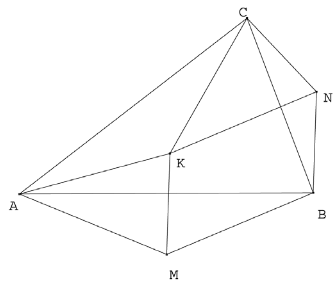
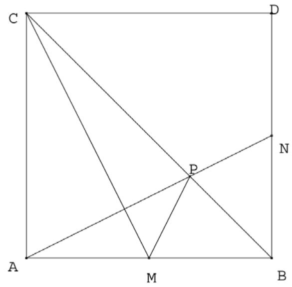
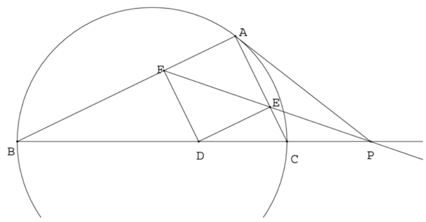
Baltian Tie -kilpailutehtävien ratkaisuja vuosilta 2000–2009



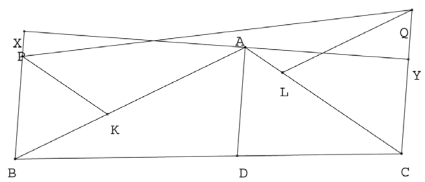
2000.1. Kolmiot AMB, BNC ja AKC ovat tasakylkisiä ja yhdenmuotoisia. Siis $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AK}{AC}$ ja $\angle MAK = \angle BAC$. Kolmiot AMK ja ABC ovat yhdenmuotoisia (sks). Samoin $\dfrac{CN}{CB} = \dfrac{CK}{CA}$ ja $\angle NCK = \angle BCA$. Siis myös kolmiot KNC ja ABC ovat yhdenmuotoisia (sks). Näin ollen kolmiot AMK ja KNC ovat yhdenmuotoisia. Mutta $AK = KC$, joten AMK ja KNC ovat itse asiassa yhteneviä. Tästä seuraa $MB = AM = KN$ ja $BN = NC = MK$. Nelikulmio $KMBN$ on suunnikas, koska sen vastakkaiset sivut ovat pareittain yhtä pitkät.



2000.2. Täydennetään suorakulmainen kolmio ABC neliöksi $ABDC$. Koska $CM \perp AN$, ja $CA \perp AB$, niin $\angle NAB = \angle MAC$. Kulmat CAB ja ABN ovat suoria ja $AB = AC$. Kolmiot CAM ja ABN ovat yhteneviä (ksk), joten $BN = AM = MB$. Lisäksi $\angle MBP = \angle PBN = 45°$. Kolmiot MBP ja NBP ovat yhteneviä (sks), joten $\angle PMB = \angle BNP = \angle AMC$.



2000.3. Leikatkoot suorat FE ja BC pisteessä P. Riittää, kun osoitetaan, etä PA on kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän tangentti. Tämä tulee osoitetuksi, kun osoitetaan, etä $\angle CAP = \angle CBA$. Koska $AFDE$ on neliö, $\angle DEF = \angle AEF$ ja $DE = AE$. Siis $\angle DEP = \angle AEP$ ja kolmiot EDP ja EAP ovat yhteneviä (sks). Siis $\angle PAC = \angle PAE = \angle PDE$. Mutta koska $AFDE$ on neliö, $DE \| AB$. Siis $\angle EDP = \angle ABC$, ja todistus on valmis.



2000.4. Olkoon AD kullman BAC puolittaja. Silloin $\angle ABD = \angle DAC = 60°$. Koska myös $\angle PBA = \angle QCA = 60°$, $PB \| AD \| CQ$. Piirretään A:n kautta suoria BP ja QC vastaan kohtisuora suora, joka leikkaa BP:n pisteessä X ja QC:n pisteessä Y. Suorakulmaisten kolmioiden AXB ja AYC yksi kulma on $60°$. Tästä seuraa, että $AX = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$ ja $AY = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AC$. Toisaalta $XY \le PQ$. Väite seuraa.

2000.5. Merkitään $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Piirretään kulman ACB puolittaja; se leikaa AB:n pisteessä D. Kulmanpuolittajalauseen perusteella $BD = \dfrac{a}{a+b}c$. Tehtävän ehdosta seuraa $ab = c^2 - a^2$ ja $\dfrac{c}{a+b} = \dfrac{a}{c}$. Mutta tämä merkitsee, että

$$\frac{BD}{BC} = \frac{c}{a+b} = \frac{BC}{BA}.$$

Koska kolmioissa BDC ja BCA on yhteinen kulma $\angle B$, kolmiot ovat yhdenmuotoisia (sks). Mutta silloin $\angle Bca = 2 \cdot \angle BCD = 2 \cdot \angle BAC$. Kysytty suhde on siis $1 : 2$.

2000.6. Jos hotellissa on asukas, joka tuntee kaikki muut, hotelliasukkaan tuttavien määrä on jokin luvuista $1, \ldots, n-1$. Ellei kukaan tunne kaikkia muita, asukkaan tuntemien muiden asukkaiden määrä on jokin luvuista $0, 1, \ldots, n-2$. Joka tapauksessa hotellin n:n asukaan joukossa on aina jotkin kaksi, sanokaamme A ja B, joilla on yhtä monta tuttavaa muiden asukkaiden joukossa. Oletetaan, että A:lla ja B:llä ei ole yhteisiä tuttavia. Silloin A ja B voivat kumpikin tuntea enintään $\left\lfloor \dfrac{1}{2}(n-2) \right\rfloor$ (elleivät tunne toisiaan) tai $\left\lfloor \dfrac{1}{2}(n-2) \right\rfloor +$ 1 (jos A ja B tuntevat toisensa) muuta asukasta. Jos n on pariton, $2\left\lfloor \dfrac{1}{2}(n-2) \right\rfloor = n-3$, ja välttämättä ainakin yksi asukas on tuntematon sekä A:lle että B:lle. Jos $n = 4$, Pertti on väärässä: oletetaan, että asukas A tuntee B: ja C:n, asukas B tuntee A:n ja D:n, C tuntee A:n ja D tuntee B:n. Silloin A:lla ja B:llä yhtä monta tuttua, muttei yhteisiä tuttuja eikä myöskään tuntemattomia. Samoin C:llä ja D:llä on yhtä monta tuttavaa, muttei yhteisiä tuttuja eikä tuntemattomia.

Olkoon sitten n parillinen ja ≥ 6. Merkitään hotellin kaikkien asukkaiden joukkoa $\mathcal{H}$:lla. Oletetaan, että vieraílla A ja B on sama määrä tuttuja, muttei yhtään yhteistä tuttua tai tuntematonta. Aikaisemman päättelyn mukaan kummallakin on $\dfrac{1}{2}n$ tai $\dfrac{1}{2}n - 1$ tuttavaa joukossa $\mathcal{H}$. Tarkastellaan sitten joukkoa $\mathcal{H} \setminus \{A,\, B\}$. Siinä on kaksi henkilöä, C ja D, joilla on sama määrä tuttavia joukossa $\mathcal{H} \setminus \{A,\, B\}$. Koska C ja D eivät ole sekä A:n että B:n tutuja tai tuntemattomia, kummallakin on sama määrä tuttuja joukossa $\mathcal{H}$. Määrä on $\dfrac{1}{2}n$ tai $\dfrac{1}{2}n - 1$. Koska $n \geq 6$, joukossa $\mathcal{H} \setminus \{A,\, B,\, C,\, D\}$ on henkilöt E ja F, joilla on yhtä monta tuttavaa joukossa $\mathcal{H} \setminus \{A,\, B,\, C,\, D\}$. Jokaisella joukkoon $\mathcal{H} \setminus \{A,\, B,\, C,\, D\}$ kuuluvalla on tasan kaksi tuttua ja tasan kaksi tuntematonta joukossa $\{A,\, B,\, C,\, D\}$. Tästä seuraa, että E:llä ja D:llä on yhtä monta tuttua joukossa $\mathcal{H}$ ja tämä lukumäärä on jälleen $\dfrac{1}{2}n$ tai $\dfrac{1}{2}n - 1$. Joukossa $\{A,\, B,\, C,\, D,\, E,\, F\}$ on siis ainakin neljä hotellivierasta, joilla on sama määrä tuttavia. (A:n ja B:n, C:n ja D:n ja E:n ja F:n tuttavien määrä on sama.) Jos näistä neljästä valitan mitkä hyvänsä kolme, niin yksi näistä kolmesta on joko kahden mun yhteinen tuttava tai outo kummallekin. (Esimerkiksi A, B ja C; C tuntee tasan toisen A:sta ja B:stä, esimerkiksi A:n; jos A ja B tuntevat toisensa, A on B:n ja C:n yhteinen tuttava, jos A ja B eivät tune toisiaan, B on outo A;lle ja C:lle.)

2000.7. Jokaisen painikkeen tilaa on muutettava pariton määrä kertoja. Näin tapahtuu, jos jokaista painiketta painetaan kerran: samalla rivillä olevien painikkeiden painaminen muuttaa tilaa 50 kertaa ja samassa sarakkeessa olevien painikkeiden painaminen lisäksi 39 kertaa. Kaikkien painikkeiden tilan voi siis muuttaa 2000:lla painalluksella. Osoitetaan, että kaikkien painikkeiden tilan muuttaminen vaatii sen, että jokaista painiketta painetaan ainakin kerran. Oletetaan, että jotakin painiketta ei ole ollenkaan koskettu. Voidaan olettaa, että tämä painike on ylimmän rivin vasemmanpuoleisin painike. Jotta tämän painikkeen tilaa olisi muuttunut, on joko ylimmän rivin tai vasemmanpuoleisen sarakkeen muita painikkeita painettava yhteensä pariton määrä kertoja. Oletetaan, että ylimmän rivin painikkeita on painettu yhteensä pariton määrä kertoja. Jokaisessa sarakkeessa on toisesta rivistä alkaen oltava parillinen määrä painalluksia, jotta ensimmäisen rivin painikkeiden tila muuttuisi. Koska rivejä on pariton määrä, on jossain rivissä, sanokaamme toisessa, oltava parillinen määrä painalluksia. Mutta silloin ensimmäisen sarakkeen toiseen painikkeeseen kohdistuisi parillinen määrä tilanmuutoksia. Jotta kaikkien painikkeiden tila muuttuisi, on siis painikkeita painettava ainakin 2000 kertaa.

2000.8. Olkoot Pertin ystävät juhlissa $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{13}$ Oletetaan, että Pertti palasi juhlaan k kertaa eli että hän hyvästeli ystäviään $k+1$ kertaa. Tämä merkitsee, että Pertti unohti hyvästellä ainakin yhden ystävänsä k kertaa. Olkoon tämä ystävä Y_{13}. Olkoon x_j se määrä kertoja, jonka Pertti unohti hyvästellä ystävänsä Y_j:n. Koska Pertti hyvästeli kunkin ystävänsä eri määrän kertoja, ystävien numerointi voidaan laatia niin, että $x_j \ge j-1$. Kullakin hyvästelykerralla Pertti unohti tasan kolme ystäväänsä. Siis

$$3(k+1) = \sum_{j=1}^{12} x_j + k \ge \sum_{k=0}^{11} j + k = 66 + k.$$

Siis $2k \ge 63$ eli $k \ge 32$. Osoitetaan vielä, että $k = 32$ on mahdollinen. Seuraavan 33-sarakkeisen taulukon pystyrivit osoittavat niiden Pertin ystävien järjestysnumerot, jotka hän kunakin hyvästelykertana unohti:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
13\ldots13 & 13 & 13\ldots13 & 13\ldots13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 11\\
11\ldots11 & 11 & 8\ldots\ 8 & 7\ldots\ 7 & 7 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3\\
\underbrace{10\ldots10}_{10} & 9 & \underbrace{9\ldots\ 9}_{8} & \underbrace{6\ldots\ 6}_{6} & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 1
\end{array}$$

2000.9. Merkitään ruudut lukupareilla (i, j), $1 \le i, j \le 2k$. Olkoon L kaikkien tällaisten parien joukko. Muodostetaan funktio $f : L \to L$ asettamalla

$$f(i, j) = \begin{cases} (i+1, j+k), & \text{kun } i \text{ on pariton ja } j \le k,\\ (i-1, j+k), & \text{kun } i \text{ on parillinen ja } j \le k,\\ (i+1, j-k), & \text{kun } i \text{ on pariton ja } j > k,\\ (i-1, j-k), & \text{kun } i \text{ on parillinen ja } j > k. \end{cases}$$

On helppo tarkistaa, että f on bijektio. Koska pisteiden (i, j) ja $f(i, j)$ etäisyys on $\sqrt{1+k^2}$, f kuvaa jokaisen $\times$:llä merkityn ruudun $\circ$:llä merkitylle ruudulle. $\circ$:llä merkittyjä ruutuja ei voi olla enempää kuin $\times$:llä merkittyjä.

