Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2014

Tehtävien ratkaisuja

1. Merkitään kaikilla $n \geq 1$

$$d_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - na_n.$$

Silloin jokainen d_n on kokonaisluku, ja $d_1 = a_0 > 0$. Nyt $d_n > 0$ tasan niillä n, joilla tehtävän epäyhtälöistä vasemmanpuolinen on tosi. Toisaalta

$$na_{n+1} - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = (n+1)a_{n+1} - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1}) = -d_{n+1},$$

joten tehtävän oikeanpuoleinen epäyhtälö on tosi niillä n, joilla $d_{n+1} \leq 0$. Osoitetaan, että (d_n) on aidosti vähenevä jono:

$$d_n - d_{n+1} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - na_n - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1}) - (n+1)a_{n+1} = n(a_{n+1} - a_n) > 0,$$

koska (a_n) on kasvava jono. Aidosti vähenevä kokonaislukujono, jonka ensimmäinen jäsen on positiivinen, "ohittaa" nollan tasan kerran, ts. on olemassa yksi ja vain yksi n, jolle $d_n > 0 \geq d_{n+1}$; todistus on valmis.

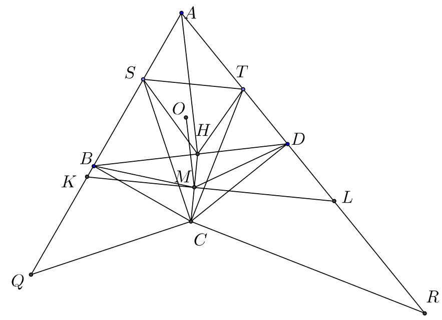
2. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Osoitetaan, että jos $n > m^2$, niin jokainen rauhallinen asetelma sallii tyhjän $m \times m$ -neliön. Olkoon siis annettuna jokin rauhallinen tornien asettelu. Jollakin rivillä R on silloin torni, joka on rivin vasemmanpuolimmaisessa ruudussa. Valitaan jotkin m allekkaista riviä niin, että R on näiden joukossa. Riveillä on kaikkiaan m tornia. Poistetaan näistä riveistä $n - m^2 > 0$ vasemmanpuolimmaista saraketta. Näiden sarakkeiden mukana laudalta poistuu ainakin yksi torni. Jäljelle jää $m^2 \times m$ -suorakaide, jossa on enintään $m - 1$ tornia. Suorakaide voidaan jakaa m:ksi $m \times m$ -neliöksi, joista ainakin yksi on tyhjä.

Olkoon sitten $m^2 = n$. Osoitetaan, että laudalle voidaan laatia rauhallinen asetelma, joka ei jätä yhtään $m \times m$ -neliötä tyhjäksi. Numeroidaan laudan rivit ja sarakkeet 0:sta (m^2-1):een ja nimetään kukin ruutu parina (r, s), missä r on sen rivin ja s sen sarakkeen numero. Sijoitetaan tornit ruutuihin $(im + j, jm + i)$, $i, j = 0, 1, \ldots, m-1$. Silloin joka rivillä ja joka sarakkeessa on tasan yksi torni. Osoitetaan, että jokainen $m \times m$ -neliö sisältää yhden tornin. Olkoon A tällainen neliö. Olkoon sen alimman rivin numero $pm+q$, missä $0 \leq p, q \leq m-1$. A:n riveillä olevat tornit ovat sarakkeissa $qm + p$, $(q+1)m + p, \ldots, (m-1)m + p, p+1, m + (p+1), \ldots, (q-1)m + (p+1)$. Luvuista pienin on $p+1$ ja suurin $(m-1)m + p$. Pienin luku on enintään $m - 1$ (jos $p = m-1$, niin $q = 0$ ja listan pienin luku on $qm + p = m - 1$) ja suurin ainakin $(m-1)m$; kahden peräkkäisen luvun erotus on enintään m. Siten jossain A:han kuuluvista m:stä vierekkäisestä sarakkeesta on torni.

Olkoon sitten $m^2 > n$. Konstruoidaan edellä olevan mukaisesti rauhallinen asetelma $m^2 \times m^2$ -neliöön ja poistetaan siitä $m^2 - n$ alinta riviä ja vesemmanpuoleista saraketta. Syntyvä $n \times n$ -neliö ei sisällä tyhjiä $m \times m$-neliöitä, mutta siihen jää tyhjiä rivejä ja sarakkeita. Niitä on yhtä monta, joten ne voidaan liittää pareittain toisiinsa. Kunkin tällaiseen pariin kuuluvan rivin ja sarakkeen leikkauspisteeseen voidaan sijoittaa torni; näin täydentyy rauhallinen asetelma.

