IMO-harjoituskoe, Sorø, 14.7.2011

Ratkaisuja

Tehtävä 1. *Olkoot* $x_1, \ldots, x_{100}$ *ei-negatiivisia reaalilukuja, joille on voimassa* $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \le 1$ *kaikilla* $i = 1, \ldots, 100$ *(kun* $x_{101} = x_1$ *ja* $x_{102} = x_2$*). Määritä summan*

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$$

suurin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. Jos valitaan joka toiseksi luvuksi 0 ja joka toiseksi luvuksi $\frac{1}{2}$, saadaan $S = 50 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$. Osoitetaan, että S ei voi saada suurempaa arvoa. Tätä varten arvioidaan summan kahta peräkkäistä termiä ja otetaan huomioon luvuille asetettu suuruusehto. Kun käytetään aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä, saadaan

$$x_{2i-1}x_{2i+1} + x_{2i}x_{2i+2} \le (1 - x_{2i} - x_{2i+1})x_{21+1} + x_{2i}(1 - x_{2i} - x_{2i+1})$$
$$= (x_{2i} + x_{2i+1})(1 - x_{2i} - x_{2i+1}) \le \frac{\left((x_{2i} + x_{2i+1}) + (1 - x_{2i} - x_{2i+1})\right)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Summassa S on 50 yllä olevan epäyhtälöketjun vasemmassa päässä esiintyvää termiä, joten summan arvo on enintään $\frac{50}{4} = \frac{25}{4}$.

Tehtävä 2. *Olkoon* $A_1A_2 \ldots A_n$ *kupera monikulmio. Valitaan piste* P *monikulmion sisältä niin, että sen projektiot* $P_1, \ldots, P_n$ *suorilla* $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ *(tässä järjestyksessä) ovat monikulmion sivuilla. Todista, että jos sivuilta* $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ *valitaan mielivaltaiset pisteet* $X_1, \ldots, X_n$ *(tässä järjestyksessä), niin*

$$\max\left\{\frac{|X_1X_2|}{|P_1P_2|}, \ldots, \frac{|X_nX_1|}{|P_nP_1|}\right\} \ge 1.$$

Ratkaisu. Merkitään $P_{n+1} = P_1$, $A_{n+1} = A_1$ ja $X_{n+1} = X_1$. Todistetaan ensin aputulos: Piste P on jonkin kolmion $X_iA_{i+1}X_{i+1}$ ympäri piirretyn ympyrän sisällä tai kehällä. Tämä seuraa siitä, että kulmien $\angle X_iA_{i+1}X_{i+1}$ summa on $(n-2) \cdot 180°$ ja kulmien $\angle X_iPX_{i+1}$ summa on $360°$. Kaikkien nelikulmioiden $X_iA_{i+1}X_{i+1}P$ vastakkaisten kulmien $\angle X_iA_{i+1}X_{i+1}$ ja $\angle X_iPX_{i+1}$ summa on siis $n \cdot 180°$. Ainakin yhdellä nelikulmiolla $X_iA_{i+1}X_{i+1}P$ tämä summa on $\ge 180°$. Piste P on tämän silloin kolmion $X_iA_{i+1}X_{i+1}$ ympäri piirretyn ympyrän sisällä tai kehällä. Olkoot nyt γ ja Γ kolmioiden $P_iA_{i+1}P_{i+1}$ ja $X_iA_{i+1}X_{i+1}$ ympäri piirretyt ympyrät ja r ja R näiden ympyröiden säteet. Koska $\angle A_{i+1}P_iP$ on suora, $A_{i+1}P$ on ympyrän γ halkaisija ja $2r = A_{i+1}P$. Koska P on ympyrän Γ sisällä tai kehällä, $2R \ge A_{i+1}P$. Sovelletaan laajennettua sinilausetta kolmioihin $P_iA_{i+1}P_{i+1}$ ja $X_iA_{i+1}X_{i+2}$. Saadaan

$$P_iP_{i+1} = 2r\sin(\angle P_iA_{i+1}P_{i+1}) \le 2R\sin(\angle X_iA_{i+1}X_{i+2}) = X_iX_{i+1},$$

ja väite seuraa.

Tehtävä 3. *Olkoon k positiivinen kokonaisluku ja olkoot $b > w > 1$ kaksi muuta kokonaislukua. On kaksi helminauhaa. Toisessa on w valkoista helmeä ja toisessa b mustaa helmeä. Sanome, että helminauhan pituus on siinä olevien helmien lukumäärä. Nauhoja leikataan vaiheittain seuraavien sääntöjen mukaan:*

(i) Nauhanpätkät asetetaan pituusjärjestykseen. Jos pätkissä on yhtä pitkiä, valkoiset pätkät edeltävät mustia pätkiä. Valitaan k pisintä pätkää, jos näin monessa pätkässä on vähintään kaksi helmeä. Jos tällaisia pätkiä on vähemmän kuin k kappaletta, ne valitaan kaikki.

(ii) Kaikki valitut pätkät leikataan osiksi, joiden pituus eroaa enintään yhdellä. (Jos esimerkiksi on neljä mustaa pätkää, joiden pituudet ovat 5, 4, 4 ja 2 ja kolme valkoista pätkää, joiden pituudet ovat 8, 4 ja 3, ja jos $k = 4$, niin ne pätkät joissa on 8 valkoista helmeä, 5 mustaa helmeä, 4 valkoista helmeä ja neljä mustaa helmeä leikataan osiksi (4, 4), (3, 2), (2, 2) ja (2, 2).)