2000.10. Joka kerta kun operaatio tehdään, taululle jäävien lukujen erotus on puolet siitä, mikä se oli ennen operaatiota. Operaatio voidaan tehdä, jos lukujen erotus on parillinen. Operaatio voidaan tehdä n kertaa, jos lukujen erotus alkutilanteessa on $2^n a$. Koska $2^{11} = 2048 > 2000$, operaatio voidan tehdä enintään 10 kertaa. Jos toinen luvuista on aluksi $2000 - 2^{10} = 976$, operaatio voidaan tehdä 10 kertaa.

2000.11. Eräs mahdollinen tehtävän ehdon toteuttava lukujono saadaan seuraavasti: jos luvun n alkutekijähajotelma on $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, asetetaan $a_n = 2^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$. Koska $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, $a_{2000} = 2^{3+4} = 128$. Pienin mahdollinen luvun a_{2000} arvo on siis ≤ 128. Kasvavassa jonossa 1, 5, 25, 125, 250, 500, 1000, 2000 jokainen luku on jaollinen edellisellä. Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_{2000}$ jokin tehtävän ehdon toteuttava jono. Silloin $a_1 \geq 1$ ja $a_{2000} \geq 2a_{1000} \geq 4a_{500} \geq 8a_{250} \geq 16a_{125} \geq 32a_{25} \geq 64a_5 \geq 128a_1 \geq 128$. Pienin mahdollinen luvun a_{2000} arvo on siis 128.

2000.12. Olkoon joukossa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ luvut $y_1, y_2, \ldots, y_k$, joissa on maksimimäärä numeroita ja joissa on viimeistä lukuun ottamatta samat numerot (tällaisia lukuja voi olla vain yksikin). Silloin $y_1 = 10y+a_1, \ldots, y_k = 10y+a_k$, missä $0 \leq a_1 < \ldots < a_k \leq 9$. Tällöin

$$\frac{1}{y_1} + \cdots \frac{1}{y_k} \leq 10 \cdot \frac{1}{10y+0} = \frac{1}{y}.$$

Luvuista x_i tehdyn oletuksen nojalla $y \notin X$. Jos luvut $y_1, y_2, \ldots, y_k$ poistetaan joukosta X ja tilalle laitetaan y, syntynyt joukko toteuttaa tehtävän ehdon (koska luvuissa y_i oli maksimimäärä numeroita, y ei voi olla minkään vähempinumeroisen luvun alku) ja lukujen käänteislukujen summa ei pienene. Samaa jatkaen tullaan lopulta epäyhtälöön

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} = \frac{7129}{2520} < 3.$$

2000.13. Olkoon $a_i = k + id$. Tehdään vastaoletus: $n = pq$, missä p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä. Oletuksen mukaan p on $k + pd$:n tekijä ja q on $k + qd$:n tekijä. Silloin k on jaollinen p:llä ja q:lla, joten k on jaollinen n:llä. Mutta nyt $a_n = k + nd$, joten a_n on jaollinen n:llä. Ristiriita. Siis n:llä voi olla vain yksi alkutekijä, eli n on alkuluvun potenssi.

2000.14. Osoitetaan, että ainoa ehdon toteuttava luku on 2000. Merkitään $d(n)$:llä luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärää ja $a(p, n)$:llä alkuluvun p eksponenttia luvun n alkutekijähajotelmassa (siis esimerkiksi $a(2, 12) = 2$ ja $a(3, 12) = 1$). Merkitään vielä $f(n) = \dfrac{n}{d(n)}$. Tehtävänä on siis etsiä ne luvut n, joille $f(n) = 100$. Todistetaan ensin

Apulause. Jos n on positiivinen kokonaisluku ja $m < n$ on n:n tekijä, niin $f(m) \leq f(n)$ ja $f(m) = f(n)$ jos ja vain jos m on pariton ja $n = 2m$.

Todistus. Tunnetusti $d(n) = \prod_p (1 + a(p, n))$. Oletetaan ensin, että $n = mp$ ja p on alkuluku. Silloin $a(p, m) = a(p, n) - 1$ ja

$$\frac{f(n)}{f(m)} = \frac{nd(m)}{md(n)} = p\frac{1 + (a(p, m)}{1 + a(p, n)} = \frac{pa(p, n)}{1 + a(p, n)} \geq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $p = 2$ ja $a(2, n) = 1$ eli jos $p = 2$ ja m on pariton. Oletetaan sitten, että $n = ms$, missä s on jokin kokonaisluku. Kun edellistä päättelyä sovelletaan s:n kuhunkin alkutekijään, saadaan induktiolla helposti $f(m) \leq f(n)$; jotta yhtäsuuruus säilyisi jokaisessa induktioaskeleessa, olisi ”poistuvan tekijä aina oltava 2 ja ”jäljelle jäävän tekijän” pariton. Tämä on mahdollista vain, jos $s = 2$. Apulause on todistettu.

Oletetaan nyt, että $f(n) = 100$ eli $n = 100d(n) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot d(n)$. Tehdään muutamia arvioita.

1°. $f(2^7 \cdot 5^2) = \dfrac{3200}{8 \cdot 3} > 100$. Jos olisi $(2^7 \cdot 5^2) \mid n$, niin apulauseen perusteella olisi $f(n) > 100$. Siis $a(2, n) \le 6$.

2°. $f(2^2 \cdot 5^4) = \dfrac{2500}{15} > 100$. Siis $a(5, n) \le 3$.

3°. $f(2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^4) = \dfrac{8100}{45} > 100$. Siis $a(3, n) \le 3$.

4°. Jos $q > 5$ on alkuluku ja $k \ge 4$, niin

$$f(2^2 \cdot 5^2 \cdot q^k) = \frac{100q^k}{9(k+1)} > \frac{100 \cdot 3^k}{9(k+1)} = f(2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^k) > 100.$$

Siis $a(q, n) \le 3$.

5°. Jos alkuluku $q > 7$ on on n:n tekijä, niin q on $d(n)$:n tekijä, eli $1 + a(p, n) = q$ jollain alkuluvulla p. Mutta jo todistetun mukaan $a(p, n) \le 6$ kaikilla p. Siis n:n alkutekijät ovat ≤ 7.

6°. Jos $7 \mid n$, niin $7 \mid d(n)$, joten $7 \mid 1 + a(p, n)$ jollain p. Edellä todisteun mukaan tämä on mahdollista jos ja vain jos $p = 2$ ja $a(2, n) = 6$. Mutta $f(2^6 \cdot 5^2 \cdot 7) = \dfrac{11200}{42} > 100$. Siis 7 ei voi olla n:n tekijä eikä myöskään $a(2, n) = 6$ ole mahdollinen.

7°. Jos $a(5, n) = 3$, niin $5 \mid d(n)$ ja siis $5 \mid 1 + a(p, n)$ jollain p. Aiemmin todistetun nojalla $p = 2$. Siis $a(2, n) = 4$. Toisaalta, jos $a(2, n) = 4$, niin $5 \mid d(n)$ ja $5^3 \mid n$ ja kohdan 2° perusteella $d(5, n) = 3$. $f(2^4 \cdot 5^3) = \dfrac{2000}{20} = 100$. Luku 2000 toteuttaa tehtävän ehdon.

8°. Tarkastetaan vielä tapaus $a(5, n) = 2$. Nyt 7°:n mukaan $a(2, n) \ne 4$, joten $a(2, n) \in \{2, 3, 5\}$. Koska $a(5, n) = 2$, niin $3 \mid d(n)$ ja $3 \mid n$. Siis $a(3, n) \in \{1, 2, 3\}$. Nyt 7°:n mukaan $a(2, n) \ne 4$, joten $a(2, n) \in \{2, 3, 5\}$. Jos olisi $d(2, n) = 3$, niin $d(n)$ on jaollinen 2:lla, muttei 4:llä. Toisaalta $d(n)$ on jaollinen $1 + a(2, n)$:llä eli 4:llä. Ristiita. Siis $a(2, n) \in \{2, 5\}$. Tästä seuraa, että $3^2 \mid d(n)$ ja $3^2 \mid n$. Siis $a(3, n) \in \{2, 3\}$. Jos olisi $a(3, n) = 2$, niin $3^3 \mid d(n)$ ja $3^3 \mid n$ eli $d(3, n) \ge 3$. Jos olisi $a(3, n) = 3$, niin olisi $a(3, d(n)) = 2$ja edelleen $a(3, n) = 2$. Ristiriita taas.

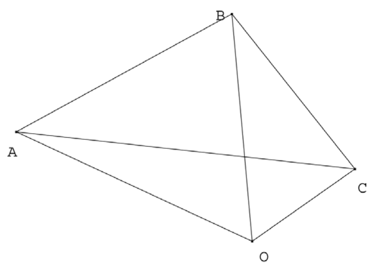
Siis $n = 2000$ on ainoa tehtävän ratkaisu.

2000.15. Koska n ei ole jaollinen 2:lla eikä 3:lla, $n \equiv \pm 1 \mod 6$. Jos $n = 1$, väite pätee. Jos $n = 5$, saadaan $(k+1)^5 - k^5 - 1 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k = 5k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1) = 5(k+1)(k^2 + k + 1)$, joten väite pätee. Olkoon siten $n > 6$ ja olkoon $t = k^2 + k + 1$. Lasketaan $\bmod t$:

$$(k+1)^n - k^n - 1 = (k+1)^2(k+1)^{n-2} - k^2k^{n-2} - 1 = (t+k)(k+1)^{n-2} - (t-(k+1))k^{n-2} - 1$$
$$\equiv k(k+1)^{n-2} + (k+1)k^{n-2} - 1 = (k^2+k)((k+1)^{n-3} + k^{n-3}) - 1 = (t-1)((k+1)^{n-3} + k^{n-3}) - 1$$
$$\equiv -(k+1)^{n-3} - k^{n-3} - 1 = -(k+1)^2(k+1)^{n-5} - k^2k^{n-5} - 1$$
$$= -(t+k)(k+1)^{n-5} - (t-(k+1))k^{n-5} - 1 \equiv -k(k+1)^{n-5} + (k+1)k^{n-5} - 1$$
$$= -(t-1)((k+1)^{n-6} - k^{n-6}) - 1 \equiv (k+1)^{n-6} - k^{n-6} - 1.$$

Jos yhtälöäketjun viimeinen luku on jaollinen t:llä eli k^2+k+1:llä, myös ensimmäinen on. Väite todistuu siis induktiolla.

2000.16. Esitetään geometrinen todistus. Olkoon $OA = a$, $OB = b$ ja $OC = c$ ja olkoon $\angle AOB = \angle BOC = 60°$. Silloin $\angle AOC = 120°$. Koska $\cos 60° = \frac{1}{2}$ ja $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, sadaan kosinilauseesta heti $\sqrt{a^2 - ab + b^2} = AB$, $\sqrt{b^2 - bc + c^2} = BC$ ja $\sqrt{a^2 + ab + c^2} = AC$. Väite seuraa kolmioepäyhtälöstä $AC \le AB + BC$.



2000.17. Merkitään $X = x + z$, $Y = y + t$. Ryhmän kaksi ensimmäistä yhtälöä ovat nyt $X + Y = 5$ ja $XY = 4$. Ratkaistaan yhtälö $X + \frac{4}{X} = 5$. Nähdään heti, että ratkaisut ovat $X = 1$ ja $X = 4$. Siis $\{X, Y\} = \{1, 4\}$. Tehtävän ryhmän kolmas yhtälö on $Yxz + Xyt = 3$ ja koska $XY = 4$, viimeinen yhtälö voidaan kirjoittaa $(Yxz)(Xyt) = -4$. Nyt voidaan ratkaista samoin kuin edellä $\{Xyt, Yxz\} = \{-1, 4\}$. Ratkaistavaksi jää eri kombinatioita vastaavat yksinkertaiset yhtälöparit. Saadaan: Jos $X = 1$, $Y = 4$, $Yxz = -1$ ja $Xyt = 4$, niin $\{x, z\} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $y = t = 2$, Jos $X = 4$, $Y = 1$, $Yxz = 4$ ja $Xyt = -1$, niin $x = z = 2$ ja $\{y, t\} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Muut kaksi mahdollista yhdistelmää eivät johda reaalisiin ratkaisuihin.

