujen erotuksia, joten ne ovat kaikki joukoissa A_5 tai A_6. Siten viidestä erotuksesta $d_6 - d_l$, $1 \le l \le 5$, ainakin kolmen, sanokaamme lukujen $e_1 < e_2 < e_3$, voidaan olettaa olevan joukossa A_5. Kuten edellä, todetaan, positiiviset erotukset $e_i - e_j$ eivät voi kuulua joukkoihin A_1, $\ldots$, A_5. Luvut $f_1 = e_3 - e_1$ ja $f_2 = e_3 - e_2$ ovat siten joukossa A_6. Mutta $f_1 - f_2 > 0$ ei aikaisemman päättelyn mukaan voi kuulua mihinkään joukoista A_j, $1 \le j \le 6$. Ristiriita, joka osoittaa vastaoletuksen vääräksi!

79.1. Kirjoitetaan summan parillisnimittäjäiset negatiiviset yhteenlaskettavat muotoon

$$-\frac{1}{2k} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k}.$$

Täten saadaan

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1319}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{1318}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{1319} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{659} \frac{1}{k} = \sum_{660}^{1319} \frac{1}{k} = \sum_{j=0}^{329} \left(\frac{1}{660+j} + \frac{1}{1319-j}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{329} \frac{1979}{(660+j)(1319-j)}.\end{aligned}$$

Viimeinen summa on selvästi muotoa

$$1979\frac{a}{b},$$

missä b on lukujen $(660+j)(1319-j)$ tulo. Koska 1979 on alkuluku, tällä tulolla ja 1979:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, joten lukua 1979 ei voi supistaa pois osoittajasta.

79.2. Osoitetaan ensin, että viisikulmioiden sivut ovat keskenään samanväriset. Vastaoletus: A_1A_2 on punainen ja A_2A_3 vihreä. Janoista A_2B_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, ainakin kolme on samanväristä. Olkoot ne A_2B_l, A_2B_k ja A_2B_m; oletetaan, että nämä janat ovat punaisia. Pisteistä B_l, B_k ja B_m ainakin kaksi on viisikulmion vierekkäisiä kärkiä. Olkoot ne B_l ja B_k. Koska A_2B_l ja A_kB_k ovat punaisia, B_lB_k on vihreä. Koska A_1A_2 ja A_2B_k ovat punaisia, A_1B_k on vihreä. Samoin päätellään, että A_1B_l on vihreä. Mutta nyt kolmio $A_1B_lB_k$

on vihreä, vastoin oletusta. Vastaoletus on siis väärä, joten viisikulmioiden sivujen on oltava keskenään samanvärisiä.
On vielä osoitettava, että kummankin viisikulmion väri on sama. Tehdään vastaoletus: A-viisikulmio on vihreä ja B-viisikulmio on punainen. Jos nyt janoista A_1B_j ainakin kolme on punaista, niin ainakin kaksi niistä yhdistää A_1:n B-viisikulmion viereisiin kärkiin ja synnyttää punaisen kolmion. Mainituista janoista ainakin kolmen on siis oltava vihreitä. Samoin janoista A_2B_j ainakin kolmen on oltava vihreitä. Mutta näin saaduista kuudesta vihreästä janasta ainakin kahden toinen päätepiste on

sama B-viisikulmion kärki, sanokaamme B_k. Kolmio $A_1A_2B_k$ on kokonaan vihreä, vastoin oletusta. Toinenkin vastaoletus johti ristiriitaan, joten todistettava väite pitää paikkansa.

79.3. Olkoot O_1 ja O_2 ympyröiden keskipisteet, B niiden toinen leikkauspiste, C_1 ja C_2 pisteen A kautta kulkevan ja AB:tä vastaan kohtisuoran suoran ja ympyröiden (toiset) leikkauspisteet ja Q_1 sekä Q_2 liikkuvien pisteiden asemat mielivaltaisella hetkellä. Koska pisteiden kulmanopeudet ovat samat, $\angle AO_1Q_1 = \angle AO_2Q_2 = \alpha$. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle ABQ_1 = \dfrac{\alpha}{2}$ ja $\angle ABQ_2 = \dfrac{1}{2}(2\pi - \alpha) = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$. Siten B on janalla Q_1Q_2. Koska kulmat C_1AB ja C_2AB ovat suoria, ovat myös kulmat C_1Q_1B ja C_2Q_2B suoria. Siis Q_1C_1 ka Q_2C_2 ovat yhdensuuntaisia. Mutta tästä seuraa, että janan Q_1Q_2 keskinormaali puolittaa janan C_1C_2. Siis C_1C_2:n keskipiste P on aina Q_1Q_2:n keskinormaalilla eli yhtä kaukana Q_1:stä ja Q_2:sta!

79.4. Piirretään suora l tason π mielivaltaisen pisteen R ja pisteen P kautta. Olkoon $\angle QPR = x$. Valitaan suoralta l piste S siten, että P on janalla RS ja $PS = PQ$. Silloin $\angle PQS = \angle PSQ = \dfrac{x}{2}$. Olkoon $\angle SQR = y$. Sovelletaan sinilausetta kolmioon QSR. Saadaan

$$\frac{|QP| + |PR|}{|QR|} = \frac{|SR|}{|QR|} = \frac{\sin y}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

Jos R on suoralla l, niin edellinen osamäärä on suurin, kun $y = \dfrac{1}{2}\pi$. Jos suoraa l kierretään, niin osamäärä saa maksimiarvon, kun x on mahdollisimman pieni. Tämä tapahtuu silloin, kun l kulkee Q:n π:llä olevan kohtisuoran projektion Q' kautta. Jos suora PQ' on yksikäsitteinen, R:kin on yksikäsitteinen. Jos taas $P = Q'$, kaikki P- keskisen ja QP-säteisen ympyrän pisteet kelpaavat pisteeksi R.

79.5. Tehtävän yhtälöistä seuraa

$$\sum_{k=1}^{5} a^2 k x_k + \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k - 2a \sum_{k=1}^{5} 2ak^3 x_k = 0$$

eli

$$\sum_{k=1}^{5} k\left(a - k^2\right)^2 x_k = 0.$$

Koska x_k:t ovat ei-negatiivisia, kaikki yhteenlaskettavat ovat nollia. Tämä onnistuu joko niin, että kaikki x_k:t ovat nollia, jolloin myös $a = 0$, tai niin, että neljä x_k:ta on $= 0$ ja viides, x_j, on $\neq 0$, mutta $a - j^2 = 0$. Tällöin $x_j = j$. Mahdolliset a:n arvot ovat neliöt 0, 1, 4, 9, 16 ja 25.

79.6. Olkoon sammakon 8-kulmio $ABCDEFGH$. On selvää, että pariton määrä hyppyjä voi viedä sammakon vain pisteisiin B, D, F ja G. Siis $a_{2n-1} = 0$. Yhtä selvää on, että $a_2 = 0$ ja $a_4 = 2$. Merkitään b_n:llä C:stä alkavien ja E:hen päättyvien polkujen määrää. b_n on myös G:stä alkavien ja E:hen päättyvien polkujen määrä. Ilmeisesti $b_2 = 1$. Kahden hypyn jälkeen A:sta lähtenyt sammakko on joko C:ssä, G:ssä tai A:ssa; takaisin A:han sammakko on voinut tulla kahdella tapaa, hypyin AB, BA tai AH, HA. Parillisilla n:n arvoilla pätee siis

$$a_n = 2b_{n-2} + 2a_{n-2}. \tag{1}$$

C:stä lähtenyt sammakko on kahden hypyn jälkeen joko E:ssä, A:ssa tai C:ssä, ja takaisin C:hen johtivat joko hypyt CB, BC tai CD, DC. Jos n on parillinen ja > 2, niin

$$b_n = 2b_{n-2} + a_{n-2}. \tag{2}$$

Kun (1) vähennetään (2):sta saadaan

$$b_n - a_n = -a_{n-2},$$

ja kun tässä n korvataan $n-2$:lla, saadaan arvoilla $n > 4$ pätevä kaava

$$b_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-4}.$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (1), tullaan palautuskaavaan

$$a_n = 4a_{n-2} - 2a_{n-4}, \tag{3}$$

joka on voimassa, kun n on parillinen ja > 4. Alkuehdot $a_2 = 0$ ja $a_4 = 2$ määrittävät (3):n toteuttavan jonon yksikäsitteisesti. On vielä todennettava, että kyseinen jono todella on tehtävässä esitetty. Tehtävän x ja y ovat yhtälön

$$t^2 - 4t + 2 = 0$$

juuret. Ne ovat silloin myös yhtälöiden

$$t^{n-1} - 4t^{n-2} + 2t^{n-3} = 0$$

juuria. Mutta tästä seuraa heti, että

$$\frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{2} - 4\frac{x^{n-2} - y^{n-2}}{2} + 2\frac{x^{n-3} - y^{n-3}}{2} = 0.$$

Tehtävän jono tottelee palautuskaavaa (3) ja täyttää alkuehdot, joten a_n on kysytty polkujen lukumäärä.

81.1. Olkoot kolmioiden sivujen pituudet a, b ja c sekä x, y ja z pisteen P etäisyydet sivuista BC, CA ja AB. Jos T on kolmion ala, niin

$$ax + by + cz = 2T \qquad (1),$$

ja tehtävä on minimoida

$$f(x,\, y,\, z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

ehdon (1) vallitessa. Käytetään Cauchyn – Schwarzin epäyhtälöä:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \left(\sqrt{ax}\sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{by}\sqrt{\frac{b}{y}} + \sqrt{cz}\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2 \\ &\le (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = 2T\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right),\end{aligned}$$

joten

$$\frac{(a+b+c)^2}{2T} \le \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$

Cauchyn – Schwarzin epäyhtälön yhtäsuuruusehdon nojalla yhtäsuuruus vallitsee vain, jos

$$\frac{a}{x} = kax, \qquad \frac{b}{y} = kby, \qquad \frac{c}{z} = kcz,$$

eli jos $x = y = z$. $f(x,\, y,\, z)$ saa näin ollen minimiarvon vain, kun P on kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

81.2. Sellaisia r-alkioisia joukkoja, joiden pienin alkio on k, on $\binom{n-k}{r-1}$ kappaletta. (Joukon $r-1$ k:ta suurempaa alkiota valitaan lukujen $n-k+1,\, \ldots,\, n$ joukosta.) Koska r-alkioisia joukkoja on kaikkiaan $\binom{n}{r}$ kappaletta, on

$$\binom{n}{r} F(n,\, r) = \sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}. \qquad (1)$$

Binomikertoimien perusominaisuuden nojalla

$$\binom{n-k}{r-1} = \binom{n-k+1}{r} - \binom{n-k}{r}.$$

Yhtälön (1) oikean puolen summa on täten

$$\sum_{k=1}^{n-r+1}\left((k-1)\binom{n-k+1}{r} - k\binom{n-k}{r}\right) + \sum_{k=1}^{n-r+1}\binom{n-k+1}{r}.$$

Tässä edellisen summan peräkkäisten yhteenlaskettavien positiiviset ja negatiiviset osat kumoavat toisiaan, ja ensimmäisestä summasta jää vain

$$0-(n-r+1)\binom{r-1}{r}=0.$$

Kun jälkimmäiseen summaan sijoitetaan

$$\binom{n-k+1}{r}=\binom{n-k+2}{r+1}-\binom{n-k+1}{r+1}$$

ja otetaan huomioon samanlainen peräkkäisten termien kumoutuminen, saadaan (1):n oikean puolen summaksi viimein $\binom{n+1}{r+1}$. Kysytty keskiarvo on siis

$$F(n,r)=\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1}.$$

81.3. Oletetaan, että (n, m), toteuttaa tehtävän yhtälön. Jos $m>1$, niin on oltava $n>m$. Jos $m=1$, on oltava $n=1$ tai $n=2$. Jos $p=n-m$, niin

$$1=(n^2-nm-m^2)^2=(m^2+2pm+p^2-pm-m^2-m^2)^2=(m^2-pm-p^2)^2.$$

Siis myös pari $(m, n-m)$ toteuttaa yhtälön. Jos $n-m>1$, päättely voidaan uudistaa. Näin saadaan jono $n=n_k$, $m=n_{k-1}$, n_{k-2}, ..., missä (n_i, n_{i-1}) toteuttaa tehtävän yhtälön ja $n_{i-2}=n_i-n_{i-1}$. Jono päättyy, kun $n_i=1$. Mutta silloin on oltava $n_{i+1}=2$. Jono on siis Fibonaccin jono 1597, 987, ..., 13, 8, 5, 3, 2, 1. Kääntäen voidaan todeta, että Fibonaccin jonon jäsenet toteuttavat tehtävän yhtälön. Kysytty m^2+n^2:n maksimoiva pari on $n=1597$, $m=987$.

81.4. Jos luku m jakaa tasan lukujen $(m-1)$ ja $(m-2)$pienimmän yhteisen monikerran, niin jokainen m:n alkutekijä p on ≤ 2. Muuten p ei olisi tekijänä kummassakaan luvuista $m-2$ ja $m-1$. Mutta jos $m=2^k$, niin $m-1$ on pariton ja m:n on oltava tekijänä itseään pienemmässä luvussa $m-2$. Siis tapaus $n=3$ on mahdoton. Tarkastellaan tapausta $n=4$. Jos m on tekijänä lukujen $m-3$, $m-2$ ja $m-1$ pienimmässä yhteisessä monikerrassa, niin m:n alkutekijät ovat <5; siis $m=2^r3^s$ ja $m-3=3(2^r3^{s-1}-1)$ ja $m-2=2(2^{r-1}3^s-1)$. m jakaa näiden lukujen pienimmän yhteisen monikerran vain, jos tulojen jälkimmäiset tekijät ovat ykkösiä, eli kun $r=s=1$. Tällöin on oltava $m=6$. Luku 6 on todella tekijänä lukujen 3, 4 ja 5 pienimmässä yhteisessä monikerrassa 60. Tehtävän (b)-kohdan vastaus on $n=4$.

Jos $n>4$, niin sekä $m=(n-1)(n-2)$ että $m=(n-2)(n-3)$ kelpaavat kysytyksi suurimmaksi luvuksi: $(n-1)(n-2)$ jakaa tasan lukujen $m-(n-1)=(n-1)(n-3)$ ja $m-(n-2)=(n-2)(n-2)$ tulon (jonka tekijöillä ei ole yhteisiä tekijöitä ja joka niin ollen on tekijänä kaikkien n:n luvun pienimmässä yhteisessä monikerrassa), ja $m=(n-2)(n-3)$ jakaa vastaavasti tasan lukujen $m-(n-2)$ ja $m-(n-3)$ tulon. Kaikilla $n>4$ kysyttyjä joukkoja on siis useampiakin kuin yksi.

81.5. Olkoon tehtävän kolmio ABC ja olkoot tehtävän ympyröiden keskipisteet D, E ja F. Koska ympyrät sivuavat kolmion sivuja, kolmion DEF sivut ovat kolmion ABC sivujen suuntaiset, joten DEF on yhdenmuotoinen, vieläpä homoteettinen, kolmion ABC kanssa. Suorat AD, BE ja CF kulkevat homotetiakeskuksen kautta; koska ne ovat kolmion ABC kulmanpuoilittajia, homotetiakeskus on kolmion ABC (ja kolmion DEF) sisään piirretyn ympyrän keskipiste I. Piste O on kolmion DEF ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Homotetiassa O kuvautuu kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipisteelle O'; siis I, O ja O' ovat samalla suoralla!

81.6. Todetaan ensin, että $f(1, 0) = f(0, 1) = 2$ ja $f(1, 1) = f(0, f(1, 0)) = f(0, 2) = 3$. Edelleen $f(1, 2) = f(0, f(1, 1)) = f(0, 3) = 4$. Induktiolla saadaan yleisesti $f(1, k) = k+2$: $f(1, k) = f(0, f(1, k-1)) = f(0, k+1) = k+2$. Seuraavaksi tarkastellaan tapauksia $x = 2$: $f(2, 0) = f(1, 1) = 3$, $f(2, 1) = f(1, f(2, 0)) = f(1, 3) = 5$, ja induktiolla yleisesti $f(2, k) = 2k + 3$. Jatketaan samoin $f(3, k)$:n määrittämiseksi: $f(3, 0) = f(2, 1) = 5 = 2^3 - 3$, $f(3, 1) = f(2, f(3, 0)) = f(2, 5) = 10 + 3 = 2^4 - 3$, ja jos $f(3, k) = 2^{k+3} - 3$, niin $f(3, k+1) = f(2, 2^{k+3} - 3) = 2^{k+1+3} - 6 + 3 = 2^{k+1+3} - 3$. Siis $f(3, k) = 2^{k+3} - 3$ kaikilla k. Nyt $f(4, 0) = f(3, 1) = 2^4 - 3$ ja $f(4, 1) = f(3, 2^4 - 3) = 2^{2^4 - 3 + 3} - 3 = 2^{2^{2^2}} - 3$. Tästä saadaan induktiolla heti

$$f(4, k) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3,$$

missä ensimmäisessä yhteenlaskettavassa on kaikkiaan $k+3$ kakkosta "eksponenttitornina". Kun $k = 1981$, kakkosia on 1984. [Funktio f on ns. *Ackermannin funktio*.]

82.1. Koska $0 = f(2) \geq f(1) + f(1)$, on $f(1) = 0$. Edelleen $f(3) = f(2) + f(1) + x = x$, missä $x = 0$ tai $x = 1$. Koska $f(3) > 0$, niin $f(3) = 1$. Induktiivisesti nähdään, että $f(3n) \geq n$ kaikilla n: jos $f(3n) \geq n$, niin $f(3(n+1)) \geq f(3n) + f(3) \geq n+1$. Sama päättely osoittaa, että jos $f(3k) > k$, niin $f(3n) > n$ kaikilla $n \geq k$. Koska $f(9999) = 3333$, pätee $f(3n) = n$ kaikilla $n \leq 3333$. Siis $f(3 \cdot 1982) = 1982$. Toisaalta

$$1982 = f(3 \cdot 1982) \geq 3f(1982),$$

joten $f(1982) < 661$. Mutta $f(1982) \geq f(1980) = f(3 \cdot 660) = 660$. Ainoa mahdollisuus on, että $f(1982) = 660$. Tehtävän ehdon toteuttavia funktioita on myös olemassa, eräs on $f(n) = \left[\dfrac{n}{3}\right]$.