Prosessi päättyy, kun syntyy ensimmäinen yhden valkoisen helmen muodostama pätkä. Todista, että tuolloin on vielä ainakin yksi ketju, joka muodostuu ainakin kahdesta mustasta helmestä.

Ratkaisu. Merkitään jakotilannetta i:nnen jaon jälkeen symbolilla A_i. Alkutilanne on siis A_0 ja jakotapahtumia ovat $A_i \to A_{i+1}$. Nauhanpätkää, jossa on m helmeä, kutsutaan m-ketjuksi. Ajatellaan prosessia jatkettavan, kunnes jäljellä on vain 1-ketjuja. Olkoon A_s se tilanne, jossa ensimmäisen kerran ilmaantuu jokin 1-ketju (valkoinen tai musta), A_t se tilanne, jolloin nauhoja on ensi kerran enemmän kuin k kappaletta. (Ellei tällaista tilannetta ole, merkitään $t = \infty$) ja olkoon A_f se tilanne, jolloin kaikki mustat helmet ovat eri ketjuissa. Todistettava väite on nyt, että tilanteessa A_{f-1} on jokin valkea 1-ketju.

Selvästi $s \leq f$. Koska tilanteessa A_f on vain ketjuja, joissa on yksi musta helmi, tilanteessa A_{f-1} kusskin ketjussa, jossa on mustia helmiä, on enintään kaksi mustaa helmeä.

Kun $i \leq t-1$, niin jaossa $A_i \to A_{i+1}$ kaikki ketjut, joissa on enemmän kuin yksi helmi, katkaistaan, ja jos $i < s$, niin kaikki ketjut katkaistaan. Olkoot nyt B_i ja b_i vaiheessa A_i pisimmän ja lyhimmän mustan ketjun pituudet ja W_i, w_i vastaavat valkean ketjun pituudet. Osoitetaan induktiolla, että jos $i \leq \min\{s, t\}$, niin tilanteessa A_i mustia ja valkoisia ketjuja on kumpiakin 2^i kappaletta ja $B_i \geq W_i$, $b_i \geq w_i$. Väite on tosi, kun $i = 0$. Ketjujen lukumäärää koskeva väite on ilmeinen seuraus induktio-oletuksesta ja siitä, että kaikki ketjut katkaistaan. Pituuksia koskevat väitteet seuraavat induktio-oletuksesta ja katkaisun pituussäännöstä: $B_i = \lceil B_{i-1}/2 \rceil \geq \lceil W_{i-1}/2 \rceil$, $b_i = \lfloor b_{i-1}/2 \rfloor \geq \lfloor w_{i-1}/2 \rfloor = w_i$.

Käsitellään erikseen tapaus 1, jossa $s \leq t$ tai $f \leq t+1$ ja tapaus 2, jossa $t+1 \leq s$ ja $t+2 \leq f$. Edellinen tapaus on erityisesti kyseessä silloin, kun $t = \infty$. Tapauksessa 1 on tilanteessa A_{s-1} $B_{s-1} \geq W_{s-1}$, $b_{s-1} \geq w_{s-1} > 1$, koska $s - 1 \leq \min\{s, t\}$. Jos olisi $s = f$, niin tilanteessa A_{s-1} ei olisi yhtään valkeaa 1-ketjua eikä yhtään mustaa c-ketjua, missä $c > 2$. Siis $2 = B_{s-1} \geq W_{s-1} \geq b_{s-1} \geq w_{s-1} > 1$. Kaikki edellisen epäyhtälöketjun luvut ovat siis kakkosia. Tilanteessa A_{s-1} kaikkien ketjujen pituus olisi 2, mistä seuraisi $b = 2 \cdot 2^{s-1} = w$. Tämä on vastoin oletusta. Siis $s \leq f - 1$ ja $s \leq t$. Siten s:nnessä askeleessa jokainen ketju jaetaan. Jos tässä askeleessa ilmaantuisi musta 1-ketju, niin epäyhtälön $w_{s-1} \leq b_{s-1}$ perusteella ilmaantuisi myös valkea 1-ketju, mutta kaikki mustat ketjut eivät vielä olisi 1-ketjuja, joten väite pitää paikkansa.

Käsitellään vielä tapaus 2, jossa $t + 1 \leq s$ ja $t + 2 \leq f$. Tilanteessa A_t on tasan 2^t valkoista ja 2^t mustaa ketjua, kaikkien pituus on enemmän kuin 1, ja $2^{t+1} > k \geq 2^t$ (koska tilanteessa A_t on kaikkiaan 2^t ketjua). Askeleessa $t+1$ katkaistaan tasan k ketjua, ja niistä enintään 2^t on mustia, joten tilanteessa A_{t+1} valkoisia ketjuja on ainakin $2^t + (k - 2^t) = k$ kappaletta. Koska valkeiden ketjujen määrä ei voi vähentyä, tilanteessa A_{f-1} valkeita ketjuja on ainakin k kappaletta. Tilanteessa A_{f-1} mustien ketjujen pituus on enintään 2, ja ainakin yksi musta 2-ketju katkaistaan f:nnessä askeleessa. Täten tuossa askeleessa katkaistaan enintään $k - 1$ valkoista ketjua, joten on ainakin yksi valkea ketju W, jota ei katkaista. Koska askeleessa f katkaistaan musta 2-ketju, siinä katkaistaan kaikki ainakin kahden pituiset valkeat ketjut. Se valkea ketju, jota ei katkaista on silloin välttämättä 1-ketju. Tämä todistaa väitteen.