2000.18. Koska

$$x + \frac{1}{x} + 2 - 2\sqrt{2x+1} = \frac{1}{x}((x+1)^2 - 2x\sqrt{2x+1} = \frac{1}{x}(x^2 - 2x\sqrt{2x+1} + 2x + 1)$$
$$= \frac{1}{x}\left(x - \sqrt{2x+1}\right)^2,$$

yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$\frac{1}{x}\left(x - \sqrt{2x+1}\right)^2 + \frac{1}{y}\left(y - \sqrt{2y+1}\right)^2 = 0.$$

On koska x ja y ovat positiivisia, on oltava $x = \sqrt{2x+1}$ ja $y = \sqrt{2y+1}$. Ainoa ratkaisu on $x = y = 1 + \sqrt{2}$.

2000.19. Kirjoitetaan $t^{2n} = (t^2)^n = ((t-1)^2 + (2t-1))^n$ ja käytetään binomikaavaa. Koska $(t-1)^2 \ge 0$ ja $2t - 1 \ge 0$, binomikaavan kaikki termit ovat positiivisia. Kun muut kuin ensimmäinen ja viimeinen termi jätetään pois, saadaan heti tehtävän epäyhtälö.

2000.20. Kirjoitetaan

$$x_n^2 = \frac{(2n+1)((2n+1)(2n+3))((2n+3)(2n+5))\cdots(4n+1)}{(2n)^2(2n+2)^2\cdots(4n)^2}.$$

Sovelletaan osoittajaan epäyhtälöä $x(x+2) \le (x+1)^2$ ja supistetaan. Saadaan

$$x_n^2 \le \frac{(2n+1)(4n+1)}{(2n)^2} < 2 + \frac{2}{n}.$$

Kun samaa tekniikkaa soveletan nimittäjään, saadaan

$$x_n^2 \ge \frac{(4n+1)^2}{2n \cdot 4n} > 2 + \frac{1}{n}.$$

Siis

$$\frac{1}{n} < x_n^2 - 2 < \frac{2}{n}.$$

Erityisesti $\sqrt{2} < x_n < 2$. Lisäksi

$$\frac{1}{n(x_n + \sqrt{2})} < x_n - \sqrt{2} < \frac{2}{n(x_n + \sqrt{2})}.$$

Koska $2 + \sqrt{2} < 4$ ja $\dfrac{2}{2\sqrt{2}} < 2$, väite seuraa.

2001.1. Olkoot tehtävät T_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Eräs mahdollisuus jakaa tehtävät kahdeksalle opiskelijalle O_j, $j = 1, 2, \ldots, 8$ on oheisessa taulukossa

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
O_1	×	×	×					
O_2	×			×	×			
O_3	×					×	×	
O_4		×		×			×	
O_5		×				×		×
O_6			×	×				×
O_7			×		×	×		
O_8					×		×	×

Koska taulukossa ei ole yhtään suorakaidetta, jonka joka kärjessä olisi ×, yksikään opiskelija ei saa kahta samaa tehtävää jonkin toisen kanssa. Opiskelijoita voi siis olla ainakin kahdeksan. Oletetaan, etä jokin tehtävä olisi annettu neljälle eri opiskelijalle. Tällöin kukin heistä tarvitsisi kaksi muuta tehtävää. Tehtäviä pitäisi siis olla ainakin yhdeksän. Mitään tehtävää ei siis voi antaa useammalle kuin kolmelle opiskelijalle. Yksittäin laskien tehtäviä ei siis voi antaa kuin 24 kappaletta. Mutta koska jokainen opiskelija saa kolme tehtävää, opiskelijoita ei voi olla enempää kuin kahdeksan.

2001.2. Olkoon A_1 niiden positiivisten kokonaislukujen joukko, joiden nollasta eroavat numerot ovat lopusta alkaen paikoissa 1, n+1, 2n+1, jne., A_2 niiden positiivisten kokonaislukujen joukko, joiden nollasta eroavat numerot ovat lopusta alkaen paikoissa 2, n+2, 2n+2, jne., ja viimein A_n niiden positiivisten kokonaislukujen joukko, joiden nollasta eroavat numerot ovat lopusta alkaen paikoissa n, $2n$, jne. Jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan lausua yksikäsitteisesti n:n luvun summana, jonka jokainen yhteenlaskettava kuuluu eri joukkoon A_i, $1 \le i \le n$.

2001.3. Koska $A+B$ on kaikkien sarakesummien ja kaikkien rivisummien summa, niin $A+B$ on kaksi kertaa koko ruudukon lukujen summa. Jos olisi $A=B$, olisi siis

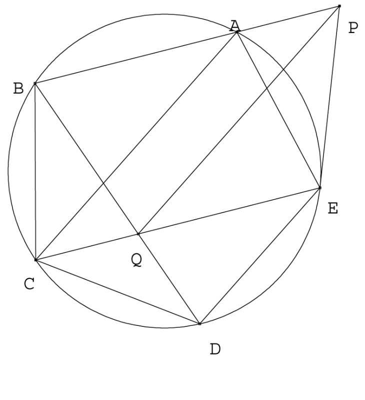
$$2B = 2\sum_{k=1}^{49} = 50\cdot 49.$$

Tästä seuraisi, että B on pariton. Toisaalta B on parillisten lukujen summa ja siis parillinen. $A=B$ ei siis ole mahdollista.

2001.4. Tarkastetaan janaa, jonka päätepisteet ovat $(0,\,0)$ ja $(q,\,p)$ ja koordinaattiakselien suuntaista suorakaidetta, jonka lävistäjä tämä jana on. Suoran, jolla se on, yhtälö on $y=\dfrac{p}{q}x$. Koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä janalla ei ole yhtään kokonaislukukoordinaattista pistettä. Pisteen $\left(k,\,\dfrac{pk}{q}\right)$ alapuolella on $\left\lfloor\dfrac{pk}{q}\right\rfloor$ kokonaislukukoordinaatista suorakaiteen pistettä. Lävistäjän alapuolella on kaikkiaan tasan puolet suorakaiteen kokonaislukukoordinaattista pisteistä, eli $\dfrac{1}{2}(p-1)(q-1)$ pistettä.

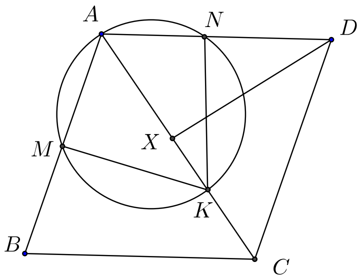
2001.5. Numeroidaan pisteet 1:stä 2001:een niin, että vierekkäisillä pisteillä on vierekkäiset numerot. Tarkastellaan numerointia tarpeen vaatiessa $\bmod 2001$. Sanomme, että k pistettä muodostaa yksivärisen k-jonon, jos ne ovat vierekkäin ja ovat samanvärisiä. Olkoon $d(F)$ värityksen F suurin k, jolla värityksessä on yksivärinen k-jono. Koska 2001 on pariton, $d(F)\ge 2$ kaikille värityksille F. Jos $d(F_1)=2001$, pisteet ovat samanvärisiä, ja $F_1=F_2=\ldots$. Tällöin $n_0=1$ kelpaa n_0:ksi. Oletetaan siis, että $1<d(F_1)<2001$. Jos $d(F_n)=2$ jollakin n, niin F_{n+1} saadaan F_n:stä vaihtamalla kaikkien pisteiden väri. Silloin $F_{n+2}=F_n$ ja $F_{k+2}=F(k)$ kaikilla $k\ge n$. Olkoon nyt $d(F_n)=k\ge 3$ ja olkoon $(i+1,\,i+2,\,\ldots,\,i+k)$ yksivärinen k-jono. Silloin $(i+2,\,i+3,\,\ldots,\,i+k-1)$ on F_{n+1}:n yksivärinen k-jono. Siis $d(F_{n+1})\ge d(F_n)-2$. Toisaalta, jos $k\ge 3$, ja $(i+1,\,i+2,\,\ldots,\,i+k)$ on F_{n+1}:n pisin yksivärinen k-jono, niin $(i,\,i+1,\,\ldots,\,i+k+1)$ on F_n:n yksivärinen $(k+2)$-jono. Siis $d(F_n)\ge d(F_{n+1}-2$. Kaikkiaan siis $d(F_{n+1}=d(F_n)-2$, jos $3<d(F_n)<2001$. Eri mahdollisuudet läpikäymällä toteaa helposti, että jos $d(F_n)=3$, niin $d(F_{n+1})=2$. Edellä sanotusta seuraa, että $d(F_{1000})=2$, joten $F_{n+2}=F_n$ kaikilla $n\ge 1000$. Jos erityisesti $d(F_1)=2000$ (vain yksi piste muista poikkeavasti väritetty), niin $d(F_k)>2$, kun $k<1000$ ja $d(F_{1000})=2$. Luku 999 ei siis kelpaa luvuksi n_0.

2001.6. Yhdensuuntaiset suorat leikkaavat ympyrän niin, että leikkauspisteitä yhdistävät jänteet ovat yhtä pitkät. Siis $BC=AE=CD$. Koska EP on ympyrän c tangentti, niin kehäkulmalauseen nojalla $\angle CAD=\angle PEC$. Jännenelikulmion kulma ja vastaisen kulman vieruskulma ovat yhtä suuret, Siis $\angle BCE=\angle PAE$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot BCQ ja EAP ovat yhteneviä (ksk). Siis erityisesti $CQ=AP$. Mutta nyt nelikulmiossa $CQPA$ on yhtä pitkä ja yhdensuuntainen sivupari. Nelikulmio on siis suunnikas, ja $AC\|PQ$.



2001.7. Todistus jäljittelee tavanomaista Ptolemaioksen lauseen todistusta. Valitaan AC:n piste X niin, että $\angle ADX = \angle AKN$. Silloin kolmiot AKN ja ADX ovat yhdenmuotoisia, joten

$$\frac{AK}{AN} = \frac{AD}{AX}. \tag{1}$$



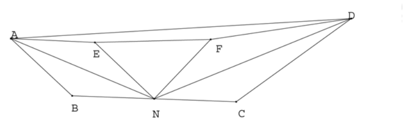
Koska $\angle ANK = \angle AXD$, niin $\angle DXC = \angle KND = \angle AMK$ (viimeinen yhtälö johtuu siitä, että $AMKN$ on jännenelikulmio.) Koska $\angle KAM = \angle XCD$, kolmiot AMK ja CXD ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AK}{AM} = \frac{CD}{CX} = \frac{AB}{CX}. \tag{2}$$

Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa

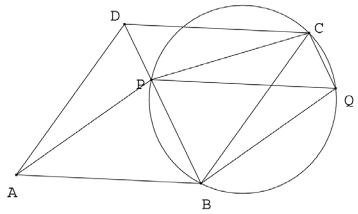
$$AN \cdot AD + AM \cdot AB = AX \cdot AK + CX \cdot AK = AC \cdot AK.$$

2001.8. Olkoon E pisteen B peilikuva suorassa AN ja F pisteen C peilikuva suorassa DN. Silloin $AX = AB$, $YD = CD$ ja $XN = YN = \dfrac{1}{2}BC$. Lisäksi $\angle ANB +$



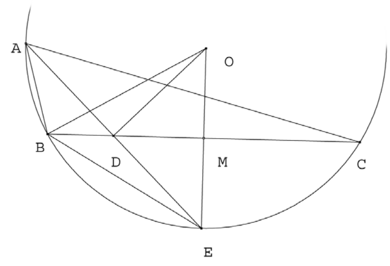
$\angle CND = 45°$, joten $\angle BNE + \angle CNF = 90°$ ja siis $\angle ENF = 90°$. Mutta tästä seuraa, että $EF = \sqrt{2} \cdot EN = \dfrac{1}{\sqrt{2}}BC$. Väite seuraa nyt siitä, että $AD \le AE + EF + FD$.