82.2. Todistetaan, että kolmiot $M_1M_2M_3$ ja $S_1S_2S_3$ ovat homoteettiset; kysytty yhteinen piste on silloin homotetiakeskus. Olkoot A_1B_1, A_2B_2 ja A_3B_3 kolmion $A_1A_2A_3$ kulmanpuolittajat ja I niiden leikkauspiste. Silloin $\angle T_3IT_1 = 180° - A_2$, $\angle T_3B_3A_3 = A_2 + \dfrac{1}{2}A_3$, $\angle T_3IS_3 = 2(\angle T_3IB_3) = 180° - 2A_2 - A_3$ ja $\angle S_3IT_1 = \angle T_3IT_1 - \angle T_3IS_3 = A_2 + A_3$. Aivan samoin lasketaan $\angle S_2IT_1 = A_3 + A_2$. Mutta tämä merkitsee, että $S_2S_3 \| A_2A_3$. Samoin todetaan, että kolmion $S_1S_2S_3$ kaksi muuta sivua ovat $A_1A_2A_3$:n sivujen ja siis myös $M_1M_2M_3$:n sivujen suuntaiset. Kolmiot $S_1S_2S_3$ ja $M_1M_2M_3$ ovat homoteettisia. Ne eivät ole samat, koska kolmion $M_1M_2M_3$ ympäri piirretty ympyrä ei ole sama kuin kolmion $A_1A_2A_3$ sisään piirretty ympyrä (koska $A_1A_2A_3$ ei ole tasakylkinen). Todistus on valmis.

82.3. a) Osoitetaan, että tehtävän jonoille (x_n) pätee aina kun sarja suppenee

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \geq 4.$$

(Jos sarja hajaantuu, sen jokin osasumma on varmasti > 4). Olkoon a kaikkien suppenevien sarjojen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k}, \qquad (x_0 = 1, \quad x_i \geq x_{i+1}) \tag{1}$$

summien suurin alaraja eli infimum. Silloin jokaisella positiivisella luvulla ε on olemassa jokin sarja (1), jonka summa on $< a + \varepsilon$. Merkitään tällaisessa sarjassa $y_i = \dfrac{x_{i+1}}{x_1}$. Sarjan summa on tällöin

$$\frac{1}{x_1} + x_1\left(\frac{y_0^2}{y_1} + \frac{y_1^2}{y_2} + \ldots\right) \geq \frac{1}{x_1} + x_1 a \geq 2\sqrt{a}.$$

(Jälkimmäinen epäyhtälö perustuu siihen, että

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1 a}\right)^2 \geq 0.)$$

Siis $a + \varepsilon \geq 2\sqrt{a}$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Tämä on mahdollista vain, jos $a \geq 2\sqrt{a}$ eli $a \geq 4$.
b) Kun $x_i = 2^{-i}$, niin tehtävän sarja (1) on geometrinen sarja

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

jonka peräkkäisten termien suhde on $\dfrac{1}{2}$; tällaisen sarjan summa on tasan 4, joten sen kaikki osasummat ovat < 4.

82.4. Koska

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y - x)^3 - 3x^2y + 2x^3 = (y - x)^3 - 3(y - x)x^2 + (-x)^3,$$

nähdään, että jos pari $(x,\, y)$ toteuttaa yhtälön, niin myös pari $(y - x,\, -x)$ toteuttaa sen. Toistamalla sama päättely nähdään, että myös pari $(-x - (y - x),\, -y + x) = (-y,\, x - y)$ toteuttaa yhtälön. Jos jotkin kaksi paria olisivat samat, olisi $x = y = 0$, jolloin $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 0 \neq n$.
Olkoon sitten $n = 2891$. Silloin olisi

$$x^3 + y^3 \equiv -1 \bmod 3.$$

Tämä toteutuu vain, kun joko $x \equiv -1$ ja $y \equiv 0$ mod3, $x \equiv 0$ ja $y \equiv -1$ mod3 tai $x \equiv 1$ ja $y \equiv 1$ mod3. Ensimmäisessä tapauksessa $x \equiv 2$, 5 tai 8 mod9 ja $3xy^2 \equiv y^3 \equiv 0 \bmod 9$. Koska 2^3, 5^3 ja 8^3 ovat $\equiv \pm 1 \bmod 9$ ja $2891 \equiv 2 \bmod 9$, ratkaisua ei ole. Sama päättely osoittaa, että ratkaisua ei ole myöskään toisessa tapauksessa. Kolmaskaan tapaus ei ole mahdollinen, sillä jos ratkaisu $(x,\, y)$ olisi $(1,\, 1)$ mod3, olisi $(y - x,\, -x) \equiv (0,\, -1)$ mod3, eli oltaisiin jo torjutussa tilanteessa. Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

82.5. Oletuksista seuraa, että $EN = CM$, joten kolmiot BMC ja DNE ovat yhteneviä (sks) ja $\angle MBC = \angle EDN$. Jos B, M ja N ovat samalla suoralla, niin $\angle NBC = \angle EDN$. Kuusikulmion säännöllisyydestä seuraa, että $\angle BCN = 90^\circ$ ja $\angle CED = 30^\circ$. Siten

$$\angle BND = \angle BNC + \angle CND = (90^\circ - \angle NBC) + (\angle CED + \angle NDE) = 120^\circ.$$

Jana BD näkyy pisteestä N samassa 120°:n kulmassa kuin kuusikulmion keskipisteestä O. Siis $CN = CD = CO$. Toisaalta on helppo laskea, että $CE = \sqrt{3}CO$. Siis

$$\lambda = \frac{CN}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

82.6. Kun kuljetaan murtoviivaa A_1:stä alkaen, tullaan ensimmäiseen pisteeseen B_1, joka on etäisyydellä $\le \frac{1}{2}$ jostakin neliön kärjestä. Olkoon kyseinen kärki C_1. Jatkettaessa murtoviivaa eteenpäin, tullaan ensimmäiseen pisteeseen B_2, joka on etäisyydellä $\le \frac{1}{2}$ jommasta kummasta C_1:n viereisestä neliön kärjestä C_2. Edelleen jatkamalla tullaan jossain vaiheessa ensimmäiseen murtoviivan pisteeseen, joka on enintään etäisyydellä $\frac{1}{2}$ toisesta C_1:n viereisestä kärjestä C_4. Piste B_2 jakaa murtoviivan kahteen osaan; olkoon L_1 se osa, johon A_1 kuuluu. Olkoon S_1 niiden sivun C_1C_4 pisteiden joukko, joiden etäisyys jostakin L_1:n pisteestä on $\le \frac{1}{2}$ ja S_2 niiden sivun C_1C_4 pisteiden joukko, joiden etäisyys jostakin L_2:n pisteestä on $\le \frac{1}{2}$. Koska $C_1 \in S_1$ ja $C_4 \in S_2$, kumpikaan joukko ei ole tyhjä, ja joukkojen yhdiste on koko sivu C_1C_2. Tällöin joukoilla S_1 ja S_2 on yhteinen piste; olkoon se D. Olkoot P ja Q sellaiset L_1:n ja L_2:n pisteet, joille $|PD| \le \frac{1}{2}$ ja $QD \le \frac{1}{2}$. Silloin $|PQ| \le 1$ ja P:n ja Q:n välisen murtoviivan pituus on ainakin $|PB_2| + |B_2Q| < 99 + 99 = 198$. (Yhteisen pisteen D olemassaolon tarkka todistus perustuu reaalilukujen joukon täydellisyysominaisuuteen. Asia voidaan kiertää käyttämällä kahta lähellä toisiaan olevaa S_1:n ja S_2:n pistettä ja sitä, että "tarkka" yläraja 198 saavutettaisiin vain silloin, kun P, Q ja B_2 olisivat kaikki neliön sivulla C_1C_2, joka kuitenkaan oletuksen mukaan ei ole mahdollista.)

83.1. Olkoon x mielivaltainen ja $a = xf(x)$. Silloin $a \ne 0$ ja $f(a) = f(xf(x)) = xf(x) = a$. Osoitetaan induktiolla, että $f(a^n) = a^n$, kun n on positiivinen kokonaisluku. Näin on, kun $n = 1$. Oletetaan, että $f(a^k) = a^k$. Silloin $f(a^{k+1}) = f(af(a^k)) = a^k f(a) = a^{k+1}$. Jos olisi $a > 1$, olisi $\lim_{n\to\infty} f(a^n) = \lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Siis $a \le 1$. Toisaalta $f(1) = f(a^{-n}a^n) = f(a^{-n}f(a^n)) = a^n f(a^{-n})$, joten $f(a^{-n}) = f(1)a^{-n}$. Jos olisi $a < 1$, olisi $\lim_{n\to\infty} f(a^{-n}) = \infty$. Siis $a = 1$. Koska x on mielivaltainen, on oltava $f(x) = \frac{1}{x}$ kaikilla $x > 0$. – Helposti nähdään, että funktio f, $f(x) = \frac{1}{x}$ todella myös toteuttaa tehtävän ehdot.

83.2. Oletetaan, että C_1 on ympyröistä säteeltään pienempi. Olkoon ympyröiden yhteisten tangenttien leikkauspiste S ja leikatkoon suora SA ympyrän C_1 myös pisteessä B.

Väitteen todistamiseksi riittää, kun osoitetaan, että kulmat O_2AM_2 ja O_1AM_1 ovat yhtä suuret. Koska kulmat O_1BM_1 ja O_2AM_2 ovat vastinkulmia S-keskisessä homotetiassa ja siis yhtä suuret, riittää, että osoitetaan pisteiden A, B, O_1 ja M_1 olevan samalla ympyrällä. Tällöin kulmat O_1AM_1 ja O_1BM_1 tulevat olemaan samaa jännetä O_1M_1 vastaavia kehäkulmia ja siis yhtä suuria. Merkitään kulman M_1SP_1 suuruutta x:llä. Silloin tunnetun pisteen potenssia koskevan lauseen nojalla on

$$SA \cdot SB = SP_1^2 = SO_1 \cdot \cos x \cdot \frac{SM_1}{\cos x} = SO_1 \cdot SM_1.$$

Samaa lausetta käänteiseen suuntaan soveltamalla nähdään, etä B on pisteiden O_1, M_1 ja A kautta kulkevalla ympyrällä, ja todistus on valmis.

83.3. Lukujen ab, bc ja ca suurin yhteinen tekijä on 1. Siksi jokaisella kokonaisluvulla n on esitys

$$n = x_0bc + y_0ca + z_0ab.$$

Jos $x = x_0 + as$, $y = y_0 + bt$ ja $z = z_0 - cs - ct$, niin $n = xbc + yca + zab$. Valitaan s ja t niin, että $0 \le x < a$ ja $0 \le y < b$. Jos $n > 2abc - ab - bc - ca$, niin

$$zab = n - xbc - yca > 2abc - ab - bc - ca - (a-1)bc - (b-1)ac = -ab,$$

joten $z \ge 0$. Tässä tapauksessa luvulla n on vaadttu esitys. Mutta jos olisi $2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab$, olisi $x + 1$ jaollinen a:lla, $y + 1$jaollinen b:llä ja $z + 1$ jaollinen c:llä. Tästä seuraisi $a \le x + 1$, $b \le y + 1$ ja $c \le z + 1$, ja ristiriita $2abc > 3abc$.

83.4. Oletamme, että E olisi ositettu joukoiksi S ja T, joista kumpikaan ei sisällä suorakulmaisen kolmion kärkiä. Valitaan sivuilta AB, BC ja CA pisteet C', A' ja B', joista kukin jakaa sivunsa suhteessa $2 : 1$. Helposti havaitaan, että $A'B'C'$ on tasasivuinen kolmio jonka sivut ovat kohtisuorassa kolmion ABC sivuja vastaan. Voimme olettaa, että pisteet A' ja B' kuuluvat samaan osituksen joukkoon, esimerkiksi S:ään. Silloin kaikki janan BC pisteet A':a lukuun ottamatta kuuluvat T:hen. Mutta nyt kaikkien BA:n ja AC:n pisteiden on kuuluttava S:ään, joten löytyy äärettömän monta suorakulmaista kolmiota, joiden kaikki kärjet kuuluvat S:ään!

83.5. Olkoon k_n kokonaisluku ja $B_n \subset \{1, \ldots, k_n\}$ joukko, joka ei sisällä kolmea peräkkäistä aritmeettisen jonon jäsentä. Konstruoidaan uusi joukko B_{n+1} seuraavasti: $B_{n+1} = B_n \cup \{3k_n - x \mid x \in B_n\}$. Asetetaan vielä $k_{n+1} = 3k_n - 1$. Nyt $B_n \subset \{1, \ldots, k_{n+1}\}$ ja jos $\{a - x, a, a + x\} \subset B_{n+1}$ joillakin a ja $x \ge 1$, niin mahdollisuudet $a + x \le k_n$ ja $a - x \ge 2k_n$ ovat poissuljetut B_n:n ominaisuuksien takia. Siis on oltava $x \ge k_n$, jolloin joko $a - x < 1$ ja $a - x \notin B_{n+1}$ tai $a + x \ge 3k_n$, jolloin $a + x \notin B_{n+1}$. Siis B_{n+1} ei sisällä kolmea aritmeettisen jonon jäsentä. Olkoon nyt $k_1 = 2$ ja $B_1 = \{1, 2\}$. Konstruoidaan joukot B_2, B_3, $\ldots$, B_{11} kuvatulla tavalla. Joukossa B_{11} on $2^{11} = 2048 > 1983$ alkiota, jotka kaikki ovat pienempiä kuin k_{11}; toisaalta $k_{11} < 3^9 \cdot k_2 = 5 \cdot 3^9 = 98415 < 10^5$.

83.6. Merkitään kolmion kärkien etäisyyksiä kolmion sisään piirretyn ympyrän ja kolmion sivujen yhteisistä pisteistä x:llä, y:llä ja z:lla. Silloin

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + x.$$

Todistettava epäyhtälö on nyt yhtäpitävä epäyhtälöiden

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \ge xyz(x + y + z)$$

ja

$$\left((y\sqrt{xy})^2 + (z\sqrt{zy})^2 + \left(x\sqrt{xz}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{z}\right)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2 + (\sqrt{y})^2\right) \ge \left(\sqrt{xyz}(z + x + y)\right)^2.$$

Kysymyksessä on (valepukuinen) Cauchyn – Schwarzin epäyhtälö

$$\sum a_i^2 \sum b_i^2 \ge \left(\sum a_i b_i\right)^2.$$

Cauchyn – Schwarzin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus, jos $a_i = cb_i$ kaikilla i; tehtävän tilanteessa yhtäsuuruuden ehto on

$$\frac{\sqrt{xy}y}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{yz}x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{zx}y}{\sqrt{y}};$$

tästä seuraa helposti $x = y = z$ eli $a = b = c$. Epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus aina ja vain, kun kolmio on tasasivuinen.

84.1. Koska $x \le 1$ ja $z \le 1$, niin

$$yz + zx + xy - 2xyz = yz(1 - x) + xy(1 - z) + zx \ge 0.$$

Luvuista x, y ja z ainakin kaksi on $\le \frac{1}{2}$. Tarkastellaan lukuja $a = 1 - 2x$, $b = 1 - 2y$ ja $c = 1 - 2z$. Näille pätee $a + b + c = 3 - 2(x + y + z) = 1$ ja

$$xy + yz + zx - 2xyz = \frac{1 + abc}{4}.$$

Luvuista x, y ja z enintään yksi on $> \frac{1}{2}$. Jos tällainen luku on olemassa, tasan yksi luvuista a, b ja c on negatiivinen, ja $\frac{1}{4}(1 + abc) < \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$. Jos kaikki luvut x, y, z ovat $\le \frac{1}{2}$, niin sovelletaan aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä perusepäyhtälöä, jonka mukaan

$$abc \le \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Siis

$$xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{7}{27}.$$

84.2. Koska

$$\begin{aligned}(a + b)^7 - a^7 - b^7 &= 7ab\left[(a^5 + b^5) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2b^2(a + b)\right]\\ &= 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2,\end{aligned}$$

riittää, kun valitaan a ja b niin, että $a^2 + ab + b^2$ on jaollinen luvulla $7^3 = 343$. Tämä edellyttää, että $(a + b)^2 > a^2 + ab + b^2 \ge 343$ eli $a + b \ge 19$. Kokeillaan arvoa $a = 1$: onnellisen sattuman kautta $b = 18$ toteuttaa yhtälön $b^2 + b + 1 = 343$. Ratkaisuksi kelpaa siis $a = 1$, $b = 18$.

84.3. Olkoot R ja S O-keskiset r- ja s-säteiset ympyrät, $0 < r < s < 1$. Jos X on se R:n piste, jolla $a(X) = r(s-r)$, niin $C(X)$:n säde on

$$r + \frac{r(s-r)}{r} = s,$$

joten $C(X) = S$. Jos pisteen X väri ei esiinny ympyrällä S, niin R:n ja S:n pisteiden värien joukot eivät ole samat. Jos värejä kuitenkin on vain äärellinen määrä, niin värien joukkojenkin määrä on äärellinen. Tällöin ei voi löytyä äärettömän monta ympyräparia, joiden värien joukot olisivat eri joukot. Jollakin parilla R, S on siten välttämättä voimassa tilanne, jossa $X \in R$ ja X:n väri esiintyy ympyrällä $S = C(X)$.

84.4. Jos $AB \| CD$, niin CD-halkaisijainen ympyrä sivuaa suoraa AB jos ja vain jos CD on kaksi kertaa suorien välinen etäisyys, jonka on oltava puolet AB:stä. Siis $|AB| = |CD|$, joten $ABCD$ on suunnikas ja $BC \| AD$. Oletetaan sitten, että AB ja CD eivät ole yhdensuuntaisia Oletetaan myös, että CD-halkaisijainen ympyrä sivuaa suoraa AB. Olkoon suorien AB ja CD leikkauspiste O ja olkoon $\angle AOD = \alpha$. Silloin

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}DC}{OD + \frac{1}{2}DC} = \frac{\frac{1}{2}AB}{OA + \frac{1}{2}AB},$$

josta seuraa

$$\frac{OD}{DC} = \frac{OA}{AB},$$

ja siten $AD \| BC$. Sama yhtälöketju voidaan lukea lopusta alkuun; relaatio $AD \| BC$ on yhtäpitävä tehtävän sivuamisominaisuuksien kanssa.