Yhteenvetona edellisestä saadaan, että tehtävässä kysytty k on $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

3. Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että kolmion TSH ympärysympyrän keskipiste on janalla AH. Aloitetaan valitsemalla puolisuorilta AB ja AD pisteet Q ja R niin, että kulmat $\angle SCQ$ ja $\angle TCR$ ovat suoria. Kolmiosta SQC ja tehtävän ehdosta saadaan $\angle SQC = 90° - \angle QSC = 90° - \angle CSB = 180° - \angle CHS$. Tämä merkitsee sitä, että $SQCH$ on jännenelikulmio. Kosta $\angle SCQ$ on suora, SQ on kolmion SCH ympärysympyrän halkaisija, ja ympärysympyrän keskipiste K, joka on samalla janan SH keskinormaalin piste, on janalla AQ. Aivan samoin nähdään, että kolmion THC ympärysympyrän keskipiste L, joka on janan TH keskinormaalilla, on janalla AR. Osoitetaan, että janojen SH ja TH keskinormaalit leikkaavat suoralla AH. Nämä keskinormaalit ovat samalla kolmioiden AKH ja AHL kulmien $\angle AKH$ ja $\angle ALH$ puolittajia. Edellinen niistä leikkaa siis AH:n pisteessä, joka jakaa AH:n suhteessa $\frac{AK}{KH}$, jälkimmäinen pisteessä, joka jakaa AH:n suhteessa $\frac{AL}{LH}$.



Yhtälön

$$\frac{AK}{KH} = \frac{AL}{LH} \tag{1}$$

todistamiseksi piirretään jana KL; se leikkaa janan HC pisteessä M. Koska K ja L ovat nelikulmioiden $SQCH$ ja $THCR$ ympärysympyröiden keskipisteitä, $KH = KC$ ja $LH = LC$. KL on siis janan HC keskinormaali ja M sen keskipiste. Olkoon O nelikulmion $ABCD$ ympärysympyrän keskipiste. Koska nelikulmion B- ja D-kärjissä on suorat kulmat, AC on ympyrän halkaisija. O on siis janan AC ja M janan HC keskipiste. Kolmiosta ACH saadaan nyt $MO \| AH$ ja edelleen $OH \perp BD$. Koska $BO = DO$, OM on janan BD keskinormaali ja siis $BM = DM$. Kulmat $\angle KBM$ ja $\angle BMC$ ovat suoria. Nelikulmio $BKCM$ on siis jännenelikulmio ja KC on tämän nelikulmion ympärysympyrän halkaisija. Samoin perustein $MCLD$ on jännenelikulmio ja LC sen ympärysympyrän halkaisija. Sinilauseen nojalla

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\sin(\angle ALK)}{\sin(\angle AKL)}. \tag{2}$$

Sovelletaan (laajennettua) sinilausetta edelleen nelikumioiden $BKCM$ ja $MCLD$, jolloin saadaan

$$\sin(\angle ALK) = \frac{DM}{CL}, \quad \sin(\angle AKL) = \frac{BM}{CK}.$$

Kun otetaan huomioon $BM = DM$ ja (2), saadaan

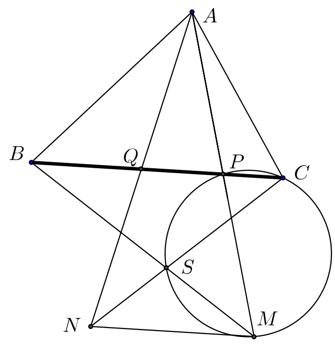
$$\frac{AK}{AL} = \frac{CK}{CL}.$$

Mutta $CK = KH$ ja $CL = LH$, joten (1) pitää paikkansa ja väite on todistettu.

4. Olkoon BM:n ja CN:n leikkauspiste S. Olkoot tavalliseen tapaan α, β, γ kolmion ABC kulmat. Kolmiot BAC, AQC ja BPA ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis $\angle APQ = \alpha$. Yhdenmuotoisuudesta seuraa

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BP}{AP} = \frac{AQ}{QC} = \frac{NQ}{QC}$$

ja $\angle BPA = \angle AQC$ ja edelleen $\angle BPM = \angle NQC = \angle SCP$. Tästä seuraa, että $CPSM$ on jännenelikulmio ja $\angle MSC = \angle MPC = \angle APQ = \alpha$. Nelikulmio $ABSC$ on siis jännenelikulmio.