2001.9. Osoitetaan, että kysytty joukko on venoneliön lävistäjien pisteiden joukko. Olkoon P jokin piste, jolle $\angle APD + \angle BPC = 180°$. Täydennetään kolmio PCD suunnikkaaksi $PQCD$. Silloin myös $ABQP$ on suunnikas ja $\angle BQC = \angle APD$. Tehtävän ehdosta seuraa, että nelikulmio $PBQC$ on jännenelikulmio, eli sen ympäri voidaan piirtää ympyrä. Siis $\angle PBC = \angle PQC =$



$\angle CDP$. Kolmioissa DPC ja BCP on kaksi yhtä pitkää sivuparia (DC ja BC sekä yhteinen PC) ja sama toista sivua vastassa oleva kulma. Kolmiot ovat joko yhtenevät, jolloin $\angle DPC = \angle CPB$ ja P siten lävistäjällä AC, tai kolmioissa on kaksi kulmaa, jotka ovat toistensa vieruskulmia, eli $\angle DPC + \angle CPB = 180°$ ja P on lävistäjällä BD. Kääntäen nähdään helposti, että kaikki vinoneliön lävistäjien pisteet P toteuttavat tehtävän ehdon.

2001.10. Piirretään kolmion ABC ympäri ympyrä. Olkoon O sen keskipiste. Leikatkoon suora AD tämän ympyrän myös pisteessä E. Koska AE on kulman BAC puolittaja, E on kaaren BC keskipiste. Siis OE on janan BC keskinormaali. Suorakulmaisessa kolmiossa DEM on $\angle MDE = \angle ADB = 45\}as$, joten myös $\angle DEM = 45°$. Kolmio OAE on tasakylkinen, joten myös $\angle OAE = 45°$ ja siis kulma EOA on suora ja



$AO \| BC$. Koska $AD^2 = BD \cdot DC = AD \cdot DE$ (pisteen D potenssi ympyrän suhteen), on $AD = DE$. Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista EOA ja EMD saadaan $EM = MO$. Kolmiot BEM ja BOM ovat yhteneviä (sks), joten $BE = BO$. Kolmio OBE on siis tasasivuinen, joten $\angle BOA = 60°$ ja $\angle BAE = 30°$. Siis $\angle BAC = 60°$. Kolmiosta ABD saadaan nyt $\angle ABC = \angle ABD = 105°$. Viimein $\angle BCA = 15°$.

2001.11. Nähdään heti, että funktiot $f(x) = 0$ ja $f(x) = \frac{1}{2}$ toteuttavat tehtävän ehdon. Osoitetaan, että $f(2001) = 0$ tai $f(2001) = \frac{1}{2}$. Koska $2001 = 3 \cdot 667$ ja s.y.t.$(3,\ 667) = 1$, niin $f(2001) = f(1)(f(3) + f(667))$. Siis $f(1) \neq 0$. Koska s.y.t.$(2001,\ 2001) = 2001$, niin

$$f(2001^2) = f(2001)(f(1) + f(1)) = 2f(1)f(2001), \tag{1}$$

joten $f(2001^2) \neq 0$. Nyt $f(2001^4)$ voidaan lausua kahdella eri tavalla. Toisaalta s.y.t.$(2001,\ 2001^3) = 2001$, joten $f(2001^4) = f(2001)(1 + f(2001^2)) = f(2001)f(1)(1 + 2f(2001))$, toisaalta s.y.t.$(2001^2,\ 2001^2) = 2001^2$ joten $f(2001^4) = f(2001^2)(f(1)+f(1)) = 4f(1)^2 f(2001)$. Näistä ratkaistaan $4f(1) = 1 + 2f(2001)$ eli $f(2001) = 2f(1) - \frac{1}{2}$. Tasan sama päättely aloitettuna epäyhtälöstä $f(2001^2) \neq 0$ johtaa yhtälöön $f(2001^2) = 2f(1) - \frac{1}{2}$. Yhtälön (1) perusteella on siis $2f(1) - \frac{1}{2} = 2f(1)\left(2f(1) - \frac{1}{2}\right)$. Koska $2f(1) - \frac{1}{2} = f(2001) \neq 0$, saadaan $2f(1) = 1$. Siis $f(2001) = 2f(1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2001.12. Hölderin epäyhtälön nojalla

$$3 = \sum_{k=1}^{n} a_i^3 = \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_i^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k^2)^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = 5^{\frac{2}{5}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_i^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}.$$

Siis

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_i^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} \ge \frac{3}{5^{\frac{2}{5}}} > \frac{3}{2}.$$

(Viimeinen epäyhtälö siksi, että $2^5 > 5^2$, joten $2 > 5^{\frac{2}{5}}$.) Tehtävän väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{5}{3}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{5}{3}}. \tag{1}$$

Olkoon

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Silloin $\dfrac{a_k}{S} \le 1$ ja $\left(\dfrac{a_k}{S}\right)^{\frac{5}{3}} \le \dfrac{a_k}{S}$. Koska

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S} = 1,$$

on

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{S}\right)^{\frac{5}{3}} \le 1,$$

mistä väite seuraa.

2001.13. Tarkastellaan funktiota f, $f(x) = \left(\dfrac{7}{9}\right)^x + \left(\dfrac{1}{9}\right)^x$. Selvästi $f(1) < 1$, mutta

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}+1}{3} > 1.$$

On siis olemassa sellainen t, $\dfrac{1}{2} < t < 1$, että $f(t) = 1$. Osoitetaan, että on olemassa vakio M siten, että

$$a_n \le M \cdot n^t \tag{1}$$

kaikilla n. Silloin $\dfrac{a_n}{n} \le Mn^{t-1} \to 0$, kun $n \to \infty$, joten $\dfrac{a_k}{k} \le \dfrac{1}{2001!}$ kaikilla riittävän suurilla k:n arvoilla. Todistetaan (1) induktiolla. Valitaan sellainen M, etä $a_n \le Mn^t$, kun $1 \le n \le 8$. Jos $n \ge 9$, niin $1 < \left\lfloor \dfrac{7n}{9} \right\rfloor < n$ ja $1 \le \left\lfloor \dfrac{n}{9} \right\rfloor < n$. Oletetaan, että $k \ge 9$ ja (1) on tosi, kun $n < k$. Silloin

$$a_k = a_{\lfloor \frac{7k}{9} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{k}{9} \rfloor} \le M\left\lfloor \frac{7k}{9} \right\rfloor^t + M\left\lfloor \frac{k}{9} \right\rfloor^t \le M\left(\left(\frac{7k}{9}\right)^t + \left(\frac{k}{9}\right)^t\right) = Mk^t f(t) = Mk^t.$$

Induktioaskel on otettu.

2001.14. Olkoot korteissa olevat luvut $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{2n-1} \le x_{2n}$. Olkoon s_1 kaikkien paritonindeksisten lukujen summa ja s_2 kaikkien parillisindeksisten lukujen summa. Silloin $\dfrac{s_1}{s_2} \le 1$. Lisäksi, koska $1 \le x_1$ ja $x_{2n} \le 2$, niin

$$\begin{aligned}\frac{s_1}{s_2} &\ge \frac{1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}}{x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n-1} + 2} \ge \frac{x_2 + \cdots + x_{2n-2} + 1}{x_2 + \cdots + x_{2n-2} + 2} \\ &= 1 - \frac{1}{x_2 + \cdots + x_{2n-2} + 2} \ge 1 - \frac{1}{(n-1) + 2} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Jako paritonindeksisiin ja parillisindeksisiin toteuttaa tehtävän vaatimuksen.

2001.15. Olkoon $i \ge 2$. Silloin

$$ix^2a_i^2 \ge (i+1)x^2a_{i+1}a_{i-1} \qquad)(1)$$

ja

$$(i-1)a_{i-1}^2 \ge ia_1a_{i-2}, \qquad (2)$$

josta seuraa

$$\frac{a_{i-1}^2}{a_ia_{i-2}} \ge \frac{i}{i-1} > \frac{i+1}{i}.$$

Siis

$$iy^2a_{i-1}^2 > (i+1)y^2a_ia_{i-2}. \qquad (3)$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) kerrotaan puolittain ja supistetaan, saadaan

$$(i-1)a_ia_{i-1} \ge (i+1)a_{i+1}a_{i-2}.$$

Lisätään tähän epäyhtälöön puolittain $(i+1)a_ia_{i-1}$ ja kerrotan yhtälö xy:llä. Saadaan

$$2ixya_ia_{i-1} \ge (i+1)xy(a_{i+1}a_{i-2} + a_ia_{i-1}). \qquad (4)$$

Kun yhtälöt (1), (3) ja (4) lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$i(xa_i + ya_{i-1})^2 > (i+1)(xa_{i+1} + ya_i)(xa_{i-1} + ya_{i-2}),$$

eli väite.

2001.16. Alkuluvuille p p on p:n ainoa alkutekijä, joten $f(p) = f(1) - f(p)$, $f(p) = \dfrac{1}{2}f(1)$. Jos n on kahden alkuluvun p ja q tulo, niin joko $f(n) = f(p) - f(q)$ tai $f(n) = f(q) - f(p)$. Joka tapauksessa $f(n) = 0$. Jos n on kolmen alkuluvun tulo, niin jollekin niistä, esimerkiksi p:lle, on voimassa $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p)$. Koska $\dfrac{n}{p}$ on kahden alkuluvun tulo, $f(n) = -f(p) = -\dfrac{1}{2}f(1)$. Koska $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ ja $f(2001) = 1$, niin $f(1) = -2$. Neljän alkuluvun tulolle n pätee vastaavasti $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p) = -\dfrac{1}{2}f(1) - \dfrac{1}{2}f(1) = -f(1)$. Koska $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $f(2002) = 2$.

2001.17. Valitaan luvuiksi kaikki parittomat luvut $\le 2^n - 1$ (2^{n-1} kappaletta) ja kaikki kahden potenssit $\le 2^n$ (n kappaletta). Tarkastetaan mahdolliset x:n ja y:n valinnat. Jos x ja y ovat molemmat parittomia, niin $x + y$ on parillinen ja xy on pariton. $x + y$ ei voi olla xy:n tekijä. Jos $x = 2^m$ ja $y = 2^k$, $m < k$, niin $x + y = 2^m(1 + 2^{k-m})$ ja $xy = 2^{k+m}$. Luvulla $x + y$ on pariton tekijä, mutta xy:n kaikki tekijät ovat parillisia. $x + y$ ei voi olla xy:n tekijä. Jos $x = 2^k$ ja $y = 2a + 1$, niin $x + y$ on pariton luku ja $x + y > 2a + 1$. Toisaalta luvun $xy = 2^k(2a + 1)$ suurin pariton tekijä on $2a + 1$. $x + y$ ei voi nytkään olla xy:n tekijä.

2001.18. Todetaan, että $a^{2^n} + 2^{2^n} = a^{2^n} - 2^{2^n} + 2 \cdot 2^{2^n} = (a^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}})(a^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-1}} + 2 \cdot 2^{2^n} = \cdots = (a^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}})(a^{2^{n-2}} + 2^{2^{n-2}}) \cdots (a + 2)(a - 2) + 2 \cdot 2^{2^n}$. Jos joillain m, n, $m < n$, parittomilla luvuilla $a^{2^n} + 2^{2^n}$ ja $a^{2^m} + 2^{2^m}$ olisi yhteinen tekijä $d > 1$, niin d olisi pariton ja luvun $2 \cdot 2^{2^n}$ tekijä. Tämä ei ole mahdollista.

2001.19. Jos luvun n alkutekijähajotelma on $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, n:n tekijöiden lukumäärä on $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$. Koska $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, sillä on $(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 24$ tekijää. Koska $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, pienin pariton luku, jolla on 24 tekijää on $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 31185$.

2001.20. Olkoon muunnos $(a, b, c, d) \mapsto (a', b', c', d')$. Olkoon $D = ad - bc$. Lasketaan $D' = a'd' - b'c'$ eri tapauksissa. Jos $(a', b', c', d') = (c, d, a, b)$, niin $D' = -D$. Jos $(a', b', c', d') = (b, a, d, c)$, niin $D' = -D$. Jos $(a', b', c', d') = (a + nc, b + nd, c, d)$, niin $D' = D$. Jos $(a', b', c', d') = (a + nb, b, c + nd, d)$, niin $D' = D$. Siis aina $|D'| = |D|$. Mutta jos $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$, niin $D = -2$ ja jos $(a', b', c', d') = (3, 4, 5, 7)$, niin $D' = 1$. Tehtävässä esitettyä muunnosketjua ei siis ole olemassa.