84.5. Olkoon tutkittava n-kulmio $A_1A_2 \ldots A_n$. Kirjoitetaan alaindeksit modulo n. Monikulmiossa on $\frac{1}{2}n(n-3)$ lävistäjää. Kolmioepäyhtälö antaa lävistäjien A_iA_j ja $A_{i+1}A_{j+1}$ sekä sivujen A_iA_{i+1} ja A_jA_{j+1} muodostamista kolmioista suoraan

$$A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1} > A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1}.$$

Kirjoitetaan tämä epäyhtälö jokaiselle lävistäjälle A_{ij} ja lasketaan epäyhtälöt puolittain yhteen. Syntyvän epäyhtälön vasemmalla puolella esiintyy jokainen lävistäjä kahdesti, ja oikealla puolella esiintyy jokainen sivu $n-3$ kertaa. Siis

$$2d > (n-3)p,$$

eli tehtävän epäyhtälöistä vasemmanpuolinen on todistettu.

Jokaiselle lävistäjälle A_iA_j ovat voimassa epäyhtälöt

$$\begin{aligned} A_iA_j &< A_iA_{i+1} + \ldots + A_{j-1}A_j \\ A_iA_j &< A_jA_{j+1} + \ldots + A_{i-1}A_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Jos n on pariton, $n = 2k+1$, niin kutakin lävistäjää A_iA_j kohden jommassa kummassa epäyhtälöistä (1) on vähemmän yhteenlaskettavia. Lasketaan kaikkia lävistäjiä kohden nämä epäyhtälöt yhteen. Vasemmaksi puoleksi saadaan lävistäjien summa d. Oikean puolen laskemiseksi tarkastellaan esim. sivua A_nA_1. Se esiintyy summassa, jossa on vähemmän (siis enintään k) yhteenlaskettavaa lävistäjiä A_nA_2, A_nA_3, $\ldots$, A_nA_k vastaavissa $k-1$:ssä epäyhtälössä, lävistäjiä $A_{n-1}A_1$, $A_{n-1}A_2$, $\ldots$, $A_{n-1}A_{k-1}$ vastaavissa $k-1$:ssä epäyhtälössä $A_{n-2}A_1$, $A_{n-2}A_2$, $\ldots$, $A_{n-2}A_{k-2}$ vastaavissa $k-2$:ssa epäyhtälössä, $\ldots$, ja lävistäjää $A_{k+1}A_1$ vastaavassa yhdessä epäyhtälössä. Sellaisten epäyhtälöiden lukumäärä, joissa sivu A_nA_1 esiintyy, on siis kaikkiaan

$$1+2+\ldots+k-1+k-1 = \frac{1}{2}k(k-1)+k-1 = \frac{(k-1)(k+2)}{2};$$

sama lukumäärä koskee muitakin sivuja, joten epäyhtälöiden oikeiden puolien summa on

$$\frac{p}{2}(k-1)(k+2) = \frac{p}{2}(k(k+1)-2) = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right).$$

Jos sitten n on parillinen, $n = 2k$, menetellään muuten samoin kuin parittoman n:n tapauksessa, mutta lävistäjiä A_iA_{i+k} arvioidaan ylöspäin luvulla $\frac{p}{2}$. Saadaan

$$d < \frac{kp}{2} + \frac{p}{2}(k-2)(k+1) = \frac{p}{2}(k^2-2) = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right).$$

84.6. Oletuksen perusteella $(d-a)^2 > (c-b)^2$. Kun tähän epäyhtälöön lisätään puolittain $4ad = 4bc$, saadaan $(d+a)^2 > (c+b)^2$ eli $a+d > b+c$. Siis $k > m$. Yhtälöstä $a(2^k-a) = b(2^m-b)$ seuraa nyt, että 2^m on tekijänä luvussa $b^2-a^2 = (a+b)(b-a)$. Koska $(a+b)+(b-a) = 2b$ ei ole jaollinen 4:llä, niin jompi kumpi luvuista $a+b$ ja $b-a$ on jaollinen 2^{m-1}:llä. Olkoon se x. Silloin $0 < x \le b+a < b+c = 2^m$, joten on oltava $x = 2^{m-1}$. Nyt $b+c-x = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1}$ on joko $c+a$ tai $c-a$. Koska a, b ja c ovat parittomia, a:lla ja b:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, eikä myöskään a:lla ja c:llä ole yhteisiä tekijöitä. Koska a on tekijänä tulossa bc, on oltava $a = 1$.

85.1. Olkoon sivulla AB oleva piste O toisen tehtävässä mainitun ympyrän keskipiste. Merkitään tämän ympyrän ja sivujen AD, DC ja CB sivuamispisteitä E, F ja G. Olkoon $\angle OCF = \alpha$. Silloin $\angle DCB = 2\alpha$ ja koska $ABCD$ on jännenelikulmio, $\angle DAO = 180^\circ - 2\alpha$. Kierretään kolmiota OCF kärjen O:n ympäri asentoon OHE (H on suoralla AD). Silloin $\angle AHO = \alpha$ ja $\angle HOA = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$. Kolmio AOH on siis tasakylkinen: $AO = AH$. Mutta $AH = AE + EH = AE + FC = AE + CG$, joten

$$AO = AE + CG. \tag{1}$$

Aivan samoin saadaan

$$BO = BG + ED. \tag{2}$$

Väite seuraa, kun yhtälöt (1) ja (2) lasketaan puolittain yhteen.

85.2. Tarkastellaan lukujen k, $2k$, $\ldots$, $(n-1)k$ jakojäännöksiä r_1, r_2, $\ldots$, r_{n-1} modulo n. Koska k:lla ja n:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, jakojäännökset ovat $\neq 0$. Jos pk:lla ja qk:lla olisi sama jakojäännös, $(p-q)k$ olisi jaollinen n:llä. Luvut r_j ovat siis kaikki eri lukuja, joten $\{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\} = M$. Mutta $r_{j+1} = r_j + k$ tai $r_{j+1} = r_j + k - n$. Edellisessä tapauksessa r_{j+1} on samanvärinen kuin r_j tehtävän ehdon (2) perusteella, jälkimmäisessä tapauksessa r_{j+1} on samanvärinen kuin $|k - r_{j+1}| = n - r_j$, joka puolestaan on samanvärinen kuin r_j. Tästä nähdään heti, että jokainen M:n alkio on samanvärinen kuin $r_1 = k$.

85.3. Jos polynomin P aste on $< k$, niin $w(P + x^kQ) = w(P) + w(Q)$. Koska polynomien yhteenlaskussa kaksi paritonkertoimista termiä tuottaa parilliskertoimisen termin, funktio w tottelee kolmioepäyhtälöä: $w(P + Q) \leq w(P) + w(Q)$. Induktiolla nähdään, että jos $k = 2^n$, niin $w(Q_k) = 2$ ja Q_k:n ainoat paritonkertoimiset termit ovat 1 ja x^k. Nimittäin $Q_2(x) = 1+2x+x^2$ ja jos $Q_k(x) = 1+2\sum_{i=1}^{k-1} a_ix^i + x^k$, niin $Q_k(x)^2 = 1+4\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_ix^i\right)^2 + x^{2k} + 4\sum_{i=1}^{k-1} a_ix^i + 2x^k + 4x^k\sum_{i=1}^{k-1} a_kx^k = 1 + 2\sum_{i=1}^{2k-1} b_ix^i + x^{2k}$. Samoin, jos $k = 2^n$, niin $w(Q_kP) = w(P) + w(x^kP)$.

Todistetaan tehtävän väite induktiolla i_n:n suhteen. Jos $i_n = 0$ tai $i_n = 1$, asia on selvä. Oletetaan, että $i_n > 1$. Valitaan $k = 2^m$ siten, että $k \leq i_n < 2^{m+1}$. Nyt joko $i_1 < k$ tai $i_1 \geq k$. Oletetaan ensin, että $i_1 < k$. Silloin k on lukujen i_j ja i_{j+1} välissä: $i_j < k \leq i_{j+1}$. Merkitään $R = \sum_{r=1}^{j} Q_{i_r}$ ja $S = \sum_{r=j+1}^{n} Q_{i_r}$, $Q = R + S$. Silloin $Q = R + Q_kS_1$, missä polynomin S_1 aste on $< k$ ja $w(Q) = w(R + S_1 + x^kS_1) = w(R + S_1) + w(S_1)$. Nyt $w(R) = w(R + S_1 - S_1) \leq w(R + S_1) + w(-S_1) = w(R + S_1) + w(S_1)$. Siis $w(Q) \geq w(R)$; induktio-oletuksen perusteella toisaalta $w(R) \geq w(Q_{i_1})$. Jos sitten $i_1 \geq k$, niin voidaan kirjoittaa $Q_{i_1} = Q_kR$, $Q = Q_kS$, missä R:n ja S:n asteet ovat $\leq k$. Nyt $w(Q) = w(S + x^kS) = 2w(S)$. Induktio-oletuksen nojalla $w(S) \geq w(R)$, joten $w(Q) \geq 2w(R) = w(R + x^kR) = w(Q_{i_1})$.

85.4. Lukua 26 pienempiä alkulukuja on yhdeksän kappaletta. Joukon M luvut ovat muotoa $a = p_1^{k_1}p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_9^{k_9}$ Liitetään jokaiseen M:n alkioon a jono $x(a) = (x_1, x_2, \ldots, x_9)$, missä $x_i = 0$, jos k_i on parillinen ja $x_i = 1$, jos k_i on pariton. Jonoja $x(a)$ on enintään $2^9 = 512$ kappaletta. Laatikkoperiaatteen nojalla M:ssä on välttämättä pari a_1, b_1, joille $x(a_1) = x(b_1)$. Tällöin $a_1b_1 = c_1^2$, missä c_1 on kokonaisluku. Tällainen pari, jonka tulo on neliö, voidaan poistaa M:stä ainakin 513 kertaa (itse asiassa useamminkin). Näiden 513 neliön ja niiden neliöjuurten alkutekijät ovat edelleen joukossa $\{p_1, p_2, \ldots, p_9\}$. Ainakin kahdella neliöjuurella c_i ja c_j on $x(c_i) = x_(c_j)$. Tällöin $c_ic_j = d^2$ jollekin kokonaisluvulle d. Mutta $a_ib_ia_jb_j = c_i^2c_j^2 = d^4$.

85.5. Leikatkoon suora KN suoran AC pisteessä P; koska kolmioiden ABC ja KBM ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat kahdessa eri pisteessä, AC ja KN eivät ole yhdensuuntaisia. Leikatkoon BP kolmion KBN ympäri piirretyn ympyrän pisteessä M'. Jännenelikulmioista $NM'BK$ ja $NKAC$ nähdään, että $\angle PM'N = \angle BKN = \angle ACN$. Tästä seuraa, että myös $CPM'N$ on jännenelikulmio. Mutta siitä, että $NM'BK$ on jännenelikulmio ja kulmat $NM'C$ ja CPN ovat samaa $CPM'N$:n ympäri piirretyn ympyrän kaarta vastaavia kehäkulmia, seuraa, että $\angle BM'C = \angle BM'N + \angle NM'C = \angle AKN + \angle CPN = 180° - \angle BAC$. Tämä merkitsee, että M' on kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä eli $M' = M$. Olkoon O-keskisen ympyrän säde r. Lasketaan pisteiden B ja P potenssit toisaalta nelikulmion $CPMN$ ja kolmion ABC ympäri piirrettyjen ympyröiden ja toisaalta

O-keskisen ympyrän suhteen. Saadaan

$$BM \cdot BP = BN \cdot BC = BO^2 - r^2,$$
$$PM \cdot PB = PN \cdot PK = PO^2 - r^2.$$

Kun nämä yhtälöt vähennetään puolittain toisistaan, saadaan $PO^2 - BO^2 = BP(PM - BM) = PM^2 - BM^2$. Viimeinen yhtälö on mahdollinen vain, kun OM on kohtisuorassa BP:tä vastaan.

85.6. Määritellään funktiojono (f_n) asettamalla $f_1(x) = x$ ja

$$f_{n+1}(x) = f_n(x)\left(f_n(x) + \frac{1}{n}\right), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Silloin $x_n = f_n(x_1)$, $x_{n+1} > x_n$ jos ja vain jos $f_n(x_1) > 1 - \dfrac{1}{n}$. Tehtävänä on osoittaa, että yhdellä ja vain yhdellä x_1 pätee $1 - \dfrac{1}{n} < f_n(x_1) < 1$ kaikilla n. Koska f_n:t ovat (kun $n > 1$) parillisasteisia ja positiivikertoimisia polynomeja, ne ovat kasvavia ja niiden kuvaajat ovat alaspäin kuperia, kun $x > 0$. Lisäksi $f_n(1) \geq 1$ ja $f_n(0) = 0$. Koska f_n on jatkuva ja kasvava, on olemassa a_n ja b_n, $0 < a_n < b_n < 1$, siten, että $f_n(a_n) = 1 - \dfrac{1}{n}$ ja $f_n(b_n) = 1$. Toisaalta siitä, että f_n:n kuvaaja on välillä $[0,\, b_n]$ suoran $y = \dfrac{x}{b_n}$ alapuolella, seuraa, että $b_n - a_n < 1 - \dfrac{a_n}{b_n} < f(b_n) - f(a_n) = \dfrac{1}{n}$. Koska $f_{n+1}(a_n) = 1 - \dfrac{1}{n} < f_{n+1}(a_{n+1})$, on oltava $a_n < a_{n+1}$. Koska $f_{n+1}(b_n) = 1 + \dfrac{1}{n} > f_{n+1}(b_{n+1})$, on oltava $b_{n+1} < b_n$. Jono (a_n) on kasvava ja jono (b_n) on vähenevä; lisäksi $b_n - a_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Tästä seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_1.$$

Jonojen yhteinen raja-arvo x_1 on tehtävässä vaadittu luku; kaikille $x > x_1$ on $f_n(x) > 1$ tarpeeksi suurilla n:n arvoilla ja kaikilla $x < x_1$ on $f_n(x) < 1 - \dfrac{1}{n}$ kaikilla tarpeeksi suurilla n:n arvoilla.

86.1. Ellei tehtävän väite pitäisi paikkaansa, olisi $2d = 1 + x^2$, $5d = y^2 + 1$ ja $13d = z^2 + 1$, missä x, y ja z ovat kokonaislukuja. Tällöin x olisi pariton, ja koska $x^2 \equiv 1 \bmod 4$, niin d olisi pariton. Silloin y ja z olisivat parillisia, $y = 2p$, $z = 2q$. Koska $z^2 - y^2 = 8d = 4(p^2 - q^2)$, olisi $(p - q)(p + q) = 2d$. Tämä on mahdotonta, sillä $p - q$ ja $p + q$ ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia; koska lukujen tulo on parillinen, ne ovat molemmat parillisia, ja d on parillinen. Ristiriita; siis tehtävän väite on tosi.

86.2. Kun suoritetaan peräkkäin kolme tason kiertoa (minkä hyvänsä pisteiden ympäri) siten, että kiertokulmien summa on $360°$, niin kierroista yhdistetty kuvaus on translaatio (jokainen jana kuvautuu itsensä pituiseksi ja itsensä suuntaiseksi janaksi). Olkoon f se translaatio, joka syntyy, kun yhdistetään 120°:en kierrot g_1, g_2 ja g_3 pisteiden A_1, A_2 ja A_3 ympäri. Koska f yhdistettynä 662 kertaa itsensä kanssa pitää pisteen P_0 paikallaan, f:n on oltava identtinen kuvaus. Olkoon $A_1 = f(A_1) = g_3(B)$, missä $B = g_2(g_1(A_1)) = g_2(A_1)$. Nyt kolmiot A_2A_1B ja A_3BA_1 ovat tasakylkiset, niillä on sama huippukulma ja yhteinen kanta A_1B. Tästä seuraa, että kolmiot ovat yhtenevät. Siis $A_1A_2 = A_1A_3$. Kolmioiden kantakulmat ovat 30°, joten $\angle A_2A_1A_3 = 60°$. Kolmio $A_1A_2A_3$ on tasasivuinen.

86.3. Jos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ on viisikulmion kärjissä olevien lukujen muodostama vektori, merkitään $s(\mathbf{x}) = x_1 + \ldots + x_5$ ja $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{5}(x_{k+1} - x_{k-1})^2$, missä $x_0 = x_5$ ja $x_1 = x_6$. Jos $s(\mathbf{x}) > 0$ ja $x_3 < 0$ jollakin x, voidaan suorittaa operaatio, jonka tuloksena saadaan uusi vektori $\mathbf{y} = (x_1, x_2 + x_3, -x_3, x_4 + x_3, x_5)$, jolle $s(\mathbf{y}) = s(\mathbf{x})$. Suoraan laskemalla saadaan

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = -2x_3s(\mathbf{x}) > 0.$$

Koska funktion f arvot ovat positiivisia kokonaislukuja, tehtävän operaation avulla f:n arvoa voidaan pienentää voidaan pienentää vain äärellisen monta kertaa.

86.4. Tarkastellaan tilannetta, jossa Y on sivun AB ja Z viereisen sivun BC sisäpiste. Koska kulmien $\angle YBZ = \angle ABC$ ja $\angle YXZ = \angle AOB$ summa on 180°, niin nelikulmio $XYBZ$ on jännenelikulmio, ja sen ympäri voidaan piirtää ympyrä. Kulmat YBX ja YZX vastaavat samaa kaarta ja ovat siis yhtä suuret ja yhtä suuret kuin $\angle ABO$. Siis B, O ja X ovat samalla suoralla. Olkoon $\alpha = \dfrac{180°}{n}$. Kolmion ABO ympäri piirretyn ympyrän halkaisija on $d = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, missä $a = |OA|$. X:n etäisyys O:sta on suurimmillaan, kun BX on kolmion XYZ ympäri piirretyn ympyrän halkaisija; etäisyys on tällöin $d - a$. Kysytty kuvio on tähti, jonka muodostaa n kappaletta $d-a$:n pituista O:ssa kohtaavaa janaa, jotka kukin kuuluvat yhteen monikulmion kärjen ja sen keskipisteen kautta kulkevaan suoraan.

