Language: **Finnish**

Day: **1**

Keskiviikkona 11.4.2018

Tehtävä 1. Olkoon ABC kolmio, jossa $CA = CB$ ja $\angle ACB = 120^\circ$, ja olkoon M janan AB keskipiste. Olkoon piste P kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä, ja olkoon Q sellainen piste janalla CP että $QP = 2QC$. Pisteen P kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa AB vasten leikkaa suoran MQ yksikäsitteisessä pisteessä N.

Osoita, että on olemassa sellainen ympyrä, jolla piste N on aina riippumatta pisteen P sijainnista.

Tehtävä 2. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

(a) Osoita, että jokainen kokonaisluku $x \geq 2$ voidaan esittää joukon A yhden tai useamman alkion tulona, missä näiden alkioiden ei välttämättä tarvitse olla keskenään erisuuria.

(b) Kun $x \geq 2$ kokonaisluku, olkoon $f(x)$ pienin sellainen kokonaisluku, että x voidaan kirjoittaa joukon A alkioiden tulona niin, että tulontekijöiden määrä on $f(x)$, ja tulontekijät eivät välttämättä ole keskenään erisuuria.

Osoita, että on olemassa äärettömän monta kokonaislukuparia (x, y), joilla $x \geq 2$, $y \geq 2$, ja

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Parit (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat erisuuria, jos ja vain jos $x_1 \neq x_2$ tai $y_1 \neq y_2$.)

Tehtävä 3. Olkoot $C_1, \ldots, C_n$ EGMO:n n kilpailijaa. Kilpailun jälkeen kilpailijat jonottavat ravintolan edessä seuraavien sääntöjen mukaisesti.

- Tuomaristo valitsee kilpailijoiden alkuperäisen järjestyksen.
- Kerran minuutissa tuomaristo valitsee kokonaisluvun i, joka toteuttaa ehdon $1 \leq i \leq n$.
  - Jos kilpailijan C_i edessä on vähintään i kilpailijaa, kilpailija C_i maksaa yhden euron tuomaristolle ja siirtyy jonossa eteenpäin i paikkaa.
  - Jos kilpailijan C_i edessä on vähemmän kuin i kilpailijaa, ravintola aukeaa ja prosessi loppuu.

(a) Osoita, että riippumatta siitä mitä päätöksiä tuomaristo tekee, on prosessin ennen pitkää loputtava.

(b) Määritä kaikilla luvun n arvoilla suurin mahdollinen määrä euroja, jonka tuomaristo voi kerätä valitsemalla ovelasti alkuperäisen järjestyksen ja siirrot.

Torstaina 12.4.2018

Tehtävä 4. *Domino* on 1×2- tai 2×1-laatta.

Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Dominoita asetetaan $n \times n$-laudalle siten, että jokainen domino peittää täsmälleen kaksi laudan ruutua ja dominot eivät mene päällekkäin.

Rivin tai sarakkeen *arvo* on niiden dominoiden lukumäärä, jotka peittävät vähintään yhden kyseisen rivin tai sarakkeen ruuduista. Dominoiden asettelua kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos on olemassa $k \geq 1$ niin, että jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen arvo on k.

Osoita, että kaikilla $n \geq 3$ on olemassa tasapainoinen asettelu ja määritä pienin mahdollinen määrä dominoita, joka tarvitaan sellaiseen asetteluun.

Tehtävä 5. Olkoon Γ kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Ympyrä Ω sivuaa janaa AB ja lisäksi se sivuaa ympyrää Γ pisteessä, joka on janan AB samalla puolella kuin piste C. Kulman $\angle BCA$ puolittaja leikkaa ympyrän Ω kahdessa eri pisteessä P ja Q.

Osoita, että $\angle ABP = \angle QBC$.

Tehtävä 6.

(a) Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla t, jotka toteuttavat ehdon $0 < t < \frac{1}{2}$, on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolla on seuraava ominaisuus: kun S on mikä tahansa n positiivisen kokonaisluvun joukko, niin on olemassa kaksi keskenään eri suurta alkiota x ja y, jotka kuuluvat joukkoon S ja lisäksi on olemassa *epänegatiivinen* kokonaisluku m (eli $m \geq 0$), joilla

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Onko kaikilla ehdon $0 < t < \frac{1}{2}$ toteuttavilla reaaliluvuilla t olemassa ääretön positiivisten kokonaislukujen joukko S, jolla ehto

$$|x - my| > ty$$

toteutuu kaikilla joukon S eri alkioista x ja y muodostuvilla pareilla ja kaikilla *positiivisilla* kokonaisluvuilla m (eli $m > 0$)?

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia

Jokainen tehtävä on seitsemän pisteen arvoinen