2002.1. Koska $(x+y+z)^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz) = x^3+y^3+z^3+3xy^2+3x^2y+3y^2z+3yz^2+3x^2z+3xz^2+6xyz$, havaitaan, että kun tehtävän yhtälöiden vasemmista puolista kaksi ensimmäistä lasketaan yhteen ja viimeinen vähennetään, syntyy lauseke, joka on $(a + b - c)^3$. Jos vasemmista puolista ensimmäinen ja viimeinen lasketaan yhteen ja keskimmäinen vähennetään, syntyy lauseke $(a - b + c)^3$ ja kun kaksi viimeistä lasketaan yhteen ja ensimmäinen vähennetään, syntyy $(-a + b + c)^3$. Yhtälöiden oikeista puolista mainitut yhteen- ja vähennyslaskut tuottavat aina tuloksen 1. Koska yhtälön $x^3 = 1$ ainoa reaalilukuratkaisu on $x = 1$, alkuperäinen yhtälöryhmä implikoi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a + b - c = 1 \\ a - b + c = 1 \\ -a + b + c = 1. \end{cases}$$

Helposti saadaan, että tämän ryhmän ratkaisu on $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Luvut toteuttavat myös tehtävän alkuperäisen yhtälöryhmän.

2002.2. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan kukin luvuista a, b, c ja d on suurempi kuin -1. Olkoon $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$ ja $t = d + 1$. Tehdyn oletuksen perusteella x, y, z ja t ovat positiivisia. Tehtävän ensimmäisestä yhtälöstä seuraa

$$x + y + z + t = 2. \tag{1}$$

Toisaalta $ab = (x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1$, $ac = xz - x - z + 1$ jne. Kaikkiaan tehtävän toinen yhtälö ja (1) antavat $0 = xy + xz + xt + yz + yt + zt - 3(x + y + z + t) + 6 =$

$xy+xz+xt+yz+yt+zt$. Tämä on ristiriidassa x:n, y:n, z:n ja t:n positiivisuuden kanssa. Vastaoletus on väärä ja tehtävän väite tosi.

2002.3. Kun $m = n = 0$, saadaan $a_0 = 2a_0^2$. Siis joko $a_0 = \frac{1}{2}$ tai $a_0 = 0$. Tutkitaan ensin tapaus $a_0 = \frac{1}{2}$. Kun sijoitetaan $m = 1$, $n = 0$, saadaan $a_1 = a_1^2 + \frac{1}{4}$ eli $\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Siis $a_1 = \frac{1}{2}$. Edelleen $a_2 = a_{1^2+1^2} = a_1^2 + a_1^2 = \frac{1}{2}$ ja $a_8 = 2a_2^2 = \frac{1}{2}$. Induktiivisesti päätellään, että on mielivaltaisen suuria kakkosen potensseja 2^j, joille $a_{2^j} = \frac{1}{2}$. Koska jono (a_n) on monotoninen, $a_n = \frac{1}{2}$ kaikilla n.

Oletetaan sitten, että $a_0 = 0$. Jonon palautuskaava arvoilla $m = 1$, $n = 0$ antaa $a_1 = a_1^2$. Siis $a_1 = 0$ tai $a_1 = 1$. Jos nyt $a_1 = 0$, saadaan samoin kuin edellä, että $a_{2^j} = 0$ mielivaltaisen suurilla j. Monotonisuuden perusteella $a_n = 0$ kaikilla n. Jos taas $a_1 = 1$, niin $a_2 = 2a_1^2 = 2$, $a_4 = a_2^2 + a_0^2 = 4$ ja $a_5 = a_2^2 + a_1^2 = 5$. Edelleen $a_3^2 + a_4^2 = a_{25} = a_5^2 + a_0^2 = 25$. Siis $a_3^2 = 25 - 16 = 9$ ja $a_3 = 3$. Vielä $a_8 = 2a_2^2 = 8$, $a_9 = a_3^2 + a_0^2 = 9$ ja $a_{10} = a_3^2 + a_1^2 = 10$. Yhtälöt $a_6^2 + a_8^2 = a_{10}^2 + a_0^2 = 100$ ja $a_7^2 + a_1^2 = 2a_5^2 = 50$ puolestaan antavat $a_8 = 8$ ja $a_7 = 7$. Yhtälöiden $(2k+1)^2 + (k-2)^2 = (2k-1)^2 + (k+2)^2$ ja $(2k+2)^2 + (k-4)^2 = (2k-2)^2 + (k+4)^2$ avulla voidaan $a_n = n$ nyt perustella induktiolla todeksi kaikilla n.

Tehtävällä on siis kolme ratkaisua: vakiojonot $a_n = 0$ ja $a_n = \frac{1}{2}$ kaikilla n sekä jono $a_n = n$ kaikilla n.

2002.4. Kun sulkeet avataan ja otetaan huomioon ehto $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, saadaan alkuperäisen epäyhtälön kanssa yhtäpitävä epäyhtälö

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

Epäyhtälön vasen puoli on sama kuin

$$\sum_{i=1}^{n} \left(2 - \frac{2}{n} - x_i\right)\left(x_i - \frac{1}{n}\right)$$

ja siis ei-negatiivinen.

2002.5. Kun tehtävän yhtälö korotetaan neliöön, saadaan $a + b + 2\sqrt{ab} = 2 + \sqrt{3}$. Siis $2\sqrt{ab} = c + \sqrt{3}$, missä c on jokin rationaaliluku. Mutta $4ab = c^2 + 2c\sqrt{3} + 3$. Mutta tämä merkitsee, että $c\sqrt{3}$ on rationaaliluku. Koska $\sqrt{3}$ on irrationaalinen, on oltava $c = 0$. Siis $4ab = 3$ eli $ab = \frac{3}{4}$ ja $a + b = 2$. Kun näistä ratkaistaan a ja b, saadaan kaksi ratkaisua $(a,\, b) = \left(\frac{1}{2},\, \frac{3}{2}\right)$ ja $(a,\, b) = \left(\frac{3}{2},\, \frac{1}{2}\right)$.

2002.6. Tarkastellaan mielivaltaista vaakariviä, joka ei ole se rivi, jolla torni alkujaan oli. Aina kun torni saapuu tämän rivin ruutuun, se jatkaa rivin toiseen ruutuun ja poistuu riviltä. Jokaisella käynnillä torni käyttää siis kaksi rivin ruutua. Jos torni käy kaikissa ruuduissa tasan kerran, rivillä on oltava pariton määrä ruutuja. Täsmälleen samalla tavalla nähdään, että sarakkeissa on parillinen määrä ruutuja. Osoitetaan sitten, että aina, kun m ja n ovat molemmat parillisia, $m = 2p$, $n = 2q$, vaadittu tornin kulku on mahdollinen. Numeroidaan rivit ylhäältä alas 1:stä $2p$:hen ja sarakkeet vasemmalta oikealle 1:stä $2q$:hun ja merkitään i:nnen rivin j:ttä ruutua $(i,\, j)$. Siirrot $(p+1,\, 1) \to (1,\, 1) \to (1,\, 2q) \to (2p,\, 2q) \to (2p,\, 1) \to (2,\, 1) \to \cdots \to (p,\, 1)$ kattavat kaikki ensimmäisen ja viimeisen sarakkeen ruudut lukuun ottamatta ruutuja $(p,\, 2q)$ ja $(p+1,\, 2q)$. Tehdään seuraavaksi siirto $(p,\, 1) \to (p,\, 2q-1)$ ja samanlainen "reunojen kierto" kuin edellä, kunnes tullaan ruutuun $(p+1,\, 2q-1)$. Tämä vaihe peittää kaikki sarakkeiden 2 ja $2q-1$ ruudut lukuun ottamatta ruutuja $(p,\, 2)$ ja $(p+1,\, 2)$. Toistamalla vaiheita tullaan lopulta tilanteeseen, jossa torni on ruudussa $(p+1,\, q+1)$ ja kaikki muut ruudut kuin ruudut $(p,\, 2j)$, $(p+1,\, 2j)$, $j = 1,\, 2,\, \ldots,\, q$, on käyty. Loput ruudut on helppo käydä läpi ja päätyä lähtöruutuun. Seuraava taulukko 6×8-laudasta, jossa numerointi osoittaa siirtojärjestyksen (1 on aloitus- ja lopetusruutu), havainnollistaa metodin (ensimmäisen vaiheen jälkeen tyhjiksi jääneet ruudut on merkitty pienemmin numeroin).

2	14	22	34	35	23	15	3
6	18	26	38	39	27	19	7
10	46	30	42	31	43	11	47
1	45	21	41	40	44	20	48
9	17	29	37	36	28	16	8
5	13	25	33	32	24	12	4

2002.7. Osoitetaan, että kysytty enimmäismäärä on $4n^2 - 4n + 2$. Tämän voi todistaa induktiolla. Jotta ei tarvitsisi arvata lauseketta $4n^2 - 4n + 2$, johdetaan se. Oletetaan, että k nelikulmiota $Q_1,\, Q_2,\, \ldots,\, Q_k$ jakaa tason a_k:ksi alueeksi. Voidaan vielä olettaa, että mikään nelikulmion kärki ei ole toisen nelikulmion sivulla (jos näin on, voidaan nelikulmiota hiukan suurentaa, niin että sivulla sijainnut kärki tulee sellaiselle puolelle toisen nelikulmion sivua, että syntyneiden alueiden lukumäärä kasvaa, mutta muut kärjet eivät siirry niin, että alueiden määrä toisaalta vähenisi). Kun piirretään uusi nelikulmio Q_{k+1}, niin kuperuuden vuoksi sen kukin sivu kohtaa enintään kaksi monikulmion Q_j sivua. Q_{k+1}:n sivut jakautuvat enintään $2k+1$:ksi janaksi, joista jokainen kasvattaa alueiden määrää yhdellä. Jos kuitenkin Q_{k+1}:n sivu leikkaa kaikkien nelikulmioiden Q_j, $j \le k$, sivut kahdesti, sivun päätepiste on kaikkien näiden nelikulmioiden ulkopuolella ja päätepisteeseen liittyvät kaksi viereisten sivujen osaa tuottavat vain yhden uuden alueen. Näin ollen Q_{k+1}:n piirtäminen tuottaa uusia alueita enintään $4(2k+1) - 4 = 8k$ kappaletta. Siis $a_{k+1} - a_k \le 8k$. Tarkastelemalla ympyrän sisään piirrettyjä neliöitä huomaa helposti, että $a_{k+1} = a_k + 8k$ on mahdollista. Jos nyt annamme a_k:n tarkoittaa maksimaalista alueiden määrää, todetaan, että a_k toteuttaa lineaarisen differenssiyhtälön $a_{k+1} - a_k = 8k$, $a_1 = 2$. Yhtälön ratkaisemiseksi sijoitetaan $a_k = Ak^2 + Bk + C$. Kertoimet toteuttavat ehdot $2Ak + A + B = 8k$, kaikilla k sekä $A+B+C = 2$. Ensimmäisestä ehdosta seuraa $A = 4$ ja $B = -4$, viimeisestä $C = 2$. Siis $a_n = 4n^2 - 4n + 2$.

2002.8. Kun $n = 3$, kolmioita on yksi. Osoitetaan, että kun $n \ge 4$, niin joukko T voidaan valita n:llä ei tavalla. Kun $X \in P$, merkitään T_X:llä kaikkien niiden kolmioiden joukkoa, joiden kärjet ovat joukossa P ja joiden yksi kärki on X. Joukossa T_X on $\binom{n-1}{2}$ alkiota ja jokaisella T_X:n kolmiolla, esimerkiksi XAB, on ainakin yksi sivu, AB, joka ei ole minkään muun T_X:ään kuuluvan kolmion sivu. Jos $X \neq Y$, $T_X \neq T_Y$ (koska $n \geq 4$, on olemassa X:stä ja Y:stä eroavat A, $B \in P$ ja kolmio XAB ei kuulu joukkoon T_Y). Osoitetaan, että jokainen tehtävässä määritellyistä joukoista T on T_X jollakin $X \in P$. Olkoon siis $T = \left\{t_i \,|\, i = 1, 2, \ldots \binom{n-1}{2}\right\}$ tällainen joukko ja olkoon $S = \left\{s_i \,|\, i = 1, 2, \ldots \binom{n-1}{2}\right\}$ niiden joukkoon T kuuluvien kolmioiden sivujen joukko, joille s_i on t_i:n sivu, muttei t_j:n sivu, kun $i \neq j$. Olkoon C kaikkien sellaisten kolmioiden jouko, joiden kärjet ovat joukossa P. Joukossa C on $\binom{n}{3}$ kolmiota ja joukossa $C \setminus T$ $\binom{n}{3} - \binom{n-1}{2} = \binom{n-1}{3}$ kolmiota. Olkoon nyt m sellaisten parien (s, t) lukumäärä, missä $s \in S$ on jonkin kolmion $t \in C \setminus T$ sivu. Tällaisen kolmion kolmas kärki voi olla mikä hyvänsä muu P:n piste kuin sen T:hen kuuluvan kolmion kärki, jonka sivu s on. Siis

$$m = (n-3) \cdot \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)!(n-3)}{2!(n-3)!} = \frac{3 \cdot (n-1)!}{3!(n-4)!} = 3 \cdot \binom{n-1}{3}.$$

Tästä seuraa, että jokaisen $C \setminus T$:n kolmion kaikki sivut kuuluvat joukkoon S.