86.5. Olkoon f tehtävän ehdot täyttävä funktio. Jos $t > 2$, niin $f(t) = f(t - 2 + 2) = f((t-2)f(2))f(2) = 0$. Olkoon $0 \le y < 2$ ja $x \ge 0$. Tehtävän yhtälöstä (i) nähdään, kun otetaan huomioon ehto (iii), että $xf(y) \ge 2$ jos ja vain jos $x + y \ge 2$ eli $x \ge \dfrac{2}{f(y)}$ jos ja vain jos $x \ge 2 - y$. Mutta tämä merkitsee, että on oltava

$$f(y) = \frac{2}{2-y}.$$

Rutiinilasku osoittaa, että funktio, jonka määrittelevät kaavat

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y}, & \text{kun } 0 \le y < 2, \\ 0, & \text{kun } y > 2, \end{cases}$$

todella toteuttaa tehtävän ehdot.

86.6. Tarkastellaan kaikkia koordinaattiakselien suuntaisia suoria, joilla on tehtävässä mainitun äärellisen joukon A pisteitä. Jokaisella suoralla yhdistetään (kasvavan x- tai y-koordinaatin suunnassa) kaksi ensimmäistä pistettä, kolmas ja neljäs piste jne. Jokainen piste tulee olemaan enintään kahden yhdistysjanan päätepiste; kullakin suoralla on enintään yksi piste, joka ei kuulu yhteenkään yhdistysjanaan. Kaikki pisteet kuuluvat koordinaattiakselien suuntaisista janoista koostuviin toisiaan leikkaamattomiin murtoviivoihin. Jos tällainen murtoviiva on umpinainen, siinä on parillinen määrä sivuja (koska vierekkäiset sivut ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja murtoviivan nettokierto on $4\cdot 90°$). Väritetään kullakin murtoviivalla peräkkäiset pisteet eri värein. Murtoviivoihin kuulumattomat pisteet voidaan värittää kummalla värillä tahansa. Jokaisella suoralla olevat A:n pisteet muodostavat tällöin erivärisiä pareja, ja kullakin suoralla on enintään yksi A:han kuuluva "irtopiste". Kullakin suoralla olevien valkoisten ja punaisten pisteiden lukumäärien ero on enintään yksi.

87.1. Liitetään jokaiseen permutaatioon jono $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, missä $a_i = 1$, jos i on permutaation kiintopiste, ja $a_i = 0$ muulloin. Silloin $k \cdot p_n(k)$ ilmoittaa, kuinka monta ykköstä on jonoissa, jotka liittyvät permutaatioihin, joilla on tasan k kiintopistettä ja $\sum_{k=1}^{n} kp_n(k)$ on kaikissa jonoissa olevien ykkösten määrä. Toisaalta niitä jonoja, joissa i:s luku on ykkönen eli joille i on kiintopiste, on $(n-1)!$ kappaletta, ja ykkösiä on siten yhteensä $n \cdot (n-1)! = n!$ kappaletta.

87.2 Koska $KL \perp AB$ ja $LM \perp AC$, nelikulmion $AKLM$ ympäri voidaan piirtää ympyrä. Se leikkaa sivun BC pisteissä L ja P. Kehäkulmalauseesta ja siitä, että AL puolittaa kulman BAC, seuraa $\angle NBC = \angle NAC = \angle NAB = \angle BPK$. Siis $NB \| KP$. Kolmioilla KPN ja KPB on näin ollen sama kanta ja korkeus, joten niiden alat ovat yhtä suuret. Samoin osoitetaan, että $NC \| PM$, josta seuraa kolmioiden MPC ja MPN alojen yhtäsuuruus. Mutta kolmion ABC ala saadaan lisäämällä nelikulmion $AKPM$ alaan kolmioiden KPB ja MPC alat ja nelikulmion $AKNM$ ala saadaan lisäämällä nelikulmion $AKPM$ alaan kolmioiden KNP ja MPN alat. Väite seuraa.

87.3. Jos $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ on jono lukuja, joille pätee $0 \le b_i \le k-1$ kaikilla i, niin Cauchyn – Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$(b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n)^2 \le (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \le n(k-1)^2.$$

Sanotun ehdon täyttäviä jonoja on k^n kappaletta. Jos väli $[0, (k-1)\sqrt{n}]$ jaetaan $(k^n - 1)$:een yhtä pitkään osaväliin, täytyy laatikkoperiaatteen nojalla ainakin yhteen väliin osua kaksi eri jonoihin liittyvää summaa $\sum_{I=1}^{n} b_ix_i$ ja $\sum_{i=1}^{n} c_ix_i$. Jos $a_i = b_i - c_i$, niin summa $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ täyttää kaikki tehtävän ehdot.

87.4. Oletetaan, että funktiolle f on voimassa $f(f(n)) = n + 1987$. Silloin $f(n) \neq f(m)$ aina kun $n \neq m$. Lisäksi $f(n + 1987) = f(f(f(n))) = f(n) + 1987$ kaikilla n, josta induktiolla saadaan heti $f(n + 1987 \cdot k) = f(n) + 1987 \cdot k$. Tarkastellaan lukuja $f(r)$, $0 \le r \le 1986$. Aina pätee $f(r) = q + 1987 \cdot k$, missä $0 \le q \le 1986$. Koska $f(q)+1987\cdot k = f(q+1987\cdot k) = f(f(r)) = r+1987 < 2\cdot 1987$, niin $k \le 1$. Jos $k = 0$, niin $f(q) = f(f(r)) = r+1987$. Jos $k = 1$, niin $f(q)+1987 = f(q+1987) = f(f(r)) = r+1987$, joten $f(q) = r$. Luvut 0, 1, ..., 1986 jakautuvat kahteen erilliseen joukkoon: joukon A luvuille on voimassa $f(r) = q + 1986$ ja joukon B luvuille $f(r) = q$. Yllä sanotun mukaan, jos $r \in A$, niin $f(r) \in B$ ja jos $r \in B$, niin $f(r) \in A$. Täten joukoissa A ja B on yhtä monta lukua. Mutta joukoissa on yhteensä pariton määrä lukuja. Ristiriita, joten tehtävän ominaisuuksilla varustettua funktiota ei ole olemassa.

87.5. Valitaan pisteiksi paraabelin $y = x^2$ pisteet $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$, $\ldots$, (n, n^2). Jos $1 \le i < j < k \le n$, niin pisteiden (i, i^2), (j, j^2) ja (k, k^2) määrittämän kolmion ala saadaan laskettua puolisuunnikkaan alan kaavasta, ja se on

$$\frac{k^2 - i^2}{2}(k - i) - \frac{k^2 - j^2}{2}(k - j) - \frac{j^2 - i^2}{2}(j - i).$$

Ala on varmasti rationaalinen ja positiivinen. Pisteiden (i, i^2) ja (j, j^2) etäisyys on

$$(j - i)\sqrt{1 + (i + j)^2}.$$

Jotta etäisyys olisi rationaalinen, on oltava

$$1 + (i + j)^2 = \frac{p^2}{q^2},$$

missä p ja q ovat kokonaislukuja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Mutta silloin on oltava $q = 1$ ja $1 + (i+j)^2 = p^2$. Tämä on mahdotonta, sillä $(i+j)^2 < 1 + (i+j)^2 < (1+i+j)^2$.

87.6. Ellei $f(k) = k^2 + k + n$ ole alkuluku kaikilla k, $0 \le k < n - 1$, on olemassa pienin y, $y < n-1$, jolla $f(y)$ on yhdistetty luku. Olkoon q luvun $f(y)$ pienin alkutekijä. Oletetaan, että $q \le 2y$. Kun $x = 0, 1, \ldots, y-1$, niin erotusten $f(y)-f(x) = (y-x)(y+x+1)$ tekijöissä ovat luvut $0, 1, \ldots, 2y$, joten erotuksista yksi, $f(y) - f(z)$, on jaollinen q:lla. Koska $f(z)$ on alkuluku ja $f(y)$ jaollinen q:lla, niin $f(z) = q$. Toisaalta $q = y - z$ tai $q = y + z + 1$. Mutta $y - z \le n - 2 < n < f(z)$ ja $y + z + 1 \le n - 2 + z + 1 < n + z + z^2 = f(z)$. Ristiriita, joten on oltava $q \ge 2y+1$. Koska q on $f(y)$:n pienin alkutekijä, $y^2+y+n = f(y) \ge q^2 \ge 4y^2+4y+1$. Tästä seuraa, että $y \le \sqrt{\dfrac{n}{3}}$, mikä taas on ristiriidassa tehtävän oletuksen kanssa.

88.1. Olkoon ympyröiden keskipiste O ja janan BC keskipiste N. Pythagoraan lauseen nojalla

$$\begin{aligned} BC^2 + CA^2 + AB^2 &= (BP + PC)^2 + PA^2 + PC^2 + PA^2 + BP^2 \\ &= 2(PA^2 + PB^2 + PC^2 + BP \cdot PC). \end{aligned}$$

Lausutaan janat ympyröiden säteiden ja kulman $\alpha = \angle OPA$ avulla: $PA = 2r\cos\alpha$, $BP = BN - PN = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha} - r\sin\alpha$, $PC = PN + NC = BN + PN = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha} + r\sin\alpha$. Lisäksi pisteen potenssia koskevan lauseen nojalla $BP \cdot PC = (R+r)(R-r)$. Kun nämä sijoitetaan tutkittavaan summaan, sen arvoksi saadaan

$$2\left(4r^2\cos^2\alpha + 2(R^2 - r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha) + R^2 - r^2\right) = 6R^2 + 2r^2.$$

Koska tämä ei riipu α:sta, summan arvo on B:stä riippumaton; kohdassa (I) kysytyn joukon ainoa alkio on $6R^2 + 2r^2$.

Pisteen A kautta piirretty suoran BC suuntainen suora leikkaa isomman ympyrän pisteissä C' ja B'; valitaan pisteiden nimet niin, että $PAB'B$ on suorakulmio. Janan AB keskipiste Q on myös janan PB' keskipiste. Kun B kiertää ympyrän kehän, myös B' kiertää sen, ja keskipiste Q piirtää isomman ympyrän kanssa pisteen P suhteen suhteessa $1 : 2$ homoteettisen ympyrän.

88.2. Osoitetaan, että tehtävän mukainen nollien liittäminen B:n alkioihin onnistuu silloin ja vain silloin, kun n on parillinen. Osoitetaan ensin, että jokainen B:n alkio kuuluu tasan kahteen joukoista A_n. Koska jokainen B:n alkio kuuluu ainakin kahteen joukoista A_j, niin jokainen A_j on joukkojen $A_i \cap A_j$, $j \neq i$, yhdiste. Jos olisi $a \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$, niin ehdon (b) perusteella $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = \{a\}$, ja A_1:ssä olisi enintään $2n-1$ alkiota a, $A_1 \cap A_4, \ldots, A_1 \cap A_{2n+1}$. Oletetaan sitten, että vaadittu nollien ja ykkösten sijoittelu on tehty. Muodostetaan $2n \times 2n$ taulukko, jonka i:nnellä rivillä ja j:nnessä sarakkeessa on $A_i \cap A_j$:n alkion numero, jos $i \neq j$. Taulukon päälävistäjän i:nnelle riville sijoitetaan $A_i \cap A_{2n+1}$:n alkion numero. Tällöin taulukon jokaisella rivillä on n nollaa, ja koko taulukossa siis $2n^2$ nollaa. Koska taulukko on symmetrinen, niin päälävistäjän ulkopuolella olevien nollien määrä on parillinen. Siten myös päälävistäjällä olevien nollien määrä on parillinen. Päälävistäjällä olevien nollien määrä on joukon A_{2n+1} alkioihin liittyvien nollien määrä eli n. Siis n on välttämättä parillinen.

On vielä osoitettava, että nollien sijoitus on mahdollinen aina kun n on parillinen. Kun $n = 2$, sijoittelu käy taulukon

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mukaisesti. Kun $n = 2k$, sijoittelu saadaan toistamalla taulukkoa T, siis $2n$-rivisen taulukon

$$\begin{bmatrix} T & T & \ldots & T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T & T & \ldots & T \end{bmatrix}$$

mukaisesti.

88.3. Pienillä n:n arvoilla $f(n)$:n arvot ovat

n	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(n)$	:	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15	1	17

Muotoillaan tämän perusteella hypoteesi: $f(n)$ on luku, joka saadaan lukemalla n:n binääriesitys takaperin. Riittää, kun hypoteesi todistetaan parittomille n:ille, koska $f(2n) = f(n)$. Käytetään induktiotodistusta; väite on tosi, kun $n = 1$ ja $n = 3$. Olkoon $n = 4m + 1 = \sum_{j=0}^{k} a_j 2^j$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Silloin $m = \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{j-2}$ ja $2m + 1 = 1 + \sum_{j=1}^{k} a_j 2^{j-1}$.

Induktio-oletuksen perusteella $f(2m+1) = 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{k-1-(j-1)} = 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{k-j}$ ja $f(m) = \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{k-j}$, joten

$$f(4m+1) = 2f(2m+1) - f(m) = 2^k + \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{k-j} = \sum_{j_0}^{k} a_j 2^{k-j}.$$

Samoin, jos $n = 4m + 3 = \sum_{j=0}^{k} a_j 2^j$, $a_0 = a_1 = 1$, saadaan $m = \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{j-2}$, $2m + 1 = 1 + \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{j-1}$ ja induktio-oletukseen nojautuen

$$f(4m+3) = 3f(2m+1) - 2f(m) = 2^k + 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{k-j}.$$

Hypoteesi on todistettu.

Tehtävä ratkaistaan, kun lasketaan, kuinka monella luvulla n, $1 \le n \le 1988$ on binääriesitys, joka on sama alusta loppuun ja lopusta alkuun. Tällaisia lukuja kutsutaan binääripalindromeiksi. Tällaisia $2m$-numeroisia lukuja on 2^{m-1} kappaletta (ensimmäinen numero on 1 ja seuraavat $m-1$ numeroa voi valita vapaasti) ja $2m-1$ numeroisia myös 2^{m-1} kappaletta (ensimmäinen numero 1, seuraavat $m-1$ voi valita vapaasti). Nyt $2^{10} < 1988 < 2^{11}$. Lukua 2048 pienempiä binääripalindromeja on siten $1+1+2+2+4+4+8+8+16+16+32 = 94$ kappaletta. Koska $1988 = (11111000100)_2$, vain kaksi 11-numeroisista binääripalindromeista on suurempia kuin 1988. Kysytty luku on 92.

88.4. Epäyhtälön vasemman ja oikean puolen erotus voi vaihtaa merkkiään vasemman puolen epäjatkuvuuskohdissa k, $k = 1, 2, \ldots, 70$ ja astetta 70 olevan polynomin

$$P(x) = 5\prod_{j=1}^{70}(x-j) - 4\sum_{k=1}^{70}\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{70}(x-j)$$

nollakohdissa x_i. Koska epäyhtälön vasen puoli lähestyy $-\infty$:tä, kun x lähestyy k:ta vasemmalta, ja $+\infty$:tä, kun x lähestyy k:ta oikealta, niin $i < x_i < i+1$, kun $i = 1$, $2, \ldots, 69$ ja $70 < x_{70}$. Polynomin P juurien summa on laskettavissa P:n astetta 69 olevan termin kertoimesta, ja se on $\displaystyle\sum_{j=1}^{70} j + \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} k$ Kysytty välien pituuksien summa on $\displaystyle\sum_{i=1}^{70}(x_i - i) = \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} k = 1988.$

88.5. Olkoon $BC = a$, $AB = c$, $CA = b$. Olkoot X ja Y kolmioiden ABD ja ADC sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet, r ja R niiden säteet ja E sekä F pisteet, joissa kolmion ABD sisään piirretty ympyrä sivuaa AB:tä ja AD:tä sekä G ja H pisteet, joissa kolmion ADC sisään piirretty ympyrä sivuaa AD:tä ja AC:tä. Olkoon $AD = h$. Jos N on se AC:n piste, jossa $AC \perp XN$ ja P se XN:n piste, jossa $YP \perp XN$, niin

$$\begin{aligned} XN &= EA = AF = h - r \\ XP &= XN - PN = XN - YH = h - r - R \\ YP &= HN = AH - AN = AG - r = h - R - r. \end{aligned}$$

Siis XPY on tasakylkinen suorakulmainen kolmio. Muta tällöin myös KEX ja KAL ovat tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita, ja $KE = r$, $AK = XN + KE = h$. Täten

$$\frac{S}{T} = \frac{ah}{h^2} = \frac{a}{h} = \frac{a^2}{ah} = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2+c^2}{bc} \ge 2.$$

88.6. Oletetaan, että

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k,$$

missä k on positiivinen kokonaisluku mutta k ei ole kokonaisluvun neliö. Erityisesti $k \geq 2$. Silloin a ja b toteuttavat yhtälön

$$a^2 - kab + b^2 = k. \tag{1}$$

Yhtälön (1) kaikille ratkaisuille (a, b) pätee joko $a > 0$ ja $b > 0$ tai $a < 0$ ja $b < 0$. (Selvästikin $a, b \neq 0$ ja jos olisi $ab < 0$, olisi $a^2 - kab + b^2 > k$.) Tarkastellaan kaikkia niitä (1):n ratkaisuja, joissa $a > 0$ ja $b > 0$. Tällöin aina $a \neq b$, sillä jos olisi $a = b$, olisi $(2-k)a^2 = k$, missä vasen puoli on ei-positiivinen. Olkoon erityisesti (a, b) se tarkasteltavista ratkaisuista, jossa a on pienin mahdollinen. Jos (1):tä pidetään a:n toisen asteen yhtälönä, niin (1):llä on kaksi juurta, a ja a_1. Koska $a + a_1 = kb$, myös a_1 on kokonaisluku. Yllä sanotun nojalla $a_1 > 0$, koska $b > 0$. Lisäksi $aa_1 = b^2 - k$, joten

$$a_1 = \frac{b^2-a}{a} < \frac{a^2-1}{a} < a.$$

Tämä on ristiriidassa a:n oletetun minimaalisuuden kanssa!

