Huhtikuu 2020

Tehtävä 1. Positiivisilla kokonaisluvuilla a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} pätee

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n, \quad \text{kun } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Osoita, että ainakin yksi luvuista a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} on jaollinen luvulla 2^{2020}.

Tehtävä 2. Etsi kaikki ei-negatiivisten reaalilukujen jonot $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$, jotka toteuttavat jokaisen seuraavista kolmesta ehdosta:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) on olemassa jonon $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ permutaatio $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$, jolle pätee

$$\sum_{i=1}^{2020} \big((x_i + 1)(y_i + 1)\big)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Jonon permutaatio on jono, joka on yhtä pitkä kuin alkuperäinen jono ja jossa on samat alkiot, mutta alkiot voivat olla eri järjestyksessä. Esimerkiksi jono $(2, 1, 2)$ *on jonon* $(1, 2, 2)$ *permutaatio ja nämä molemmat ovat jonon* $(2, 2, 1)$ *permutaatioita. Huomaa, että mikä tahansa jono on itsensä permutaatio.*

Tehtävä 3. Olkoon $ABCDEF$ konveksi kuusikulmio, jossa on $\angle A = \angle C = \angle E$ ja $\angle B = \angle D = \angle F$ sekä (sisä)kulmien $\angle A$, $\angle C$ ja $\angle E$ puolittajat leikkaavat samassa pisteessä.

Osoita, että myös (sisä)kulmien $\angle B$, $\angle D$ ja $\angle F$ puolittajat leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.

Huomaa, että $\angle A = \angle FAB$. *Muut kuusikulmion sisäkulmat on määritelty samalla tavalla.*

Language: Finnish

Aikaa on 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Jotta kilpailu olisi reilu ja mukava kaikille, älä mainitse tehtäviä tai viittaa tehtäviin internetissä tai sosiaalisessa mediassa ennen sunnuntaita 19. huhtikuuta klo 01:00.

Tehtävä 4. Sanotaan, että kokonaislukujen 1, 2, ..., m permutaatio on *tuore*, jos ei ole olemassa positiivista kokonaislukua $k < m$, jolle permutaation k ensimmäistä lukua ovat 1, 2, ..., k jossakin järjestyksessä. Olkoon f_m kokonaislukujen 1, 2, ..., m tuoreiden permutaatioiden lukumäärä.

Todista, että $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ kaikilla $n \geq 3$.

Esimerkiksi, jos $m = 4$, niin permutaatio $(3, 1, 4, 2)$ on tuore, kun taas permutaatio $(2, 3, 1, 4)$ ei ole.

Tehtävä 5. Olkoon ABC kolmio, jolle $\angle BCA > 90°$. Kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ säde on R. Janalla AB on sisäpiste P, jolle $PB = PC$ ja janan PA pituus on R. Janan PB keskinormaali leikkaa ympyrän Γ pisteissä D ja E.

Todista, että P on kolmion CDE sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Tehtävä 6. Olkoon $m > 1$ kokonaisluku. Jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ määritellään seuraavasti: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ ja kaikilla $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Määritä kaikki kokonaisluvut m, joille kaikki jonon jäsenet ovat neliölukuja.

Language: Finnish

Aikaa on 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Jotta kilpailu olisi reilu ja mukava kaikille, älä mainitse tehtäviä tai viittaa tehtäviin internetissä tai sosiaalisessa mediassa ennen sunnuntaita 19. huhtikuuta klo 01:00.