2002.9. Menettelytapoja on useita. Yksi mahdollisuus: Oletetaan, että katsojien valitsemat numerot ovat x_1, x_2 ja x_3. Jaetaan joukko $\{1, 2, \ldots, 96\}$ neljäksi yhtä suureksi osajoukoksi $S_1 = \{1, 2, \ldots, 24\}$, $S_2 = \{25, 26, \ldots, 48\}$, $S_3 = \{49, 50, \ldots, 72\}$ ja $S_4 = \{73, 74, \ldots, 96\}$. Ainakin yksi joukoista, sanokaamme S, on sellainen, että mikään luvuista x_k ei kuulu S:ään. Jaetaan S kuudeksi osajoukoksi, niin että S:n ensimmäiset neljä lukua ovat S_1:ssä. seuraavat neljä S_2:ssa jne. Numeroidaan lukujen x_k kuusi eri mahdollista järjestystä: jos $x_1 < x <_2< x_3$, $i = 1$, jos $x_1 < x_3 < x_2$ $i = 2$, $\ldots$, jos $x_3 < x_2 < x_1$ $i = 6$. Olkoon vielä $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ niiden lukujen x_k lukumäärä, jotka ovat suurempia kuin kaikki S:n alkiot. Nähtyään luvut x_k toinen taikuri valitsee luvun x_4 joukosta S_i niin, että $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv j \bmod 4$. Kun ensimmäinen taikuri näkee kortit, joissa on luvut a, b, c ja d, hän laskee summan $a+b+c+d \bmod 4$. Jos tulos on x, hän tietää, että x suurinta korttia ovat katsojien valitsemia ja naitä seuraavaksi pienempi kuuluu joukon S osajoukkoon S_y. Osajoukko kertoo, missä järjestyksessä katsojat olivat valinneet kortit.

2002.10. Pienin vaadittu N on 11. Jos nimittäin $N = 11$, toinen pelaaja voi poistaa lukuja alkaen pienimmistä, kunnes jäljelle jääneiden lukujen summa on vähemmän kuin 212. Jos suurin poistettu luku oli ≤ 23, niin jäljelle jääneiden lukujen summa on ainakin $212 - 23 = 189 = 200 - N$. Jos viimeinen poistettu luku oli 24 tai 25, niin jäljellä on vain lukuja 24 ja 25. Näitä lukuja on silloin tasan kahdeksan, sillä niiden summa on < 212 mutta $\geq 212 - 25 = 187$. Jäljelle jääneiden lukujen summa S toteuttaa siis epäyhtälöt $8 \cdot 24 = 192 \leq S \leq 200 = 8 \cdot 25$.

Oletetaan, että piste A on liitetty 12 pisteeseen. Olkoot B_1, B_2, $\ldots$, B_{12} nämä pisteet järjestyksessä positiiviseen kiertosuuntaan. Kulmista $\angle B_1AB_3$, $\angle B_3AB_5$, $\ldots$, $\angle B_{11}AB_1$ ainakin yksi on $\leq 60°$. Olkoon se $\angle B_1AB_3$. Silloin kulmat $\angle B_1AB_2$ ja $\angle B_2AB_3$ ovat myös alle $60°$. Janoista AB_i, $i = 1, 2, 3$, jokin on pisin; olkoon se AD. Silloin janaa AD

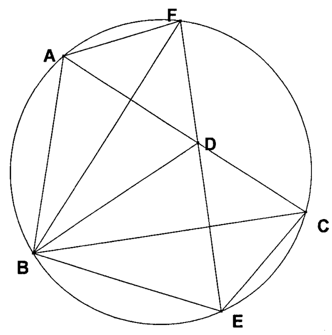
ei ole piirretty A:sta vaan D:stä. Olkoot muut kaksi janaa AB_i AB ja AC. Kosinilauseen perusteella $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) < AD^2 + AB^2(1 - 2\cos(\angle BAD) \le AD^2$, koska $\cos(\angle BAD) \ge \frac{1}{2}$. Siis $BD < AD$. Samoin osoitetaan, että $CD < AD$. Näin ollen A ei ole kahden D:tä lähimmän pisteen joukossa. D:stä ei ole piirretty janaa A:han. Ristiriita!

2002.12. Olkoon $S = \{A, B, C, D\}$. Voidaan olettaa, että mikään S:n kahden pisteen välisistä janoista ei ole pidempi kuin AB. Jos pisteeksi X valitaan A, on valittava $Y = B$ (jos olisi esimerkiksi $Y = C$, olisi $AC = AB + AD > AB$). Siis $AB = AC + AD$. Samoin, jos valitaan $X = B$, on valittava $Y = A$, joten $AB = BC + BD$. Kaikkiaan siis

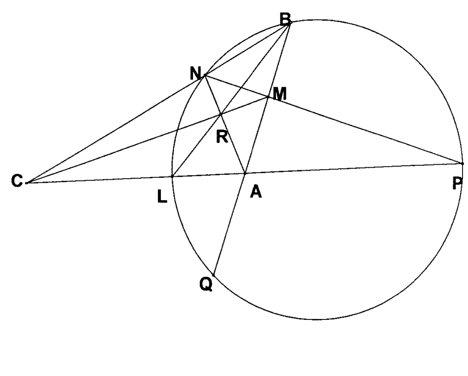
$$2 \cdot AB = AC + AD + BC + BD. \tag{1}$$

Toisaalta kolmioepäyhtälön perusteella $AB \le AC + BC$ ja $AB \le AD + BD$. Elleivät kaikki pisteet ole samalla suoralla, näistä epäyhtälöistä ainakin toinen on aito. Tällöin olisi siis $2 \cdot AB < AC + BC + AD + BD$, mikä olisi ristiriidassa yhtälön (1) kanssa.

2002.13. Olkoon $E \neq A$ sellainen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän piste, että $BE = BA$. Piirretään E:n kautta sivua BC vastaan kohtisuora suora. Se leikkaa AC:n pisteessä D. Koska $BE = BA$, $\angle BCA = \angle BCE$. CB on siis kolmion CDE kulman puolittaja ja korkeussuora. Siis CDE on tasakylkinen. Tästä seuraa, että myös kolmio BED on tasakylkinen. Siis $BD = BE = BA = BD$. Mutta tämä merkitsee, että $D = D$, ja F, D ja E ovat samalla suoralla. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle FAC = \angle FEC$. Koska $FE \perp BC$, $90^\circ = \angle BCE + \angle FEC = \angle FAC + \angle AFB$. Mutta tämä osoittaa, että $AC \perp FB$.



2002.14. Leikatkoot MN ja AC pisteessä P. Oletuksen mukaan $\angle PLB = \angle PNB$. Pisteet P, L, N ja B ovat siis samalla ympyrällä Γ. Tehtävän väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan PL tämän ympyrän halkaisijaksi. Leikatkoon BA Γ:n myös pisteessä Q. Koska BL puolittaa $\angle ABC$:n, $\angle QPL = \angle QBL = \angle LBN = \angle LPN$. PL puolittaa siis $\angle NPQ$:n. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan $PQ = PN$. Kolmiot PAQ ja BAL ovat yhdenmuotoiset. Siis



$$\frac{PQ}{PA} = \frac{BL}{BA}. \tag{1}$$

Myös kolmiot NPC ja LBC ovat yhdenmuotoiset. Siis

$$\frac{PN}{PC} = \frac{BL}{BC}. \tag{2}$$

Koska BL on kulman ABC puolittaja,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{CL}. \tag{3}$$

Kun yhtälöt (1), (2) ja (3) yhdistetään, saadaan

$$\frac{PN}{PQ} = \frac{AL}{AP} \cdot \frac{CP}{CL}.$$

On osoitettava, että tämän yhtälön vasen puoli on 1. Jos R on janojen CM ja AN leikkauspiste (joka oletuksen mukaan on myös janalla BL, niin ns. täydellisiä nelikulmiota koskevan tuloksen mukaan puolisuorat BN, BS, BM ja NM leikaavat suoran AC ns. harmonisessa pisteistössä (ks. esim. M. Lehtisen geometrian luentoja, lause 8.3.1.) Väite seuraa tästä.

2002.15. Oletetaan, että hämähäkki on kuution särmän keskipisteessä. Jos kärpänen on vastakkaisen särmän keskipisteessä, hämähäkin ja kärpäsen minimietäisyys pitkin kuution sivuja on 2. Jos kärpänen siirtyy keskipisteestä matkan s särmää pitkin, niin hämähäkin ja kärpäsen minimietäisyys on pienempi luvuista $\sqrt{s^2+4}$ ja $\sqrt{\frac{9}{4}+\left(\frac{3}{2}-s\right)^2}$. Kun $s > 0$ ja $\left(\frac{3}{2}-s\right)^2 > \frac{7}{4}$ eli $s < \frac{1}{2}(3-\sqrt{7})$, etäisyys on suurempi kuin 2. Vastakkainen kuution pinnan piste ei aina ole kärpäselle edullisin.

2002.16. Selvästi $a_0 = 5$, $a_1 = 65 = 5 \cdot 13$ ja $a_2 = 1025 = 5^2 \cdot 41$. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Vastaoletus: $m \ge 3$ ja $a_m = 4^{2m+1}+1$ on jaollinen vain kahdella eri alkuluvulla. Toisen näistä on oltava 5. Koska

$$a_m = (2^{2m+1}+2^{m+1}+1)(2^{2m+1}-2^{m+1}+1)$$

tässä a_m:n molemmat tekijät ovat parittomia, mutta tekijöiden erotus on kakkosen potenssi, tekijöiden suurin yhteinen tekijä on 1. Tekijöistä toinen on siis 5:n potenssi. Siis joko $2^{m+1}(2^m+1) = 5^t - 1$ tai $2^{m+1}(2^m-1) = 5^t - 1$ jollain t. Mutta $5^t - 1 = 4(5^{t-1}+5^{t-2}+\cdots+5+1)$. Jos t on pariton, 5^t-1 ei ole jaollinen 8:lla eikä siis 2^{m+1}:llä. Siis $t = 2u$ jollain u ja $2^{m+1}(2^m \pm 1) = (5^u+1)(5^u-1)$. Mutta $5^u + 1 \equiv 2 \mod 4$. Siis $5^u - 1 = 2^m k$, missä k on pariton. Toisaalta $5^u+1 = 2^m k + 2$ on luvun $2(2^m \pm 1)$ tekijä ja $2^{m-1}k+1$ on luvun $2^m \pm 1$ tekijä. Tämä on mahdollista vain, jos $k = 1$. Koska $2^{m-1}+1 < 2^m \pm 1 < 2(2^{m-1}+1)$, tullaan ristiriitaan: luku ei voi olla pienempi kuin kaksi kertaa sen aito tekijä.

2002.17. Binomikertoimien perusominaisuuden perusteella

$$\binom{n+i}{2002} - \binom{n}{2002} = \binom{n}{2001}.$$

Tarkastellaan kokonaislukujonoa (x_k), jonka erotusjono $(d_k) = (x_{k+1}-x_k)$ on jaksollinen mod p. Osoitetaan, että tällöin myös (x_k) on jaksollinen mod p. Olkoon t jonon (d_k)

jakso. Olkoon h pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $h(x_t - x_0) \equiv 0 \mod p$. Nyt jonon (d_k) jaksollisuuden perusteella

$$x_{k+ht} = x_0 + \sum_{j=0}^{k+ht-1} d_j \equiv x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} d_j + h\sum_{j=0}^{t-1} d_j = x_k + h(x_t - x_0) \equiv x_k \mod p.$$

Jono (x_k) on siis jaksollinen modulo p. Nyt siitä, että jono binomikertoiminen $\binom{k}{1} = k$ jono on jaksollinen $\mod p$ mielivaltaisella p ja siitä, että binomikertoimien $\binom{n}{k}$, $n = k$, $k+1$, $\ldots$ jonon erotusjono on jono $\binom{n}{k-1}$, seuraa induktiolla, että jokainen binomikerroinjono $\binom{n}{k}$, $n = k$, $k+1$, $\ldots$ on jaksollinen $\mod p$ mielivaltaisella p.