89.1. Olkoon $A'_i = B_i \cup C_i$, $i = 1, 2, \ldots, 117$, missä $B_i = \{i + 117 \cdot k | 0 \leq k \leq 8\}$ ja $C_i = \{1990 - x | x \in B_i\}$. Selvästi $A'_i \cap A'_j = \emptyset$, kun $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{117} B_i = \{1, 2, \ldots, 936\}$ ja $\bigcup_{i=1}^{117} C_i = \{1054, 1055, \ldots, 1989\}$. Kaikkien joukkojen A'_i alkioiden summa on 15920. Olkoon nyt

$$A_i = (A'_i \setminus \{i\}) \cup \{60-i\} \cup \{995+2i-60\}, \quad \text{kun } 1 \leq i \leq 59,$$
$$A_i = (A'_i \setminus \{i\}) \cup \{177-i\} \cup \{995+2i-177\}, \quad \text{kun } 60 \leq i \leq 117.$$

Näissä operaatioissa A'_i:n ja A'_{60-i}:n tai A'_i:n ja A'_{117-i}:n pienimmät alkiot vaihdetaan keskenään ja mukaan otetaan lisäksi kaikki luvut 937, 938, ..., 1053, yksi kuhunkin joukkoon. Täten A_i:t ovat edelleen erillisiä ja $\bigcup_{i=1}^{117} A_i = \{1, 2, \ldots, 1989\}$. Jokaisen joukon A_i alkioiden summa on A'_i:n alkioiden summa lisättynä 995:llä. Summat ovat samat.

89.2. Olkoon I kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste. Silloin (esimerkiksi) $\angle ACA_0 = 90°$. Jos kolmion ABC kulmat ovat 2α, 2β ja 2γ, niin $\angle A_1IC = \alpha + \gamma$ ja koska $\angle BAA_1 = \angle BCA_1$, niin $\angle ICA_1 = \alpha + \gamma$. Siis $IA_1 = A_1C$. Toisaalta $\angle IA_0C = 90° - \angle A_0IC = 90° - \alpha - \gamma$ ja $\angle A_1CA_0 = 90° - \angle A_1CI = 90° - \alpha - \gamma$. Siis $A_0A_1 = A_1C$ ja edelleen $IA_1 = A_1C$. Täten kolmioilla IA_1C ja CA_1A_0 on sama ala. Tehtävän ensimmäinen väite seuraa heti.

Olkoon H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste. Kulman kylkien kohtisuoruuden nojalla $\angle BCH = \angle BAH$ ja $\angle HBC = \angle HAC$. Siis $\angle BHC = 180° - \angle BAC$. Jos X on pisteen H peilikuva sivun BC suhteen, niin $\angle BXC + \angle BAC = 180°$, joten X on samalla ympyrällä kuin A, B ja C. Jos Y ja Z ovat vastaavasti H:n peilikuvat sivujen CA ja AB suhteen, niin $AZBXCY$ on ympyrän sisään piirretty kuusikulmio, jonka ala on kaksi kertaa kolmion ABC ala. Koska A_1, B_1 ja C_1 ovat kaarien BC, CA ja AB keskipisteet, kolmioiden BA_1C, CB_1A ja AC_1B alat ovat suurempia tai yhtä suuria kuin kolmioiden BXC, CYA ja AZB alat. Kuusikulmion $AC_1BA_1CB_1$ ala on siten ainakin kaksi kertaa niin suuri kuin kolmion ABC ala. Tehtävän toinen väite saadaan, kun tämä erisuuruus yhdistetään jo todistettuun ensimmäiseen väitteeseen.

89.3. Tehdään vastaoletus $k \ge \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}n$. Jokaista S:n pistettä P kohden on ainakin $\dbinom{k}{2}$ S:n pisteparia $(A,\ B)$, joille P on janan AB keskinormaalilla. Tällaisia kolmikkoja $(A,\ B;\ P)$ on ainakin

$$n \cdot \binom{k}{2} = \frac{n}{2}k(k-1) \ge \frac{n}{2}(\sqrt{2}n + \frac{1}{2})(\sqrt{2}n - \frac{1}{2}) = n^2 - \frac{1}{8} > n(n-1) = 2\binom{n}{2}$$

kappaletta. Jokin pari $(A,\ B)$ esiintyy kolmikoissa useammin kuin kahdesti; vastaavat pisteet P_1, P_2 ja P_3 ovat kaikki AB:n keskinormaalilla ja siis samalla suoralla.

89.4. Olkoon $AD = R$ ja $BC = r$. Koska P-keskisen h-säteisen ympyrän on sivuttava A-keskistä R-säteistä ympyrää, B-keskistä r-säteistä ympyrää ja suoraa DC, nähdään jokseenkin välittömästi, että suurin mahdollinen h:n arvo esiintyy tilanteessa, jossa $AD \perp DC$ ja $BC \perp DC$. Tässä tapauksessa

$$CD^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4rR, \tag{1}$$

ja jos CD ja P-keskinen h-säteinen ympyrä sivuavat pisteessä M, niin

$$\begin{aligned} CD = CM + MD &= \sqrt{(r+h)^2 - (r-h)^2} + \sqrt{(R+h)^2 + (R-h)^2} \\ &= 2\sqrt{rh} + 2\sqrt{Rh}. \end{aligned} \tag{2}$$

Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Koska yleisessä tapauksessa h on pienempi, saadaan tehtävän väitteenä oleva epäyhtälö.

89.5. Olkoon $N = ((n+1)!)^2 + 1$. Silloin $k+1$ on luvun $N+k$ aito tekijä, kun $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Jos nyt olisi $N + k = p^m$ jollakin alkuluvulla p, niin olisi $k + 1 = p^j$, $0 < j < m$. Mutta koska $1 + k \le n + 1$, niin p^{j+1} olisi $((n+1)!)^2$:n tekijä ja $((n+1)!)^2 + k$:n tekijä. Erityisesti p olisi k:n ja $k+1$:n tekijä. Siispä mikään n:stä luvusta $N+1$, $N+2, \ldots N+n$ ei ole alkuluvun kokonaislukueksponenttinen potenssi.

89.6. Tehtävässä tarkastellaan lukujoukkoa S_n, jonka $2n$ suuruusjärjestyksessä olevaa alkiota (esim. $1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$) jakautuvat n:ksi *kaksospariksi*, esim. $\{1,\ 1+n\}$, $\{2,\ 2+n\}$, $\ldots$, $\{n,\ 2n\}$. Tälalisen joukon permutaation $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2n})$ sanomme olevan tyyppiä T_k, jos lukuparien $(x_i,\ x_{i+1})$ joukossa on k kaksosparia. Olkoon $F_k(n)$ tyyppiä T_k olevien permutaatioiden lukumäärä.

Olkoon nyt $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ jokin joukon S_n tyyppiä T_0 oleva permutaatio. Poistetaan x_{2n} ja sen kaksospari. Syntyvä $2(n-1)$-alkioinen joukko S_{n-1} muodostuu edelleen kaksospareista, ja poiston jälkeen jäävä permutaatio on joko tyyppiä T_0 tai T_1. Edellisessä tapauksessa $2n(2n-2)$ alkuperäisen joukon eri permutaatiota tuottavat saman S_{n-1}:n permutaation (x_{2n} voi olla mikä tahansa joukon alkio ja x_{2n-1} voi olla mikä tahansa muu kuin x_{2n} tai sen kaksospari). Jälkimmäisessä tapauksessa $2n$ alkuperäisen joukon eri permutaatiota tuottavat saman S_{n-1}:n permutaation (x_{2n} voi olla mikä hyvänsä joukon alkio, mutta x_{2n}:n parin on oltava täsmälleen tuotetun permutaation vierekkäin olevien alkioiden välissä). Siis

$$F_0(n) = 2n\left((2n-2)F_0(n-1) + F_1(n-1)\right). \tag{1}$$

Olkoon sitten $(x_1, x_s, \ldots, x_{2n})$ jokin joukon S_n tyyppiä T_1 oleva permutaatio. Kun tästä permutaatiosta poistetaan sen ainoa kaksospari (x_i, x_{i+1}), syntyy joko T_0- tai T_1-tyyppinen permutaatio. Mahdollisia kaksospareja on n kappaletta, ja kukin voidaan järjestää kahdella tavalla. Edellisessä tapauksessa pari voi olla missä hyvänsä $2n-1$:stä eri asemasta, jälkimmäisessä tapauksessa täsmälleen siinä asemassa, jonka määrittää syntyvässä T_1-permutaatiossa oleva kaksospari. Siis

$$F_1(n) = 2n\left((2n-1)F_0(n-1) + F_1(n-1)\right). \tag{2}$$

Kun (2):sta vähennetään (1), saadaan $F_1(n) = F_0(n) + 2nF_0(n-1)$. Kun tämä sijoitetaan (1):een, saadaan palautuskaava

$$F_0(n) = 2n\left((2n-1)F_0(n-1) + (2n-2)F_0(n-2)\right). \tag{3}$$

Jos $P(n)$ on T_0-tyyppisten permutaatioiden lukumäärän suhde kaikkien permutaatioiden lukumäärään, niin (3):n perusteella

$$P(n) = \frac{F_0(n)}{(2n)!} = P(n-1) + \frac{P(n-2)}{(2n-3)(2n-1)},$$

josta

$$P(n) - P(n-1) < \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right).$$

Selvästi $P(1) = 0$ (kuvatussa prosessissa poistettiin aina pareja!), joten

$$P(n) = \sum_{k=2}^{n}\left(P(k) - P(k-1)\right) < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) < \frac{1}{2}.$$

Tämä on yhtäpitävää väitteen kanssa.

90.1. Osoitetaan ensin, että piste A on pisteiden G ja C välissä. Selvästikin $\angle EDM < \angle EDB$. Yhtä suurina kehäkulmina $\angle FEB = \angle EDM$ ja $\angle CAB = \angle BDE$. Täten $\angle FEB < \angle CAB$, mistä väite seuraakin.

Piirretään kuvioon janat DA, DM ja DB. Nyt $\angle CEF = \angle DEG = \angle EMD$ (kehäkulmat) ja $\angle FCE = \angle MAD$. Silloin kolmiot CEF ja AMD ovat yhdenmuotoiset, joten $\frac{CE}{EF} = \frac{AM}{DM}$. Toisaalta kehäkulmalausetta ja kolmion kulman vieruskulmaa koskevaa lausetta soveltaen saadaan $\angle ECG = \angle DBM$ ja $\angle CGE = \angle CEF - \angle ECG = \angle DME - \angle DBM = \angle MDB$, joten myös kolmiot CGE ja BDM ovat yhdenmuotoiset ja $\frac{GE}{CE} = \frac{DM}{MB}$. Kun johdetut verrannot kerrotaan keskenään, saadaan

$$\frac{GE}{EF} = \frac{AM}{AB} = \frac{t\,AB}{(1-t)\,AB} = \frac{t}{1-t}.$$

90.2. Sanomme kahta E:n pistettä *naapureiksi*, mikäli jommalla kummalla pisteiden välisistä ympyränkaarista on sisäpisteinä täsmälleen n joukon E pistettä. Etsimme pienintä lukua k, jolle jokainen E:n k-alkioinen osajoukko sisältää ainakin kaksi pistettä, jotka ovat naapureita.

Yhdistetään jokaiset kaksi naapuria janalla. Koska joka pisteellä on tasan kaksi naapuria, syntyy yhdestä tai useammasta suljetusta murtoviivasta koostuva kuvio. Numeroidaan E:n pisteet ympyrän kehällä järjestyksessä numeroin $0, 1, 2, \ldots, 2n-2$. Tällöin kuvioon kuuluva murtoviiva sisältää pisteet $r+s(n+1)$ mod $2n-1$, missä r on jokin kyseisen murtoviivan piste ja $s = 0, 1, \ldots, 2n-2$ (samat pisteet saattavat esiintyä jonossa useamminkin). Koska $d = (n+1, 2n-1)$ on pienin muotoa $x(n+1)+y(2n-1)$ oleva positiivine kokonaisluku, murtovoiiva, johon kuuluu piste nolla sisältää pisteet 0, d, $2d$, jne., Tästä päätellään, että jokaisen suljetun murtoviivan kärkien lukumäärä on $(2n-1)/d$. On olemassa kaksi vaihtoehtoa:

(a) Jos $2n-1$ ei ole jaollinen kolmella, niin

$$d = (2n-1,\, 2(n+1)) = (2n-1,\, (2n-1)+3) = (2n-1,\, 3) = 1.$$

Suljettuja murtoviivoja on vain yksi.

(b) Jos $3 \mid (2n-1)$, niin $d = 3$. Suljettuja murtoviivoja on kolme.

Tämän jälkeen pienin luvun k arvo on helppo päätellä kummassakin tapauksessa erikseen. Väritys on hyvä, jos ja vain jos kaksi saman suljetun murtoviivan peräkkäistä pistettä on mustia. Tapauksessa (a) pienin k on n, tapauksessa (b) pienin k:n arvo on

$$3\left(\frac{2n-1}{6} - \frac{1}{2}\right) + 1 = n - 1.$$

90.3. Osoitetaan, että ainoa ratkaisu on $n = 3$. Oletetaan että $n = 3^k d$, missä $k \geq 0$ ja $(d, 6) = 1$ on ratkaisu. Osoitetaan ensin, että $k \leq 1$. Olkoon $k \geq 2$. Sovelletaan kaavaa $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ induktiivisesti; saadaan

$$2^n + 1 = 2^{3^k d} + 1 = (2^d + 1) \prod_{m=0}^{k-1} \left(2^{2\cdot 3^m d} - 2^{3^m d} + 1\right).$$

Kun käytetään hyväksi tietoa $2^6 \equiv 1 \bmod 9$ ja kokeillaan arvoja $t = 1, 3, 5$, nähdään, että $2^{2t} - 2^t + 1 \equiv 3 \bmod 9$ kaikilla parittomilla t. Siispä yllä olevassa hajotelmassa tätä muotoa olevat tulon tekijät eivät ole jaollisia 9:llä. Koska kuitenkin $2^n + 1$ (joka on jaollinen n^2:lla) on jaollinen 3^{2k}:lla, niin $2^d + 1$ on jaollinen 3^k:lla. Mutta kun sovelletaan tietoja $(d, 6) = 1$ ja $2^6 \equiv 1 \bmod 9$ ja kokeillaan arvoja $d = 1$ ja $d = 5$ nähdään, että 9 ei ole $(2^d + 1)$:n tekijä. Siis $k = 0$ tai $k = 1$.

Todistetaan sitten, että $d = 1$. Tähän tarvitaan aputulos: jos $a^r \equiv a^r \equiv 1 \bmod p$, niin $a^(r, s) \equiv 1 \bmod p$. Aputuloksen todistamiseksi valitaan ε pienimmäksi eksponentiksi, jolle $a^\varepsilon \equiv 1 \bmod p$. Jos r ei ole jaollinen ε:lla, niin $r = f\varepsilon + g$, missä $0 < g < \varepsilon$. Tällöin $a^g \equiv a^{f\varepsilon+g} = a^r \equiv 1$, mikä on vastoin ε:in määritelmää. Tästä seuraa $a^{(r,s)} = a^{h\varepsilon} \equiv 1$ eli väite.

Oletetaan sitten, että $d \neq 1$. Olkoon p luvun d pienin alkutekijä. Välttämättä $p \geq 5$. Koska $2^n + 1$ on jaollinen p:llä, $2^n \equiv -1 \bmod p$ eli $2^{2n} \equiv 1 \bmod p$. Toisaalta Fermat'n pienen lauseen nojalla $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, joten aputuloksen perusteella $2^j \equiv 1 \bmod p$, missä $j = (p-1, 2n)$. Nyt joko $2n = 2d$ tai $2n = 6d$, ja $(j, d) = 1$. Tästä seuraa, että $j|6$ eli j on jokin luvuista 1, 2, 3 ja 6. Koska $2^j - 1$ on jaollinen p:llä, niin jokin luvuista 1, 3, 7 ja 63 on jaollinen p:llä. Ainoa mahdollisuus on $p = 7$. Toisaalta kokeilemalla eksponenteilla $0, 1, 2, \ldots, 5$ nähdään, että $2^m + 1$ ei ole millään kokonaisluvulla m jaollinen 7:llä. Oletus $7|(2^n + 1)$ johti siis ristiriitaan.

On siis $d = 1$, ja ainoa ratkaisu $n > 1$ on $n = 3^1 \cdot 1 = 3$.

90.4. Kun tehtävän funktionaaliyhtälöön sijoitetaan $x = 1$, nähdään, että $y = f(1)/f(f(y))$. Jos $f(y_1) = f(y_2)$, niin $y_1 = y_2$, eli f on injektio. Sijoittamalla edelleen $y = 1$ saadaan $f(f(1)) = f(1)$, joten injektiivisyyden perusteella $f(1) = 1$. Siis

$$f(f(y)) = \frac{1}{y} \tag{1}$$

kaikilla y. Tästä ja funktionaliyhtälöstä seuraa $f(1/y) = 1/f(y)$. Kun alkuperäiseen yhtälöön sijoitetaan $y = f(1/t)$, saadaan

$$f(xt) = f(x)f(t). \tag{2}$$

Heti nähdään, että ehdot (1) ja (2) toteuttava funktio f toteuttaa tehtävän funktionaaliyhtälön.

Ehdon (2) toteuttava funktio voidaan määritellä mielivaltaisesti alkuluvuille p_i ja laajentaa se positiivisten kokonaislukujen joukkoon kaavalla

$$f(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}) = f(p_1)^{n_1} f(p_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot f(p_k)^{n_k}. \tag{3}$$

(n_i:t kokonaislukuja). (2):n perusteella funktio voidaan edelleen jatkaa positiivisten rationaalilukujen joukkoon asettamalla

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)}.$$

Tällainen funktio toteuttaa ehdon (1) jos ja vain jos se toteuttaa ehdon (1) kaikilla alkuluvuilla. Olkoon p_j j:s alkuluku. Määritellään $f(p_{2j}) = p_{2j-1}$ ja $f(p_{2j-1}) = 1/p_{2j}$. Suora lasku osoittaa, että $f(f(p)) = 1/p$ kaikilla alkuluvuilla. Tehtävän ehdot toteuttava funktio saadaan, kun tämä funktio laajennetaan positiivisten rationaalilukujen joukkoon kaavoilla (3) ja (2).

90.5. Merkitään W_A:lla, W_B:llä ja W_T:llä niiden lukujen n_0 joukkoja, joilla A:lla on voittostrategia, B:llä on voittostrategia tai kummallakaan pelaajalla ei ole voittostrategiaa. Oletetaan, että $\{m,\, m+1,\, \ldots,\, 1990\} \subset W_A$. Todistetaan ensin, että jos $mp^r \le s \le 1990$, missä p^r on suurin s:n alkuluvun potenssin muotoinen tekijä, niin myös ehdon $\sqrt{s} \le n_0 \le m$ toteuttavat luvut n_0 kuuluvat joukkoon W_A. Jos nimittäin $\sqrt{s} \le n_0 < m$, niin A voi valita $n_1 = s$. Silloin pelaaja B joutuu valitsemaan ehdon $m \le s/p^r \le n_2 < s \le 1990$ toteuttavan luvun n_2. Koska $n_2 \in W_A$, A voittaa.