5. Jos useiden kolikoiden yhteisarvo on $\frac{1}{k}$ jollain positiivisella kokonaisluvulla k, ne voidaan korvata yhdellä kolikolla, jonka arvo on $\frac{1}{k}$. Jos näin syntynyt uusi kokoelam voidaan jakaa tehtävässä esitetyllä tavalla, myös alkuperäinen kokoelma voidaan jakaa niin. Kun tämä sulauttaminen on tehty mahdollisimman monta kertaa, ollaan tilanteessa, jossa jokaista parillista k:ta kohden on enintään yksi kolikko, jonka arvo on $\frac{1}{k}$ (koska kaksi voitaisiin sulauttaa yhteen) ja jokaista paritonta k kohden on enintään $k-1$ kolikkoa, jonka arvo on $\frac{1}{k}$. Selvästi jokainen kolikko, jonka arvo on 1, muodostaa oman ryhmänsä. Jos tällaisia kolikkoja on d kappaletta, jäljelle jää rahaa $100 - \frac{1}{2} - d$:n verran, ja summa koostuu kolikoista, joiden arvo on $\leq \frac{1}{2}$. Ryhmitellään kolikot nyt seuraavasti: kaikille $k = 1, 2, \ldots, 100-d$ asetetaan kolikot, joiden arvo on $\frac{1}{2k-1}$ tai $\frac{1}{2k}$ samaan ryhmään G_k. Ryhmässä G_k olevien kolikkojen arvo ei ole suurempi kuin

$$(2k-2) \cdot \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} < 1.$$

Erityisesti ryhmässä G_1 olevien kolikkojen arvo on 0 tai $\frac{1}{2}$. Jäljellä ovat kolikot, joiden arvo on pienempi kuin $\frac{1}{2(100-d)}$. Ryhmissä G_k olevien kolikkojen arvo on yhteensä enintään

$$\frac{1}{2} + (99 - d) = 100 - d - \frac{1}{2}.$$

Ainakin yhden ryhmän kolikkojen arvo on enintään

$$\frac{100 - d - \dfrac{1}{2}}{100 - d} = 1 - \frac{1}{2(100 - d)}.$$

Tähän ryhmään voidaan sijoittaa kolikko, jonka arvo on $\dfrac{1}{2(100 - d)}$. Näin jatkamalla saadaan "pienet kolikotkin" sijoitetuiksi.

6. Olkoon L tarkasteltava suorajoukko ja $\mathcal{F}$ siihen liittyvä äärellisten alueiden joukko. Valitaan jokin sellainen L:n osajoukko S, että jos S:ään kuuluvat suorat on väritetty sinisiksi, yhdenkään $\mathcal{F}$:ään kuuluvan alueen reuna ei ole kokonaan sininen, mutta jos $S \subset S'$, $S \neq S'$, ja S':n suorat ovat sinisiä, jonkin $\mathcal{F}$:ään kuuluvan alueen reuna on kokonaan sininen. Olkoon S:ssä olevien suorien lukumäärä k. Väritetään loput $n - k$ suoraa punaisiksi. Sanomme, että kahden L:än suoran leikkauspiste on sininen, jos se on kahden sinisen suoran leikkauspiste. Piste on punainen, jos se on sinisen ja punaisen suoran leikkauspiste. Sinisten pisteiden lukumäärä on $\dbinom{k}{2}$. Olkoon ℓ jokin punainen suora. On olemassa jokin $A \in \mathcal{F}$, jonka ainoa punainen sivu on suoralla ℓ (muuten S:ään voitaisiin lisätä yksi suora). Olkoot A:n kärjet positiiviseen kiertosuuntaan nimettyinä p, p', s_1, $\ldots s_t$ niin, että p, $p' \in \ell$, mutta s_1, $\ldots$, s_t ovat sinisiä pisteitä. Liitetään suoraan ℓ pari (p, s_1). Todetaan, että mielivaltaiseen punaisen ja sinisen pisteen pariin (p, s) voidaan liittää enintään yksi suora ℓ, koska p ja s ovat peräkkäiset kärjet positiivisessa kiertosuunnassa enintään yhden alueen reunalla.

Väitetään, että jokaiseen siniseen pisteeseen liittyy enintään kaksi punaista suoraa. Jos näin on, niin

$$n - k \leq 2\binom{k}{2} = k^2 - k$$

eli $n \leq k^2$, ja väite on todistettu. Tehdään vastaoletus: johonkin siniseen pisteeseen s liittyy kolme punaista suoraa ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Sinisestä pisteestä s lähtee neljä puolisuoraa, niiden sinisten suorien osat, joiden leikkauspiste s on. Näistä kolmella on punainen piste p_i, joka kuuluu syhteen suorista ℓ_i, $i = 1, 2, 3$. Voidaan olettaa, että p_2 ja p_3 ovat samalla s:n kautta kulkevalla sinisellä suoralla ja p_1 on toisella. Olkoon A se alue, joka liittää s:n ja p_1:n. Alueen reunalla on positiiviseen kiertosuuntaan kierrettäessä tasan yksi punainen piste p_1:n ja s:n välissä. Sen on oltava p_2 tai p_3. Voidaan olettaa, että se on p_2. Mutta silloin A on kolmio sp_1p_2. Kolmion ainoa punainen sivu on p_1p_2; sen on kuuluttava suoraan ℓ_1. Mutta silloin pisteen p_2 kautta kulkee kolme suoraa: yksi sininen, ℓ_1 ja ℓ_2. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi, ja todistus on valmis.