2002.18. Osoitetaan, että vain luvulla $n = 2$ on tehtävässä vaadittu ominaisuus. Koska $2^6 - 1 = 63$, $(2^3-1)(2^2-1) = 21$, 2:lla on vaadittu ominaisuus. Oletetaan, että $n > 2$ on luku, jolla on tehtävässä mainittu ominaisuus. Koska $n^6 - 1 = (n^2-n+1)(n+1)(n^3-1)$, luku $n^2-n+1 = n(n-1)+1$ on pariton. Sillä on jokin pariton alkutekijä p. Koska $p|(n^3+1)$ p ei ole luvun n^3-1 tekijä. Siis $p|(n^2-1)$ ja p on myös luvun $n^3+1+n^2-1 = n^2(n+1)$ tekijä. Koska p ei ole n:n tekijä, $p|(n+1)$. Mutta p on myös luvun $(n^2-1)-(n^2-n+1) = n-2$ tekijä. Alkuluku, joka on lukujen $n+1$ ja $n-2$ tekijä, on 3. On osoitettu, että jokainen n^2-n+1:n alkutekijä on 3. Siis $n^2-n+1 = 3^r$ jollain r. Koska n on toisen asteen yhtälön $n^2-n+1-3^r$ kokonaislukuratkaisu, yhtälön diskriminantti $1-4(1-3^r) = 3(4\cdot 3^{r-1}-1)$. on neliöluku. Jos olisi $r \geq 2$, jälkimmäinen tekijä olisi kolmella jaoton. Siis $r = 1$, joten $n^2 - n = 2$. Tämä on mahdotonta, kun $n > 2$.

2002.19. Oletetaan, että yhtälöllä olisi rationaalilukuratkaisu $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$. Oletetaan vielä, että p:n ja q:n suurin yhteinen tekijä on 1, samoin r:n ja s:n. Yhtälö

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{r}{s} + \frac{s}{r} = 3n$$

on yhtäpitävä yhtälön

$$(p^2+q^2)rs + (r^2+s^2)pq = 3npqrs$$

kanssa. Päätellään, että $rs|(r^2+s^2)pq$. Jos rs:llä ja (r^2+s^2):lla olisi yhteinen tekijä d, se olisi joko r:n tai s:n tekijä; jos d olisi r:n ja s^2+r^2:n tekijä, se olisi s:n tekijä, mutta r:llä ja s:llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Siis $rs|pq$. Samoin osoitetaan, että $pq|rs$. Siis $pq = rs$. Nyt $pq = rs$ joko on tai ei ole jaollinen 3:lla. Lukujen p, q, r, s joukossa on sis kaksi tai ei yhtään kolmella jaollista lukua. Mutta

$$(p^2+q^2+r^2+s^2)rs = 3(rs)^2$$

ja $p^2+q^2+r^2+s^2 = 3nrs$. Koska $x^2 \equiv 1 \mod 3$, jos x ei ole jaollinen kolmella, $p^2+q^2+r^2+s^2 \equiv 1$ tai $\equiv 2 \mod 3$. Ristiriita. Siis yhtälöllä ei ole rationaalisia ratkaisuja.

2002.20. Jos $(a_1 + dk)$ on mielivaltainen aritmeettinen jono ja $m = \max\{a_1, d\}$, niin $\dfrac{1}{a_1 + dk} \geq \dfrac{1}{m(1+k)}$. Koska harmoninen sarja hajaantuu, hajaantuu myös aritmeettisen sarjan termien käänteisluvuista muodostettu sarja. Toisaalta

$$\sum k = 2^{\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{\dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}} = \frac{1}{x(1-x)}$$

Tästä seuraa, että jos tehtävässä esiintyvä sarja olisi olemassa, sen termien käänteislukujen summa ei olisi suurempi kuin

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots = 2,$$

Ristiriita, siis tehtävässä ehdotettua aritmeettista jonoa ei ole olemassa.

2003.1. Olkoon f jokin tehtävän ehdon toteuttava funktio. Jos a on positiivinen rationaaliluku, niin $af(x)$ toteuttaa myös tehtävän ehdot. Jos tehtävällä on ratkaisuja, ratkaisujen joukossa on siten funktio f, jolle $f(1) = 1$. Osoitetaan, että tällaisia funktioita on vain yksi. Tehdään tämä induktiolla. Olkoon g toinen ratkaisu, jolle pätee $g(1) = 1$. Osoitetaan, että ehdosta $g\left(\dfrac{p}{q}\right) = f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ aina, kun $p + q \leq n$ seuraa $g\left(\dfrac{p}{q}\right) = f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ aina, kun $p + q \leq n + 1$. Tämä on oletuksen mukaan totta, kun $n = 2$. Olkoon $q < p$. Nyt

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = g\left(\frac{p-q}{q} + 1\right) = \left(1 + \frac{p-q}{q}\right) g\left(\frac{p-q}{q}\right) = \left(1 + \frac{p-q}{q}\right) f\left(\frac{p-q}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right),$$

koska $p - q + q = p < p + q$, joten induktio-oletusta voidaan käyttää. Ehdon (1) perusteella tapaus $p < q$ palautuu jo käsiteltyyn. Jos p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, asetetaan $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = pq$. Nyt $\left(1 + \dfrac{q}{p}\right) pq = (p+q)q$ ja $\dfrac{p}{q} + 1 = \dfrac{p+q}{q}$. Luvuilla $p+q$ ja q ei ole yhteisiä tekijöitä. Määritelty f toteuttaa siis ehdon (2). Ehto (1) toteutuu triviaalisti. Kaiken kaikkiaan tehtävän ratkaisut ovat kaikki funktiot $f\left(\frac{p}{q}\right) = apq$, missä a on positiivinen reaaliluku ja s.y.t.$(p, q) = 1$.

2003.2. Olkoon a jokin tehtävän yhtälön reaalinen ratkaisu. Silloin a on myös toisen asteen yhtälön $ax^2 + px + q = 0$ reaalinen ratkaisu. Mutta tämä merkitsee sitä, että toisen asteen yhtälön diskriminantti $p^2 - 4aq$ on ei-negatiivinen.

2003.3. Koska $xyz = 1$, niin $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + x + y + z + yz + xz + xy + xyx = x + y + z + \dfrac{1}{x} + 1 + y + \dfrac{1}{z} + 2$. On siis todistettava, että

$$x + y + z + \frac{1}{x} + 1 + y + \frac{1}{z} \geq 2\sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{y}}.$$

Mutta aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella

$$\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \le \frac{1}{3}\left(1 + y + \frac{1}{x}\right).$$

Vastaavat epäyhtälöt pätevät epäyhtälön oikean puolen kahdelle muulle termille. Riittää siis, jos todistetaan epäyhtälö

$$x + y + z + \frac{1}{x} + 1 + y + \frac{1}{z} \ge \frac{2}{3}\left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 2.$$

Tämä epäyhtälö seuraa välittömästi kaikilla positiivisilla luvuilla a toteutuvasta epäyhtälöstä $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$.

2003.4. Osoitetaan ensin, että

$$\frac{2a}{a^2 + bc} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \ge 0$ kanssa ja siis tosi. Osoitetaan sitten, että

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right).$$

Kun tämä epäyhtälö kerrotaan abc:llä, nähdään, että se on yhtäpitävä toden epäyhtälön $(a-b)^2 + (a-c)^2 \ge 0$ kanssa. On siis kaikkiaan osoitettu, että

$$\frac{2a}{a^2 + bc} \le \frac{1}{4}\left(\frac{2a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right).$$

Samoin on totta, että

$$\frac{2b}{b^2 + ca} \le \frac{1}{4}\left(\frac{2b}{ca} + \frac{c}{ab} + \frac{a}{bc}\right)$$

ja

$$\frac{2c}{c^2 + ab} \le \frac{1}{4}\left(\frac{2c}{ab} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}\right).$$

Väite saadaan, kun kolme viimeistä epäyhtälöä lasketaan yhteen.

2003.5. Todetaan ensin induktiolla, että $a_n = 2^{2^{n-2}}$, kun $n \ge 1$. Näin on, kun $n = 1$. Jos $a_n = 2^{2^{n-2}}$, niin $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2 = 2^{2^{n-2}} 2^{2\cdot 2^{n-3}} = 2^{2^{n-1}}$, joten induktioaskel on otettu. Koska $1 + a_1 = 1 + \sqrt{2}$, todistettavaksi epäyhtälöksi jää

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) < 2a_2a_3\cdots a_n.$$

Tämän epäyhtälön oikea puoli on

$$2^{1+2^0+2^1+\cdots+2^{n-2}} = 2^{2^{n-1}}.$$

Vasen puoli puolestaan on

$$\left(1+2^{2^0}\right)\left(1+2^{2^1}\right)\cdots\left(1+2^{2^{n-2}}\right)=1+2^{2^0}+2^{2^1}+2^{2^0+2^1}+2^{2^2}+\cdots+2^{2^0+2^1+\cdots+2^{n-2}}$$
$$=1+2+2^2+\cdots+2^{2^{n-1}-1}=2^{2^{n-1}}-1.$$

Todistus on valmis.

2003.6. Olkoon $m=\dfrac{n}{d}$. Tarkastellaan kaikkia joukon $S_n=\{1,\,2,\,\ldots,\,n\}$ osituksia $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m$, missä jokaisessa joukossa A_j on d lukua (ja joukot ovat yhteisalkiottomia). Olkoon tällaisten ositusten lukumäärä t. Jokainen joukon S_n d-alkioinen osajoukko esiintyy yhtä moessa osituksessa. Olkoon tämä lukumäärä s. S_n:llä on $\dbinom{n}{d}$ d-alkioista osajoukkoa. Selvästi $s\cdot\dbinom{n}{d}=mt$ (vasemmanpuoleinen tulo laskee jokaisen osituksen jokaisen siihen kuuluvan m:n eri joukon kohdalta). Jokaisessa osituksessa on oltava ainakin yksi sellainen joukko A_j, että $\sum_{i\in A_j}x_i\ge 0$. Joukkoja, joilla on tämä ominaisuus on oltava ainakin

$$\frac{t}{s}=\frac{1}{m}\binom{n}{d}=\frac{d}{n}\binom{n}{d}=\binom{n-1}{d-1}$$

kappaletta.

2003.7. Jos $X=\{100,\,101,\,\ldots,\,10000\}$, niin kaikille $x\angle y\in X$, $x\ne y$, pätee $xy\ge 100\cdot 101>10000$. Joukossa X voi olla ainakin $10000-99=9901$ alkiota. Osoitetaan, että enempää ei voi olla. Olkoon X tehtävässä kuvattu joukko. Jos kaikki X:n alkiot ovat ≥ 100, X:ssä on enintään 9901 alkiota. Jos $1\in X$, on oltava $X=\{1\}$. Oletetaan, että X:ssä ovat alkiot $1<x_1<x_2<\cdots<x_k<100$. Tarkastellaan sitten lukupareja $(200-x_1,\,x_1(200-x_1))$, $(200-x_2,\,x_2(200-x_2),\,\ldots,\,(200-x_k,x_k(200-x_k))$. Oletuksesta seuraa, että vain toinen kunkin parin kahdesta luvusta kuuluu joukkoon X. Kaikki luvut ovat keskenään eri suuria ja jokainen on >100 ($100<200-x_k<200-x_{k-1}<\cdots<200-x_1<200$ ja koska $x_j(200-x_j)-200=(x_j-1)\cdot 200-(x_j-1)x_j-x_j=200(x_j-1)-x_j>200-100$ ja $x_j(200-x_j)-x_i(200-x_i)=200(x_j-x_i)-(x_j-x_i)(x_i+x_j)=(200-(x_i+x_j))(x_j-x_i)>0$, kun $i<j$, niin $200<x_1(200-x_1)<x_2(200-x_2)<\cdots<x_k(200-x_k)$). On siis ainakin k 100:aa suurempaa lukua, jotka eivät kuulu X:ään ja $99-k$ sataa pienempää lukua, jotka eivät kuulu X:ään. X:ssä on siis enintään 9901 lukua.