Koska $45^2 > 1990$, niin $\{45,\, 46,\, \ldots,\, 1990\} \subset W_A$. Valitsemalla $m = 45$, $s = 420 = 2^2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7$ nähdään, että $\{21,\, 22,\, \ldots,\, 44\} \subset W_A$. Muuttujien arvot $m = 21$, $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$; $m = 13$, $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ ja $m = 11$, $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ antavat $\{13,\, 14,\, \ldots,\, 20\} \subset W_A$, $\{11,\, 12\} \subset W_A$ ja $\{8,\, 9,\, 10\} \subset W_A$. Siis $\{8,\, 9,\, \ldots,\, 1990\} \subset W_A$.

Olkoon sitten $n_0 > 1990$. Nyt pelaaja A voi valita väliltä $[n_0,\, n_0 + 142]$ luvun n_1, joka on jaollinen luvulla $143 = 11 \cdot 13$. Silloin pelaaja B joutuu valitsemaan luvun n_2, jolle pätee $11 \le n_2 \le (142 + n_0)/2 < n_0$. Kun pelaaja A soveltaa tätä taktiikkaa riittävän kauan, joutuu pelaaja B lopulta valitsemaan luvun väliltä $[11,\, 1990]$, jolloin A pystyy varmistamaan voiton. Siis kaikki lukua 1990 suuremmat luvut kuuluvat joukkoon W_A.

Tarkastellaan sitten tapausta $n_0 \le 5$. Koska pienin kolmen eri alkuluvun tulo on $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, niin pelaaja A joutuu valitsemaan luvun, joka on enintään kahden alkulukupotenssin tulo. Tämän jälkeen B voi valita seuraavaksi luvuksi joko pienemmän näistä alkulukupotensseista tai peräti luvun 1; joka tapauksessa $n_2 < n_0$. Jatkamalla näin pelaaja B voi valita luvun 1 ja voittaa. Siis $\{2,\, 3,\, 4,\, 5\} \subset W_B$.

Jos $n_0 = 6$ tai 7, on pelaajan A valittava häviön välttääkseen joko $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ tai $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Tämän jälkeen B:n on valittava $n_2 = 6$. Valitsemalla vuorotellen 6, 30, 6, jne. pelaajat voivat estää toistensa voiton. Siis $\{6,\, 7\} = W_T$.

90.6. Todistetaan hiukan yleisempi tulos, jossa 1990 korvataan luvulla n. Oletetaan, että $n = prs$, missä luvut p, r ja s ovat ykköstä suurempia eikä niillä ole yhteisiä alkutekijöitä. Jos f, g ja h ovat mielivaltaisia kahden kokonaisluvun funktioita, niin pätee

$$\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{n}(jrs+kps+lpr)}(f(k,\, l) + g(l,\, j) + h(j,\, k)) = 0. \tag{1}$$

Jos nimittäin erotetaan summasta erilleen se osa, joka sisältää funktion f, saadaan nolla, sillä $\sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi ijrs/n} = \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi ij/p}$, mikä häviää geometrisen sarjan summan kaavan perusteella. Samoin päätellään, että myös funktion g ja funktion h sisältävät summan osat häviävät.

Seuraavaksi havaitaan, että luvut $jrs + kps + lpr$, missä $0 \le j < p$, $0 \le k < r$ ja $0 \le l < s$ muodostavat täydellisen jäännösluokan modulo n, sillä niitä on yhteensä n kappaletta ja mitkään kaksi eivät ole kongruentit keskenään: jos $j_1rs + k_1ps + l_1pr \equiv j_2rs + k_2ps + l_2pr \mod n$, niin $p|(j_1 - j_2)$ jne. Lisäksi luvut $jrs + ks + l$, missä $0 \le j < p$, $0 \le k < r$ ja $0 \le l < s$, käyvät läpi täsmälleen luvut $0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$.

Kirjoitetaan binomikaavan avulla $(jrs + ks + l + 1)^2$ muotoon $f(j,\, k) + g(k,\, l) + h(l,\, j)$ (näin voidaan tehdä useammallakin tavalla) ja sijoitetaan näin valitut funktion yhtälöön

(1). Edellä tehdyt huomiot takaavat, että

$$\sum_{t=0}^{n-1} e^{2\pi i t/n} m_t^2 = 0,$$

missä $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ ovat luvut $1, 2, \ldots, n$ jossain järjestyksessä.

Tulkitaan kompleksiluvut tuttuun tapaan geometrisesti ja muodostetaan murtoviiva, jonka perättäisinä sivuina ovat kompleksiluvut m_0^2, $m_1^2 e^{2\pi i/n}$, $m_2^2 e^{2\pi i\cdot 2/n}$, $\ldots$, $m_{n-1}^2 e^{2\pi i(n-1)/n}$. Tällöin murtoviivan perättäisten sivujen välinen kulma on sama ja murtoviiva on suljettu. On vielä osoitettava, että murtoviiva sijaitsee toisessa niistä puolitasoista, jotka sen mielivaltainen sivu määrää. Tarkastellaan esimerkiksi sivua m_0. Voidaan olettaa, että se sijaitsee positiivisella reaaliakselilla. Kompleksiluvuilla $m_t^2 e^{2\pi i t/n}$, $0 < t \le [n/2]$ on positiivinen imaginaariosa $m_t^2 \sin(2\pi t/n)$, joten vastaava monikulmion osa sijaitsee ylemmässä puolitasossa. Jäljelle jäävä osa monikulmiota voidaan ajatella konstruoiduksi niin, että vektorit $-m_t e^{2\pi i t/n}$, $t = n-1, n-2, \ldots, [n/2]+1$, asetetaan tässä järjestyksessä perätysten niin, että ensimmäisen alkupiste on origossa. Kuten edellä, nähdään, että tämäkin osa monikulmiota on ylemmässä puolitasossa. Todistus on vastaava muiden sivujen osalta.

Alkuperäinen tehtävä on tullut ratkaistuksi, sillä $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$.

91.1. Olkoon $a = BC$, $b = CA$ ja $c = AB$. Koska kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, on

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a}.$$

Koska $AC' + C'A = c$, saadaan

$$AC' = \frac{cb}{a+b}.$$

Koska AI on kolmion ACC' kulman A puolittaja, on vastaavasti

$$\frac{CI}{IC'} = \frac{b}{AC'} = \frac{a+b}{x}.$$

Näin ollen

$$\frac{CI}{CC'} = \frac{CI}{CI + IC'} = \frac{\frac{CI}{IC'}}{\frac{CI}{IC'} + 1} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Kun lasketaan vastaavat lausekkeet suhteille $\dfrac{BI}{BB'}$ ja $\dfrac{AI}{AA'}$, saadaan todistettava epäyhtälö yhtäpitävään muotoon

$$\frac{1}{4} < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \le \frac{8}{27}.$$

Tämän epäyhtälön oikea puoli seuraa suoraan lukujen $a+b$, $b+c$ ja $c+a$ aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä. Vasemmanpuoleisen epäyhtälön todistamiseksi merkitään

$$x = \frac{a+b-c}{a+b+c}, \quad y = \frac{a-b+c}{a+b+c}, \quad z = \frac{-a+b+c}{a+b+c}.$$

Koska a, b ja c ovat kolmion sivuja, x, y ja z ovat positiivisia. Lisäksi $x+y+z=1$. Todistettava epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $2 < (1+x)(1+y)(1+z) = 1+(x+y+z)+xy+\ldots$, ja se on ilmeisesti tosi.

91.2. Olkoon $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = S$. Huomataan, että $a_k = n-1$. Jos n on pariton, niin $a_1 = 1$ ja $a_2 = 2$, jolloin välttämättä $a_j = j$ kaikilla $j < n$. Tämä merkitsee, että n on alkuluku. Olkoon sitten n parillinen, mutta ei kakkosen potenssi: $n = 2^m s$, missä $m > 0$ ja $s \geq 3$, s pariton. Jos $s \geq 5$, niin luvut $s-4$, $s-2$, $s+2$ kuuluvat joukkoon S, mutta luvut $s-3$, $s-1$, s, $s+1$ ja $s+3$ eivät kuulu joukkoon S. Tämä on vastoin joukosta S tehtyä oletusta. Ainoa mahdollisuus on $s = 3$. Silloin $n \geq 12$ ja $S = \{1, 5, 7, 11, \ldots, n-1\}$, mikä myös on vastoin oletusta. Vain kakkosen potenssit tulevat parillisen n:n tapauksessa kysymykseen.

91.3. Merktään A_1:llä S:N parillisten alkioiden S_2:lla S:n kolmella jaollisten alkioiden, A_3:lla S:n viidellä jaollisten alkioiden ja A_4:llä S:n seitsemällä jaollisten alkioiden joukkoa. Olkoon $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Jos $|X|$ tarkoittaa joukon X alkioiden lukumäärää, niin $A = 216$. Jos joukosta A valitaan viisi lukua, niin niistä ainakin kaksi kuuluu samaa joukkoon A_j. Näillä kahdella on yhteinen tekijä. Tehtävän n on siis ainakin 217.

Olkoon $B_1 = A \setminus \{2, 3, 5, 7\}$ ja $B_2 = \{11^2, 11\cdot 13, 11\cdot 17, 11\cdot 19, 11\cdot 23, 13^2, 13\cdot 17, 13\cdot 19\}$ ja $P = S \setminus (B_1 \cup B_2)$. Joukon P alkiot ovat 1 ja S:n alkuluvut, ja $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 280 - 212 - 8 = 60$. Olkoon nyt $T \subset S$ joukko, jolle $|T| \geq 217$. Osoitetaan, että T sisältää viisi lukua, joista millään kahdella ei ole muita yhteisiä tekijöitä kuin 1. Voidaan olettaa, että $|T \cap P| \leq 4$. Joukossa on T on siis ainakin 213 yhdistettyä lukua. Koska joukossa S on 220 yhdistettyä lukua, S:ssä on enintään seitsemän T:hen kuulumatonta yhdistettyä lukua. Määritellään kahdeksan joukkoa M_i, $1 \leq i \leq 8$, seuraavasti:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{2\cdot 23,\ 3\cdot 19,\ 5\cdot 17,\ 7\cdot 13,\ 11\cdot 11\}\\
M_2 &= \{2\cdot 29,\ 3\cdot 23,\ 5\cdot 19,\ 7\cdot 17,\ 11\cdot 13\}\\
M_3 &= \{2\cdot 31,\ 3\cdot 29,\ 5\cdot 23,\ 7\cdot 19,\ 11\cdot 17\}\\
M_4 &= \{2\cdot 37,\ 3\cdot 31,\ 5\cdot 29,\ 7\cdot 23,\ 11\cdot 19\}\\
M_5 &= \{2\cdot 41,\ 3\cdot 37,\ 5\cdot 31,\ 7\cdot 29,\ 11\cdot 23\}\\
M_6 &= \{2\cdot 43,\ 3\cdot 41,\ 5\cdot 37,\ 7\cdot 31,\ 13\cdot 17\}\\
M_7 &= \{2\cdot 47,\ 3\cdot 43,\ 5\cdot 41,\ 7\cdot 37,\ 13\cdot 19\}\\
M_8 &= \{2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 13^2\}
\end{aligned}$$

Välttämättä ainakin yksi joukoista M_i kuuluu kokonaan T:hen. Mutta kaikkien M_i-joukkojen alkiot ovat parittain yhteistekijättömiä. Joukkoa T koskeva väite on todistettu. Tehtävän n on siis ≤ 217. Kaikkiaan on oltava $n = 217$.

91.4. Numeroidaan sivut seuraavasti: aloitetaan jostakin solmusta ja edetään peräkkäisiä vielä numeroimattomia sivuja pitkin varustaen ne ykkösestä alkaen peräkkäisillä numeroilla. Silloin, kun ei ole enää mahdollista jatkaa matkaa pitkin vielä numeroimatonta sivua, siirrytään johonkin solmuun, jonka kautta on jo kuljettu ja josta lähtee vielä numeroimaton sivu, ja toistetaan edellä kuvattu prosessi. Tämä on mahdollista, koska verkko oletettiin yhtenäiseksi. Menettelyä jatketaan, kunnes kaikki sivut on varustettu numeroilla. Jos verkon solmuun liittyy useampia kuin yksi sivu, niin joko solmuun liittyy kaksi sivua, joiden numerot ovat peräkkäiset tai sitten aloitussivu, jonka numero on 1. Kummassakin tapauksessa solmuun liittyvien sivujen numeroiden suurin yhteinen tekijä on 1.

91.5 Merkitään $a = BC$, $b = CA$ ja $c = AB$; $\angle PAB = \alpha'$, $\angle PBC = \beta'$ ja $\angle PCA = \gamma'$; $a' = PA$, $b' = PB$ ja $c' = PC$. Kosinilauseen perusteella

$$\begin{aligned} b'^2 &= a'^2 + c^2 - 2a'c\cos\alpha' \\ c'^2 &= b'^2 + a^2 - 2b'a\cos\beta' \\ a'^2 &= c'^2 + b^2 - 2c'b\cos\gamma', \end{aligned}$$

ja siis

$$2(a'c\cos\alpha' + b'a\cos\beta' + c'b\cos\gamma') = a^2 + b^2 + c^2.$$

Jos olisi $\alpha' > 30°$, $\beta' > 30°$ ja $\gamma' > 30°$, olisi

$$\sqrt{3}(a'c + b'a + c'b) > a^2 + b^2 + c^2. \tag{1}$$

Lasketaan kolmion ABC ala T kolmioiden PAB, PBC ja PCA alojen summana:

$$T = \frac{1}{2}(a'c\sin\alpha' + b'a\sin\beta' + c'b\sin\gamma').$$

Tehdyn oletuksen perusteella

$$T > \frac{1}{4}(a'c + b'a + c'b). \tag{2}$$

Epäyhtälöistä (1) ja (2) seuraa

$$T > \frac{1}{4\sqrt{3}}(^2 + b^2 + c^2).$$

Mutta Heronin kaavan ja Cauchy – Schwarzin epäyhtälön nojalla on

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\ &\le \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \\ \frac{1}{12\sqrt{3}}&(a+b+c)^2 \le \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi.

91.6. Esitetään lukujono, jolle tehtävän epäyhtälö on tosi jo arvolla $a = 1$. Koska $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku, niin $|2q^2 - p^2| \geq 1$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla p ja q. Jos $p < 2q$, niin tästä seuraa

$$|q\sqrt{2} - p| \geq \frac{1}{q\sqrt{2} + p} > \frac{1}{4q}. \tag{1}$$

Epäyhtälö (1) pätee luonnollisesti myös, kun $2q \leq p$. Asetetaan nyt $x_i = 4(i\sqrt{2} - [i\sqrt{2}])$. Silloin $|x_i| < 4$ kaikilla i, ja kun $i > j$ on

$$|i-j||x_i - x_j| = 4(i-j)|(i-j)\sqrt{2} - ([i\sqrt{2}] - [j\sqrt{2}])| > \frac{4(i-j)}{4(i-j)} = 1.$$

92.1. Oletetaan, että $(a-1)(b-1)(c-1)|abc - 1$. Jos jokin luvuista a, b, c on pariton, on luvulla $abc - 1$ parillinen tekijä $(a-1)(b-1)(c-1)$. Tämä on mahdollista vain, jos a, b ja c ovat kaikki parittomia. Siispä luvut a, b ja c ovat yhtä aikaa kaikki parillisia tai kaikki parittomia. Mikäli olisi $a \geq 4$, voitaisiin arvioida

$$\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < \frac{a}{a-1}\frac{b}{b-1}\frac{c}{c-1} \leq \frac{4}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5} = 2,$$

mikä on mahdotonta. Jos $a = 2$, niin $b \geq 4$ ja $c \geq 6$ ovat parillisa ja luku $(b-1)(c-1)$ itseään suuremman ja parittoman luvun $2bc-1$ tekijä. Arvion $5 \cdot (b-1)(c-1) = 2bc + 5 + c(2b-5) + b(c-5) > 2bc - 1$ nojalla ainoaksi vaihtoehdoksi jää $2bc - 1 = 3(b-1)(c-1)$ eli $(b-3)(c-3) = 5$. Koska 5 on alkuluku, on oltava $b-3 = 1$ ja $c-3 = 5$. Löydettiin ratkaisu $(a, b, c) = (2, 4, 8)$. Jos $a = 3$, $b \geq 5$ ja $c \geq 7$ ovat parittomia, ja $2(b-1)(c-1)$ on tekijänä itseään suuremmassa luvussa $3bc-1$. Koska $3 \cdot 2(b-1)(c-1) = 3bc + 6 + (2b-6)c + (c-6)b > 3bc - 1$, niin $3bc - 1 = 2 \cdot 2(b-1)(c-1)$ eli $(b-4)(c-4) = 11$, josta seuraa $b = 5$ ja $c = 15$. Tehtävällä on ratkaisut $(a, b, c) = (2, 4, 8)$ ja $(a, b, c) = (3, 5, 15)$.

92.2. Merkitään $f(0) = a$ ja $f(-a^2) = b$. Annetun funktionaaliyhtälön nojalla $f(b) = f(0^2 + f(-a^2)) = -a^2 + a^2 = 0$. Jos $f(x) = 0$, niin $a = f(0) = f(0^2 + f(x)) = x + a^2$, joten $x = a - a^2$. Siis b on funktion f ainoa nollakohta, ja $b = a - a^2$. Toisaalta $f(b^2 + a) = f(b^2 + f(0)) = 0$, joten on oltava $b^2 + a = a - a^2$, eli $a^2 + b^2 = 0$. Näin on osoitettu, että $a = f(0) = 0$.

Kun funktionaaliyhtälöön sijoitetaan y:n paikalle $f(y)$ ja $x = 0$ nähdään, että

$$f(f(y)) = y. \tag{1}$$

Sijoittamalla $y = 0$ saadaan

$$f(x^2) = (f(x))^2. \tag{2}$$

Viimeksi johdetun yhtälön nojalla $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 0$. Koska 0 on ainoa nollakohta, niin

$$f(x) > 0, \quad \text{kun} \quad x > 0.$$

Sijoittamalla funktionaaliyhtälöön y:n paikalle $f(y)$ ja soveltamalla yhtälöitä (1) ja (2) nähdään, että itse asiassa

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{kun} \quad x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Oletetaan, että $x > y$. Silloin yhtälön (3) nojalla $f(x) = f(x-y)+f(y) > f(y)$, eli funktio f on aidosti kasvava. Jos jollakin $x \in \mathbf{R}$ olisi $x > f(x)$, niin seuraisi $f(x) > f(f(x))$, ja yhtälön (1) nojalla $f(x) > x$, mikä on mahdotonta. Vastaavasti johdetaan ristiriita lähtien oletuksesta $x < f(x)$. Ainoaksi mahdollisuudeksi jää, että $f(x) = x$ kaikilla x. Kääntäen huomataan, että identtinen funktio toteuttaa selvästi annetun funktionaaliyhtälön.

92.3. Osoitetaan, että $n = 33$. Selvästikin pisteiden yhdysjanoja on kaikkiaan 36. Mikäli 33 yhdysjanaa on väritetty, voidaan valita kolme pistettä niin, että jokainen värittämätön yhdysjana päättyy johonkin näistä pisteistä. Merkitään jäljelle jääneitä pisteitä A_1, A_2, $\ldots$, A_6; jokainen näiden välisistä yhdysjanoista on väritetty. Tarkastellaan seuraavaksi vain näiden pisteiden välisiä janoja. Pisteestä A_1 lähtee ainakin kolme samanväristä janaa; symmetrian nojalla voidaan olettaa, että esim. janat A_1A_2, A_1A_3 ja A_1A_4 ovat punaisia. Jos nyt janoista A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 on jokin punainen, niin selvästi muodostuu punainen kolmio, jonka kärkenä on A_1. Jos taas viimeksi mainitut janat ovat kaikki vihreitä, on kolmio $A_2A_3A_4$ yksivärinen. [Itse asiassa tässä todistettiin tunnettu kombinatoriikan tulos, joka usein ilmaistaan muodossa: kuuden henkilön joukosta voidaan valita kolme, jotka ovat joko kaikki toistensa tuttuja tai kaikki tuntemattomia toisilleen!] Näin on tullut osoitetuksi, että $n \leq 33$.

Todistus on valmis, kun konstruoidaan 32 yhdysjanan väritys siten ettei yksiväristä kolmiota muodostu. Merkitään annettuja pisteitä numeroilla 1, 2, $\ldots$, 9. Väritetään punaisiksi yhdysjanat 12, 13, 19, 18, 24, 25, 34, 35, 46, 47, 56, 57, 68, 69, 78, 79; jätetään värittämättä yhdysjanat 23, 45, 67, 89 ja väritetään loput janoista vihreiksi. Tarkistus on mekaaninen.

K92.4. Sivutkoon ympyrä C suoraa L pisteessä P_1, olkoon O ympyrän C keskipiste ja P_2 ympyrällä C siten, että P_1P_2 on ympyrän halkaisija. Olkoon S puolisuora, joka alkaa pisteestä P_2, on janan OM suuntainen ja sijaitsee ympyrän C ulkopuolella. Todistetaan, että kysytty pistejoukko muodostuu puolisuorasta S (johon ei lueta pistettä P_2). Riittää, kun osoitetaan, että mikäli pisteet PQR ovat kuten tehtävässä, niin janat PP_2 ja OM ovat yhdensuuntaisia. Merkitään $|PQ| = c$, $|QR| = a$ ja $|RP| = b$. Olkoon C' ympyrä kolmion PQR ulkopuolella, joka sivuaa sivua QR ja sivujen PQ ja PR jatkeita. Leikatkoon suora PP_2 suoran L pisteessä P_3. Käyttämällä hyväksi homotetiaa pisteen P suhteen, joka vie ympyrän C ympyrälle C', nähdään, että C' sivuaa suoraa L pisteessä P_3. Merkitään $|QP_3| = x$ ja $|RP_3| = y$. Tarkastelemalla pisteestä Q ympyrälle C' piirrettyja tangentteja nähdään, että pisteestä P ympyrälle C' piirretyn tangentin pituus on $c + x$. Vastaavasti kyseiseksi pituudeksi lasketaan $b + y$, joten $x - y = b - c$. Toisaalta $x + y = a$, joten $x = (a + b - c)/2$. Sivutkoon ympyrä C sivuja PQ ja PR pisteissä R_1 ja Q_2. Merkitään $|PR_1| = u$, $|QP_1| = v$ ja $|RQ_1| = w$. Koska $|QR_1| = |QP_1|$, niin $u + v = c$ ja vastaavasti $v+w = a$, $w+u = b$, joten $|RP_1| = |RQ_1| = w = (a+b-c)/2 = |QP_3|$. Koska M puolittaa sivun QR, niin edellisen nojalla se puolittaa myös janan P_1P_3. Siispä kolmiot $P_2P_1P_3$ ja OP_1M ovat yhdenmuotoisia, mistä seuraakin janojen PP_2 ja OM yhdensuuntaisuus.

92.5. Merkitään $|S_x| = a$, $|S_y| = b$ ja $|S_z| = c$. Todistetaan väite induktiolla lukumäärän $|S|$ suhteen. Väite pätee selvästi kun $|S| = 1$. Oletetaan sitten, että väite on tosi kun $|S| < N$, $N \geq 2$. Tarkastellaan joukkoa S, jolle $|S| = N$. Voidaan valita taso T, joka on yhdensuuntainen jonkin koordinaattitason kanssa, ja joka jakaa joukon S kahdeksi osajoukoksi S_1 ja S_2 siten, että $N = |S_1| + |S_2|$ ja $|S_1| < N$, $|S_2| < N$. Induktiohypoteesin nojalla $|S_1|^2 \leq a_1b_1c_1$ ja $|S_2|^2 \leq a_2b_2c_2$, missä $a_1 = |(S_1)_x|, \ldots, c_2 = |(S_2)_z|$. Voidaan olettaa, että taso T on yhdensuuntainen xy-tason kanssa, jolloin $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$, $c_1 \leq c$ ja $c_2 \leq c$. Induktioaskel on valmis, kun havaitaan, että Cauchyn – Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|S|^2 = (|S_1| + |S_2|)^2 \leq (\sqrt{a_1b_1c_1} + \sqrt{a_2b_2c_2})^2$$
$$\leq c(\sqrt{a_1}\sqrt{b_1} + \sqrt{a_2}\sqrt{b_2})^2 \leq c(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = abc.$$

92.6. Sovitaan, että ratkaisussa käytettävät kirjainsymbolit edustavat aina kokonaislukuja. Sanotaan, että luonnollisella luvulla m on k-esitys ($k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$), mikäli m voidaan lausua k:n positiivisen neliöluvun summana.

(a) Riittää, kun osoitetaan, ettei millään luvulla $m \geq 16$ ole $(m-13)$-esitystä. Vastaoletuksen mukaan voitaisiin kirjoittaa $m = a_1 + 4a_2 + 9a_3 + \ldots + r^2a_r + \ldots$ ja $m - 13 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, missä $a_i \geq 0$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan $13 = 3a_2 + 8a_3 + 15a_4 + \ldots$, mistä seuraa $a_i = 0$, kun $i \geq 3$, ja $3a_2 + 8a_3 = 13$. Suora kokeilu osoittaa, ettei viimeksi kirjoittu yhtälö toteudu positiivisilla luvuilla a_2 ja a_3.

(b) Todistetaan, että $S(13) = 13^2 - 14$. Osoitetaan ensin, että luvulla $13^2 = 169$ on k-esitys, joka koostuu vain neliöistä 1, 4 ja 9, kun $25 \leq k \leq 155 = 13^2 - 14$. On ratkaistava kokonaislukuyhtälöt

$$a_1 + 4a_2 + 9a_3 = 169 \tag{1}$$

ja

$$a_1 + a_2 + a_3 = k \tag{2}$$

($a_i \geq 0$). Kun a_1 eliminoidaan pois, on yhtäpitävästi ratkaistava $3a_2 + 8a_3 = 169 - k$ rajoituksella $a_2 + a_3 \leq k$. Koska $2 \cdot 3 + 8 = 14$, $5 \cdot 3 = 15$, $2 \cdot 8 = 16$ ja $169 - k \geq 14$, niin voidaan kirjoittaa $169 - k = 3 \cdot \ell + m$, missä $\ell \geq 0$ ja $m \in \{14, 15, 16\}$. Siis löytyy ei-negatiiviset r, s niin, että $169 - k = 3r + 8s$. Mikäli $r \leq 7$, valitaan $a_2 = r$, $a_3 = s$. Muussa tapauksessa kirjoitetaan $r = 8u + v$, missä $0 \leq v \leq 7$, ja valitaan $a_2 = v$, $a_3 = s + 3u$. Näin on löydetty ei-negatiiviset a_2, a_3, joille $169 - k = 3a_2 + 8a_3$ ja $a_2 \leq 7$. Lisäksi $a_2 + a_3 \leq 7 + (169 - k)/8 \leq k$, kun $k \geq 25$. Valitaan $a_1 = k - a_2 - a_3 \geq 0$, jolloin kolmikko (a_1, a_2, a_3) toteuttaa yhtälöt (1) ja (2).

Kirjoitetaan lopuksi k-esitykset luvulle 169 k:n arvoilla 1, 2, …, 24: $169 = 144 + 25 = 144 + 16 + 9 = 100 + 64 + 4 + 1 = 2 \cdot 64 + 36 + 4 + 1 = 144 + 9 + 4 \cdot 4 = 64 + 4 \cdot 25 + 4 + 1 = 64 + 36 + 4 \cdot 16 + 4 + 1 = 4 \cdot 36 + 9 + 4 \cdot 4 = 4 \cdot 25 + 4 \cdot 16 + 4 + 1 = 36 + 8 \cdot 16 + 4 + 1 = 3 \cdot 36 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 4 = 4 \cdot 25 + 3 \cdot 16 + 5 \cdot 4 + 1 = 8 \cdot 16 + 4 \cdot 9 + 4 + 1 = 2 \cdot 36 + 9 \cdot 9 + 4 \cdot 4 = 4 \cdot 25 + 2 \cdot 16 + 9 \cdot 4 + 1 = 7 \cdot 16 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 4 + 1 = 36 + 13 \cdot 9 + 4 \cdot 4 = 4 \cdot 25 + 16 + 13 \cdot 4 + 1 = 6 \cdot 16 + 4 \cdot 9 + 9 \cdot 4 + 1 = 17 \cdot 9 + 4 \cdot 4 = 4 \cdot 25 + 17 \cdot 4 + 1 = 5 \cdot 16 + 4 \cdot 9 + 13 \cdot 4 + 1 = 17 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1$.

(c) Väite seuraa b-kohdasta kun todistetaan, että tiedosta $S(X) = X^2 - 14$ seuraa $S(2X) = (2X)^2 - 14$, kun $X \geq 8$. Oletetaan siis, että $S(X) = X^2 - 14$ ja $X \geq 8$. Luvulle $(2X)^2$ saadaan k-esitykset kun $k = 1, 2, 3$ yksinkertaisesti kirjoittamalla luvulle X^2 vastaavat esitykset ja kertomalla puolittain luvulla 4. Toisaalta $(2X)^2 = X^2 + X^2 + X^2 + X^2$ ja kun tässä oikealla puolella kirjoitetaan i:nnelle summattavalle riippumattomasti r_i-esitykset mahdollisilla r_i:n arvoilla saadaan luvulle $(2X)^2$ k-esitykset kun $4 \le k \le (2X)^2 - 56$. Olkoon vihdoin $k = (2X)^2 - r$, missä $14 \le r \le 55$. Koska $X^2 \ge 8$, on oletuksen mukaan luvulla X^2 (X^2-r)-esitys $X^2 = a_1^2 + \ldots + a_{X^2-r}^2$. Luvulle $(2X)^2$ saadaan k-esitys muodossa $(2X)^2 = a_1^2 + \ldots + a_{X^2-r}^2 + (3X^2) \cdot 1^2$.

93.1. Oletetaan, että $f(x) = g(x)h(x)$, missä g ja h ovat kokonaislukukertoimisia ainakin ensimmäistä astetta olevia polynomeja. Silloin $g(0)h(0) = 3$, joten $g(0)$:n ja $h(0)$:n mahdolliset arvot ovat ± 1 ja ± 3. Oletetaan, että $g(0) = \pm 1$. Voidaan olettaa, että $g(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x \pm 1$. Koska $f(\pm 1) \neq 0$, niin $k > 1$. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_k$ yhtälön $g(x) = 0$ (kompleksiset) ratkaisut. Silloin $|x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_k| = 1$. Koska luvut x_j ovat yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisuja, niin $x_j^{n-1}(x_j + 5) = -3$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Kun nämä k yhtälöä kerrotaan keskenään, saadaan $|(x_1+5)(x_2+5) \cdot \ldots \cdot (x_k+5)| = 3^k$ eli $|g(-5)| = 3^k$. Toisaalta $g(-5)$ on luvun $f(-5) = 3$ tekijä, joten $|g(-5)| = 1$ tai $|g(-5)| = 3$. Saatu ristiriita osoittaa ratkaisun alussa tehdyn oletuksen virheelliseksi, joten tehtävän väite on tullut todistetuksi.

93.2. (a) Piirretään jana DE niin, että $DE = DB$ ja $DE \perp DB$. Silloin $\angle ADE = \angle ACB$ ja $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{DE}{BC}$, joten kolmiot ADE ja ACB ovat yhdenmuotoiset (sks). Täten $\angle CAB = \angle DAE$ ja $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD}$. Edelleen $\angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = \angle DAE - \angle DAB = \angle BAE$. Myös kolmiot CAD ja BAE ovat yhdenmuotoiset (sks). Koska BDE on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, $BE = \sqrt{2}BD$. Saadaan siis $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{BE} = \dfrac{CD}{\sqrt{2}BD}$, josta $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$.
(b) Olkoot CT ja CU kolmioiden ACD ja BCD ympäri piirrettyjen ympyröiden pisteeseen C piirrettyjä tangentteja. Silloin $\angle DCT = \angle DAC$ ja $\angle DCU = \angle DBC$ samoja kaaria vastaavina tangentti- ja kehäkulmina. Kolmion ABD kulmasummasta saadaan $\angle ADE + \angle DAB + \angle DBA + 90° = 180°$. Koska $\angle ADE = \angle ACB$, on edelleen $\angle ACB + \angle CAB - \angle CAD + \angle ABC - \angle DBC = 90°$. Kun otetaan huomioon kolmion ABC kulmasumma, saadaan haluttu relaatio $90° = \angle CAD + \angle DBC = \angle DCU + \angle DCT = \angle UCT$.

93.3. Väritetään šakkilaudan ruudut kolmella värillä A, B ja C niin, että kussakin "alhaalta vasemmalta" "ylös oikealle" kulkevassa vinorivissä ruudut ovat samanväriset ja vinorivien värit seuraavat toisiaan samassa järjestyksessä. Oletetaan, että nappuloiden alkuasentoneliön lävistäjärivi on väriä A. Symmetrian perusteella B- ja C-värisillä ruuduilla on alkuasemassa yhtä monta nappulaa. Jos $n = 3k$, niin A-värisillä ruuduilla on alkuasemassa

$$3k + 2((3k-3) + (3k-6) + \ldots + 3) = 3k + 2 \cdot 3\frac{k(k-1)}{2} = 3k^2 = \frac{1}{3}n^2$$

nappulaa; alkuasemassa on tällöin yhtä monta nappulaa jokaisella kolmella värillä väritetyissä ruuduissa. Jokainen pelin siirto muuttaa kunkin värisillä ruuduilla olevien nappuloiden määrän parillisuuden: siirto poistaa kahdelta eriväriseltä ruudulta nappulan ja lisää yhden nappulan kolmannelle värille. Loppuasemassa yhden värin nappulamäärä on pariton ja kahden muun parillinen. Koska alkuasemassa kaikilla väreillä oli sama nappulamäärä, peli ei voi onnistua.

Olkoon sitten n jaoton kolmella. Jos $n = 2$, peli saadaan onnistumaan. Helposti nähdään myös, että neljästä ruudusta muodostuvan L:n muotoisen kuvion kolmesta vierekkäin olevasta ruudusta voidaan kolmella siirrolla poistaa nappulat, jos L:n lyhyemmässä sakarassa olevalla nappulalla voidaan tehdä ensimmäinen siirto. Lisäksi 2×3-suorakaiteessa olevat kolme kuusi nappulaa voidaan poistaa esimerkiksi silloin, kun suorakaiteen kahdella pitkän ja yhden lyhyen sivun vierekkäiset ruudut ovat tyhjiä ja ainakin toinen toiseen lyhyeen sivuun rajoittuvista ruuduista on miehitetty. Näitä operaatioita toistamalla nähdään, että peli onnistuu, kun $n = 4$ ja $n = 5$. Kun $n > 6$, samoja operaatioita toistamalla päästään tilanteeseen, jossa nappulat ovat $(n-3) \times (n-3)$-neliössä. Toistamalla tarvittaessa samat operaatiot saadaan tilanne palautetuksi 4×4- tai 5×5-neliöön. Peli onnistuu siis aina ja vain, kun n ei ole jaollinen kolmella.

93.4. Olkoot A_1 ja A_2 mielivaltaisia tason pisteitä ja $r < A_1A_2$. Selvitetään ensin, millainen on niiden pisteiden X joukko $E(A_1, A_2, r)$, joille pätee $m(XA_1A_2) \le r$. Jos K_1 ja K_2 ovat A_1- ja A_2-keskiset r-säteiset ympyrät t_1 ja t_2 ympyröiden K_1 ja K_2 yhdensuuntaiset yhteiset tangentit ja t_1', t_1'' sekä t_2', t_2'' ympyrän pisteen A_1 kautta kulkevat ympyrän K_2 sekä pisteen A_2 kautta kulkevat ympyrän K_1 tangentit, niin kyseinen joukko muodostuu suorien t_1 ja t_2 väliin jäävästä yhdensuuntaisvyöstä ja kulmista $t_1'A_1t_2''$ sekä $t_2'A_2t_2''$ Jos M_1 on tangenttien t_1 ja t_1' leikkauspiste, niin helppo kehäkulmatarkastelu osoittaa, että kolmio $A_1A_2M_1$ on tasakylkinen, eli $A_1M_1 = A_1A_2$. Joukkoa $E(r)$ rajoittavien murtoviivojen kärkipisteet ovat siis A_1A_2:sta etäisyydellä r olevilla suorilla ja A_1- sekä A_2-keskisillä A_1A_2-säteisillä ympyröillä.

Olkoon sitten ABC tehtävän kolmio; ei merkitse rajoitusta, kun oletetaan, että AB on sen pisin sivu; merkitään $r = m(ABC)$. Suorat AB, BC ja CD jakavat tason seitsemään osaan, joista yksi on kolmio G_{ABC} eli kolmio ABC, ja kolme sellaisia kulmia, joiden kärki on jokin kolmion kärki. Olkoot nämä alueet G_A, G_B ja G_C. Loput kolme aluetta ovat kahden puolisäteen ja yhden kolmion sivun rajoittamia alueita; olkoot ne G_{AB}, G_{BC} ja G_{AC}. Kukin alue sisältää myös reunansa. Jaetaan tarkastelu tapauksiin sen mukaan, missä piste X sijaitsee. (a) Piste X on kolmion ABC sisällä (tai reunalla). Jos $|PQR|$ on kolmion PQR ala ja —PQ— janan PQ pituus, niin $|ABC| = |ABX| + |AXC| + |ABC|$. Jaetaan tämä yhtälö puolittain $|AB|$:llä. Koska $|AB| \ge |AX|$, $|AB| \ge |BX|$, niin

$$m(ABC) \le m(ABX) + \frac{2|AXC|}{|AB|} + \frac{2|XBC|}{|AB|}. \tag{1}$$

Selvästi $2|PQR| = m(PQR) \cdot \max\{|PQ|, |QR|, |RP|\}$. Koska AB on ainakin yhtä pitkä kuin kolmioiden AXC ja XBC pisin sivu, niin epäyhtälön (1) oikean puolen kaksi viimeistä yhteenlaskettavaa ovat enintään $m(AXC)$ ja $m(XBC)$. Väite on tässä tapauksessa todistettu. (b) Piste X on alueessa G_C. Koska $m(ABC) = r$ on pisteestä C piirretyn korkeusjanan pituus, ja $|AC| \le |AB|$, $|BC| \le |AB|$, niin piste C ja alue G_C on joukon $E(A, B, r)$ osajoukko. (c) Piste X on joukossa G_A. Koska suora AB on C-keskisen r-säteisen ympyrän tangentti, kulma G_A on joukon $E(B, C, r)$ osajoukko, joten $m(ABC) = r \le m(XBC)$. Väite pätee; symmetrian takia väite pätee myös, kun $X \in G_B$. (d) Piste X on alueessa G_{AB}. Leikatkoon XC janan AB pisteessä Y. Kohtien (b) ja (c) perusteella

$m(AYC) \le m(AXC)$ ja $m(BCY) \le m(BCX)$. Lisäksi $m(ABY) = 0$. Koska $y \in G_{ABC}$, $m(ABC) \le m(ABY) + m(AYC) + m(YBC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$. Päättely tapauksissa $X \in G_{BC}$ ja $X \in G_{AC}$ on sama.

93.5. Olkoon $r = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, $1{,}6 < r < 1{,}7$, yhtälön $r^2 = r + 1$ positiivinen juuri. Silloin funktiolle $g(x) = rx$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$ $g(g(n)) = r^2 n = rn + n = g(n) + n$. $g(n)$ ei kuitenkaan ole kokonaisluku. Asetetaan $f(n) = \left[g(n) + \frac{1}{2}\right]$. Silloin $f(1) = \left[r + \frac{1}{2}\right] = 2$. Koska $r > 1$, niin $g(n+1) > g(n) + 1$, mistä seuraa, että myös $f(n+1) > f(n)$. On vielä osoitettava, että f toteuttaa tehtävän keskimmäisen ehdon. Tämä seuraa siitä, että $f(f(n)) - f(n) - n$ on kokonaisluku, $|g(n) - f(n)| < \frac{1}{2}$ ja

$$\begin{aligned}
&|f(f(n)) - f(n) - n| = |g(g(n)) - g(n) - n - g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)| \\
&= |f(f(n)) - g(g(n)) + g(n) - f(n)| \\
&= |g(f(n)) - g(g(n)) + f(f(n)) - g(f(n)) + g(n) - f(n)| \\
&= |(1-r)(g(n) - f(n) + f(f(n)) - g(f(n))| \le \frac{1}{2}(r-1) + \frac{1}{2} = \frac{r}{2} < 1.
\end{aligned}$$

93.6. Ajatellaan lamppuja kierrettävän n:ssä paikassa T_0, T_1, jne. niin, että operaatiota S_j tehtäessä lamppu L_j on paikassa T_0. Olkoon v_j 0 tai 1 sen mukaan, onko paikassa T_j sammuksissa oleva vai palava lamppu. Operaatio S_j merkitsee, että v_0 korvataan luvulla $v_0 + v_{n-1} (\bmod 2)$ ja kierto sitä, että v_j:n tilalle tulee v_{j+1}. Liitetään lamppujen tilaan kullakin hetkellä polynomi

$$P(x) = v_{n-2} + v_{n-3}x + \ldots + v_0 x^{n-2} + v_{n-1}x^{n-1}.$$

Operaatio ja kierto merkitsevät, että polynomi muuttuu muotoon

$$Q(x) = v_{n-1} + v_{n-2}x + \ldots + (v_0 + v_{n-1})x^{n-1}.$$

Jos käytetään polynomikongruenssimerkintää $p(x) \equiv q(x) \bmod r(x)$, jos $p(x) - q(x)$ on polynomin r monikerta ja lasketaan kertoimilla modulo 2, niin operaatio ja kierto merkitsevät, että $Q(x) \equiv xP(x) \bmod x^n + x^{n-1} + 1$. Käytetään tämän jälkeen $\equiv$-merkkiä tarkoittamaan polynomikongruenssia $\bmod x^n + x^{n-1} + 1$. (a)-kohdan todistamiseksi riittää löytää $M(n)$ siten, että $x^{M(n)} \equiv 1$. Koska tarkasteltavan kongruenssin ekvivalenssiluokkien määrä on äärellinen, on oltava $x^q \equiv x^r$ joillakin kokonaisluvuilla $q < r$. Mutta silloin $x^{r-q} \equiv 1$. (b)-kohta tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $x^{n^2-1} \equiv 1$, kun $n = 2^k$. Nyt

$$x^{n^2} \equiv (x^{n-1} + 1)^n \equiv x^{n^2-n} + 1,$$

koska kertalukua $n = 2^k$ olevat binomikertoimet ovat ensimmäistä ja viimeistä lukuun ottamatta parillisia. Siten

$$1 \equiv (1 + x^n)x^{n^2-n} \equiv x^{n^2-1}.$$

(c)-kohdassa osoitetaan vastaavasti, että $x^{n^2-n+1} \equiv 1$, kun $n = 2^k + 1$. Samalla tavalla kuin (b)-kohdassa saadaan

$$x^{n^2-1} \equiv (x^{n+1})^{n-1} \equiv (x + x^n)^{n-1} \equiv x^{n-1} + x^{n(n-1)}$$

ja

$$(1 + x^{n-1})x^{n^2-n} \equiv x^{n-1},$$

josta väite seuraa, kun sijoitetaan $1 + x^{n-1} \equiv x^n$.

94.1. Merkitään $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ja $h = \min A$. Koska a_i:t eroavat toisistaan, on siis todistettava, että joukon A alkioiden keskiarvo on vähintään $\frac{n+1}{2}$. Tutkitaan joukon A alkioita modulo h, ja merkitään $A_k = \{a \in A \mid a \equiv k \bmod h\}$ kaikilla $k = 0, \ldots, h-1$. Olkoon $k \in \{0, \ldots, h-1\}$ sellainen, että $A_k \neq \emptyset$. Tällöin $h_k = \min A_k \geq h$. Koska $h_k \in A$ ja $h \in A$, $h_k + jh \in A$ kaikilla $j = 0, \ldots, j_k$, missä j_k on suurin kokonaisluku j, jolle pätee $h_k + jh \leq n$. Luvun j_k määritelmästä seuraa välittömästi, että $h_k + (j_k + 1)h > n$ eli $h_k + j_kh \geq n - h + 1$. Nyt joukon $A_k = \{h_k, h_k + h, \ldots, h_k + j_kh\}$ alkiot muodostavat aritmeettisen jonon, ja sen alkioiden keskiarvo on

$$\frac{h_k + (h_k + j_kh)}{2} \geq \frac{h + n - h + 1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Koska kaikilla $k = 0, \ldots, h-1$ joko $A_k = \emptyset$ tai joukon A_k alkioiden keskiarvo on vähintään $\dfrac{n+1}{2}$, myös joukon A alkioiden keskiarvo on vähintään $\dfrac{n+1}{2}$.

94.2. Oletetaan ensin, että OQ ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tällöin suorakulmaisilla kolmioilla OQE ja OBE on sama hypotenuusa, joten ympyrä, jonka halkaisijana on OE, kulkee pisteiden O, Q, B ja E kautta. Samasta syystä nelikulmion $OCFQ$ ympäri voidaan piirtää ympyrä. Tarkastelemalla näiden ympyröiden kehäkulmia todetaan, että $\angle OEQ = \angle OBQ$ ja $\angle OFQ = \angle OCQ$. Toisaalta kolmion OCB tasakylkisyyden vuoksi $\angle OBQ = \angle OCQ$. Siis kolmiot OQE ja OQF ovat yhtenevät, mistä seuraa $QE = QF$.

Oletetaan sitten, että $QE = QF$. Leikatkoon kolmion OEF kantaa EF vasten piirretty korkeusjana (tai sen jatke) suoran BC pisteessä Q'.

Piirretään pisteen Q' kautta janan EF kanssa yhdensuuntainen suora; tämä leikkaa suorat AB ja AC pisteissä E' ja F'. Yllä todistetun perusteella $Q'E' = Q'F'$. Leikatkoon AQ' janan EF pisteessä N. Yhdenmuotoisuuksien nojalla $NE = NF$, ja koska oletettiin, että $QE = QF$, täytyy olla $Q = N$. Toisaalta Q on suoralla BC, N suoralla AQ', ja Q' on näiden suorien yksikäsitteinen leikkauspiste. Siis $Q = Q'$ ja OQ ja EF ovat kohtisuorassa.

94.3. a) Määritellään luonnollisten lukujen joukossa funktio ϕ asettamalla $\phi(k) = 1$, jos luvun k binäärikehitelmässä on kolme ykköstä ja $\phi(k) = 0$ muuten. Ilmeisestikin $f(k+1) = f(k) - \phi(k+1) + \phi(2k+1) + \phi(2k+2)$. Toisaalta lukujen $k+1$ ja $2(k+1)$ binääriesityksissä on sama määrä ykkösiä, joten edellinen yhtälö supistuu muotoon $f(k+1) = f(k) + \phi(2k+1) \leq f(k) + 1$. Siten f on kasvava, ja sen arvojoukko koostuu peräkkäisistä luonnollisista luvuista. Toisaalta, kun k on esimerkiksi muotoa $2^\ell + 1$, niin $\phi(2k+1) = 1$, joten $f(k+1) = f(k) + 1$ äärettömän monella k:n arvolla. Koska $f(1) = \phi(2) = 0$, f saa kaikki positiiviset kokonaislukuarvot.

b) Kun $k \geq 2$, $f(k) = f(k-1) + \phi(2k-1)$ ja $f(k+1) = f(k) + \phi(2k+1)$. Epäyhtälö $f(k-1) < f(k) < f(k+1)$ on siis yhtäpitävä sen kanssa, että $\phi(2k-1) = \phi(2k+1) = 1$. Kaikki parittomat luonnolliset luvut, joiden binääriesityksessä on kolme ykköstä, voidaan esittää muodossa $n = 2^{\ell_1} + 2^{\ell_2} + 1$, missä $\ell_1 > \ell_2 > 0$. Jotta sekä $2k-1$ että $2k+1$ olisivat tätä muotoa, täytyy olla olemassa sellainen kokonaisluku $\ell \geq 2$, että $2k - 1 = 2^{\ell+1} + 3$ eli $k = 2^\ell + 2$. Ilmeisesti $f(2^\ell) = \binom{\ell+1}{3} - \binom{\ell}{3} = \binom{\ell}{2}$, joten $f(2^\ell+2) = f(2^\ell) + \phi(2^\ell+1) + \phi(2^\ell+3) = \binom{\ell}{2} + 0 + 1 = 1 + \binom{\ell}{2}$. Siis yhtälöllä $f(k) = m$ on täsmälleen yksi ratkaisu, kun $m = 1 + \binom{\ell}{2}$ jollakin $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 2$.

94.4. Koska

$$f(m,\,n) = \frac{n^3+1}{mn-1} = n\frac{n^2+m}{mn-1} - 1 = n^3\frac{m^3+1}{mn-1} - (m^2n^2 + mn + 1)$$

ja luvuilla n ja $mn-1$ ei ole yhteisiä tekijöitä, $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ on kokonaisluku täsmälleen silloin, kun $\dfrac{n^2+m}{mn-1}$ on kokonaisluku, ja $f(m,\,n)$ on kokonaisluku aina, kun $f(n,\,m)$ on kokonaisluku. Kun $n = m$,

$$\frac{n^2+m}{mn-1} = \frac{n^2+n}{n^2-1} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1},$$

joten ainoa kokonaislukuratkaisu saadaan, kun $n = 2$. Koska $f(m,\,1) = \dfrac{2}{m-1}$, tapauksessa $n = 1$ kokonaislukuratkaisuja saadaan, kun $m = 2$ tai $m = 3$. Kun $m > n \geq 2$, on $n^2 + m \leq n(m-1) + m(n-1) = 2mn - m - n < 2(mn-1)$ eli $\dfrac{n^2+m}{mn-1} < 2$, joten, kun merkitään $m = n + k$, saadaan kokonaislukuratkaisun ehdoksi $n^2 + m = mn - 1$ eli $n^2+n+k = n(n+k)-1$ eli $n+k = kn-1$ eli $2 = (k-1)(n-1)$. Viimeinen yhtälö toteutuu, kun $n = 2$ ja $m = 5$ tai $n = 3$ ja $m = 5$. Kun m:n ja n:n symmetria otetaan huomioon, saadaan kaikkiaan 9 eri ratkaisua (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (2, 5), (5, 2), (3, 5) ja (5, 3).

94.5. Oletetaan, että f on tehtävän ratkaisu. Palautetaan funktionaaliyhtälö yksinkertaisemmaksi ottamalla käyttöön positiivisten realilukujen joukossa määritelty funktio g, $g(x) = 1 + f(x-1)$. Tällöin kaikille x, y pätee

$$\begin{aligned} g(xg(y)) &= 1 + f(x(1 + f(y-1)) - 1) \\ &= 1 + f(x - 1 + f(y-1) + (x-1)f(y-1)) \\ &= 1 + y - 1 + f(x-1) + (y-1)f(x-1) = y + yf(x-1) = yg(x). \end{aligned}$$

Vastaavasti jos g toteuttaa tämän funtionaaliyhtälön, niin $f : S \to S$, $f(x) = g(x+1) - 1$ toteuttaa alkuperäisen. Kuvaus g on injektio, sillä jos $g(x) = g(x')$, niin $xg(1) = g(1 \cdot g(x)) = g(g(x)) = g(g(x')) = x'g(1)$ ja koska $g(1) > 0$, saadaan $x = x'$. Edelleen $g(g(1)) =$

$g(1 \cdot g(1)) = 1 \cdot g(1) = g(1)$, ja koska g on injektio, $g(1) = 1$. Tutkitaan, onko kuvauksella g muita kiintopisteitä kuin 1. Kaikilla x pätee $g(xg(x)) = xg(x)$, joten erityisesti jos x on kiintopiste, niin myös $xg(x) = x^2$ on. Siten välillä $(1, \infty)$ on joko äärettömän monta kiintopistettä tai niitä ei ole lainkaan, ja vastaava pätee myös välille $(0, 1)$. Toisaalta x on kuvauksen g kiintopiste, jos ja vain jos $f(x-1) = g(x) - 1 = x - 1$ eli $x' = x - 1$ on kuvauksen f kiintopiste, mikä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että $f(x')/x' = 1$. Ehdosta (ii) seuraa suoraan, että kuvauksella f on korkeintaan kolme kiintopistettä x': mahdollisesti $x' = 0$, korkeintaan yksi, jolle $x' > 0$, ja korkeintaan yksi, jolle $x' < 0$. Kuvaukselle g tämä merkitsee, ettei väleillä $(0, 1)$ ja $(1, \infty)$ voi olla useita kiintopisteitä. Tämä sopii yhteen aiemmin todetun kanssa vain, jos 1 on kuvauksen g ainoa kiintopiste. Koska kuitenkin $xg(x)$ on kiintopiste jokaisella x, täytyy olla voimassa yhtälö $xg(x) = 1$ eli $g(x) = 1/x$. Siis kaikilla $x \in S$ pätee $f(x) = g(x+1) - 1 = -\dfrac{x}{x+1}$.

Varmistetaan vielä, että löydetty f kelpaa ratkaisuksi. Välittömästi nähdään, että vastaavaa g noudattaa omaa funktionaaliyhtälöänsä, ja kuten on jo todettu, tästä seuraa, että f toteuttaa omansa. Lisäksi $x \mapsto f(x)/x = -\dfrac{1}{x+1}$ on selvästi aidosti kasvava koko määrittelyjoukossa S.

94.6. Valitaan joukoksi A kaikkien sellaisten $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, joukko, että luvun n pienin alkutekijä p on samalla luvun n alkutekijöiden lukumäärä. Osoitetaan, että A täyttää annetun vaatimuksen; olkoon siis $S = \{q_1, q_2, \ldots\}$, $q_1 < q_2 < \ldots$, ääretön joukko alkulukuja. Tällöin $m = q_1 q_2 \ldots q_{q_1} \in A$, mutta $n = q_2 \ldots q_{q_1+1} \notin A$, sillä luvun n alkutekijöiden lukumäärä on $q_1 < q_2$. Kuitenkin luvuilla m ja n on yhtä monta, q_1, alkutekijää.