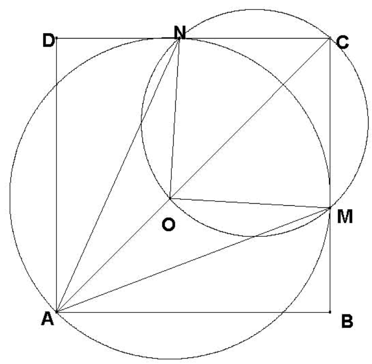
2003.8. Osoitetaan että pelaaja, joka saa ottaa makeisia tilanteessa, jossa pöydällä on $2n$ makeista, voittaa. Osoitetaan tämä induktiolla. Jos $n=1$, asia on ilmeinen. Oletetaan, että kun pöydällä on $2n$ makeista, seuraava ottaja pystyy voittamaan. Olkoon pöydällä $2n+2$ makeista. Jos tilanteessa, jossa pöydällä on $2n+1$ makeista, voittostrategia olisi toiseksi ottavalla pelaajalla, $2n$-tilanteen aloittaja söisi yhden makeisen. Tällöin hän olisi $2n+1$-tilanteen toinen ottaja, ja voittaisi. Oletetaan, että $2n+1$ tilanteessa aloittaja olisi voittaja. Silloin siinä tilanteessa aloittajan ensimmäinen siirto ei voi olla yhden makeisen syönti, koska se johtaisi vastapelaajan $2n$-tilanteeseen, jossa induktio-oletuksen mukaan tämä voittaisi. Aloittajan siirto olisi n:n makeisen syönti, ja toinen olisi tämän jälkeen $n+1$-tilanteessa ja häviäisi. Mutta $2n+2$-tilanteen aloittaja voi saattaa vastustajansa tilanteeseen $n+1$, joka johtaa tämän häviöön ja siis $2n+2$-aloittajan voittoon. Parillisessa aloitustilanteessa oleva siis voittaa. Mutta 2003-aloittaja voi ottaa yhden tai 1001 makeista, ja saattaa näin ollen toisen välttämättä parilliseen aloitustilanteeseen.

2003.9. Käytetään hyväksi Fibonaccin lukuja F_n, $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$, kun $n \geq 2$. Silloin $144 = F_{10}$. Osoitetaan yleisesti, että k:lla kysymyksellä, joihin vastataan niin kuin tehtävässä esitetään, voidaan määrittää luku positiivinen kokonaisluku $n \leq F_k$. Jos $k = 0$, $n = 1$ ja jos $k = 1$, riittää kysyä, onko $n < 2$. Yleisessä tapauksessa kysytään ensin, onko $n < F_{k-1} + 1$ ja onko $n < F_{k-2} + 1$. Niin kauan kuin saadaan myöntäviä vastauksia, sanokaamme i:nnen kysymyksen jälkeen $i-1$:een kysymykseen, on seuraava kysymys, onko $n < F_{k-(i+1)}+1$. Jos j:nnen kysymyksen jälkeen saadaan kielteinen vastaus $j-1$:seen kysymykseen, tiedetään, että $F_{k-(j-1)} + 1 \leq n \leq F_{k-(j-2)}$. n on nyt jokin $F_{k-(j-2)} - F_{k-(j-1)} = F_{k-j}$:stä kokonaisluvusta. Induktiivisesti voidaan päätellä, että n saadaan selville jäljellä olevilla $k-j$:llä kysymyksellä. Jos kaikkiin kysymyksiin saadaan myönteinen vastaus, niin viimeinen kysymys on onko n pienempi kuin $F_{k-k} + 1 = 2$, jos vastaus on myönteinen, $n = 1$.

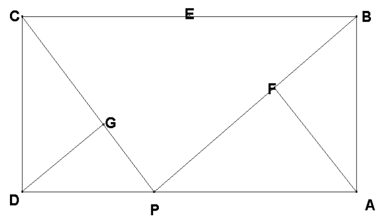
2003.10. Osoitetaan ensin, että $n \geq 12$. Valitaan 12 pistettä (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 12$ niin, että $x_i \equiv 0 \bmod 4$, kun $1 \leq i \leq 6$ ja $x_i \equiv 1 \bmod 4$, kun $7 \leq i \leq 12$ ja $y_i \equiv 0 \bmod 4$, kun $1 \leq i \leq 3$ tai $10 \leq i \leq 12$ ja $y_i \equiv 1 \bmod 4$ muulloin. Neljän x-koordinaatin keskiarvo on kokonaisluku, jos kaikki indeksit ovat ≤ 6, jolloin y-koordinaattien keskiarvo ei ole kokonaisluku, tai kun kaikki indeksit ovat ≥ 7, jolloin taaskaan y-koordinaattien summa ei ole neljällä jaollinen. Osoitetaan sitten, että jos $n \geq 13$, jonkin neljän pisteen keskiö on aina hilapiste. Yksinkertainen laatikkoperiaatteen sovellus osoittaa, että jokaisen viiden pisteen joukossa on kaksi pistettä (x, y) ja (x', y') siten, että $x \equiv x' \bmod 2$ ja $y \equiv y' \bmod 2$. Jokaisen viiden pisteen joukossa on siis kaksi sellaista, joiden välisen janan keskipiste on hilapiste. 13 pisteen joukosta voidaan poimia 5 erillistä pisteparia, joiden välisen janan keskipiste on hilapiste. Näiden viiden keskipisteen pisteen joukossa on edelleen kaksi, joiden välisen janan keskipiste on hilapiste. Kyseinen keskipiste on kyseisten janojen päätepisteiden keskiö.

2003.11. Tämä on mahdollista. Rakennetaan konfiguraatio vaiheittain. Piirretään ensin vinoneliö, jonka sivut ja yksi lävistäjä ovat yksikön pituisia. Vinoneliön neljän kärkipisteen välisistä etäisyyksistä viisi on yksikön pituisia. Valitaan nyt kaksi yksikkövektoria, joiden välinen kulma on $60°$ ja tehdään molempien vektorien määrittämät yhdensuuntaissiirrot. Vektorit voidaan valita niin, että alkuperäisen vinoneliön ja sen kuvien kärkipisteet eivät osu päällekkäin. Nyt on syntynyt kuvio, jossa on 12 pistettä ja $3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 27$ pisteiden välistä yksikön pituista etäisyyttä (jokainen lähtökuvion neljästä kärkipisteestä ja tämän pisteen kuvat ovat tasasivuisen kolmion kärjet). Kun sama prosessi toistetaan, saadaan ensin $3 \cdot 12 = 36$ pistettä ja $3 \cdot 27 + 3 \cdot 12 = 117$ yksikköetäisyyttä, sitten $3 \cdot 36 = 108$ pistettä ja $3 \cdot 117 + 3 \cdot 36 = 459$ yksikköetäisyyttä, $3 \cdot 108 = 324$ pistettä ja $3 \cdot 459 + 3 \cdot 108 = 1701$ yksikköetäisyyttä ja $3 \cdot 324 = 972$ pistettä ja $3 \cdot 1701 + 3 \cdot 324 = 6075$ yksikköetäisyyttä. Huomattakoon, että ehto jonka mukaan ”monistetun” kuvion kärjet eivät osua ”monistettavan” kuvion kärkipisteisiin saadaan aina toteutumaan, koska siirtovektorien suunta voidaan valita vapaasti, ja väistettävänä on aina äärellisen monta pistettä.

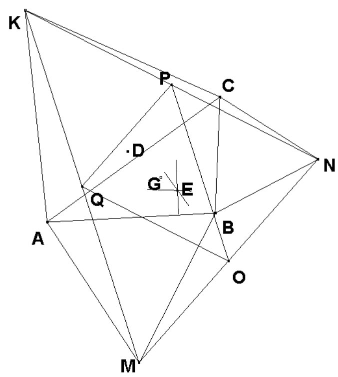
2003.12. Kolmion MCN ympäri piirretty ympyrä leikkaa janan AC pisteessä C. Koska $\angle MCO = \angle NCO\,(= 45^\circ)$, jänteet OM ja ON ovat yhtä pitkät. Jännenelikulmiossa $MCNO$ kulma MCO on suora, joten vastakkainen kulma NOM on myös suora. Jännettä MN vastaavat kehäkulmat ympyrässä, jonka keskipiste on O ja säde OM ovat 45°:een kulmia ja kaikki pisteet, joista MN näkyy 45°:een kulmassa ovat tällä ympyrällä. Siis A on tällä ympyrällä, joka näin ollen on kolmion AMN ympäri piirretty ympyrä.



2003.13. Piirretään pisteiden F ja P kautta ympyrä, joka sivuaa suoraa BC. Suorakulmaisesta kolmiosta BPA saadaan $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{BA}{BF}$ eli $BP\cdot BF = BA^2 = BE^2$. Koska pisteen B potenssi sanotun ympyrän suhteen on BE^2, on E:n oltava sivuamispiste. Aivan samoin nähdään, että G:n ja P:n kautta kulkeva BC:tä sivuava ympyrä sivuaa BC:tä pisteessä E. Vain yksi ympyrä sivuaa BC:tä pisteessä E ja kulkee pisteen P kautta. Siis E, P, F ja G ovat samalla ympyrällä.

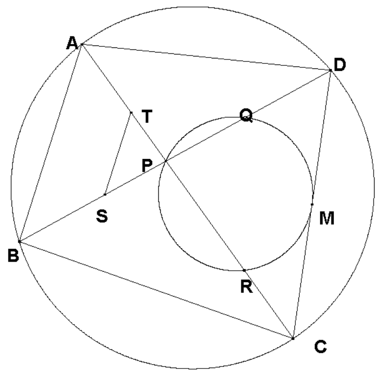


2003.14. Olkoot janojen MN, NK ja KM keskipisteet O, P ja Q. Jos G on kolmion MNK painopiste, niin kolmiot MNK ja PQO ovat homoteettiset, homotetiakeskuksena G ja homotetiakertoimena $-\dfrac{1}{2}$. Homotetiakuvauksessa kulmat ja suorien suunnat säilyvät, joten O:sta piirretty AC:tä vastaan kohtisuora suora kuvautuu K:sta piirretylle AC:tä vastaan kohtisuoralle suoralle. Koska CKA on tasasivuinen kolmio, tämä suora on AC:n keskinormaali. Vastaavasti P:stä ja Q:sta AB:tä ja BC:tä vastaan piirretyt kohtisuorat kuvautuvat AB:n ja BC:n keskinormaaleille. Koska



keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä D, myös tehtävässä kuvatut kolme suoraa leikkaavat samassa pisteessä E, joka on D:n vastinpiste edellä määritellyssä homotetiassa.

2003.15. Olkoon Γ tehtävässä määritelty P:n ja M:n kautta kulkeva ympyrä. Lasketaan pisteiden C ja D potenssi Γ:n suhteen ja otetaan huomioon se, että CD on Γ:n tangentti ja $CM = MD$. Saadaan $CR \cdot CP = CM^2 = MD^2 = DP \cdot DQ$ eli $RC = \dfrac{DP \cdot DQ}{CP}$. Koska $ST \| AB$, on $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AT}{BS} = \dfrac{AT}{DQ}$ eli $AT = \dfrac{DQ \cdot AP}{BP}$. Väite on yhtäpitävä yhtälön $\dfrac{DP}{CP} = \dfrac{AP}{BP}$ kanssa. Mutta koska $ABCD$ on jänneneli-kulmio, sen ympäri voidaan piirtää ympyrä Γ'. Pisteen P potenssille Γ':n suhteen pätee $AP \cdot PC = BP \cdot PD$, joten väite on todistettu.



2003.16. Olkoon $a - b = p$, missä p on alkuluku ja olkoon $ab = k^2$. Koska $b(b+2) = (b+1)^2 - 1$, toteamme, että $p \neq 2$. Nyt $k^2 = (p+b)b = b^2 + pb = \left(b + \dfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}p^2$ ja $p^2 = (2b+p)^2 - 4k^2 = (2b+p+2k)(2b+p-2k)$. Koska p on alkuluku, luvulla p^2 on vain kaksi ykköstä suurempaa tekijää, p, joten on oltava $2b + p + 2k = p^2$ ja $2b + p - 2k = 1$. Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $4b + 2p = p^2 + 1$ eli $b = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ ja $a = b + p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$. Tämä välttämätön ehto on myös riittävä: jos $a = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$, $b = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, missä p on mielivaltainen pariton alkuluku, niin a ja b toteuttavat tehtävän ehdon.

2003.17. Marin ohjelma toimii oikein. Olkoon $d > 1$ jokin n:n tekijä. Oletetaan, että Marin ohjelma antaa tulostuksen "d on yhdistetty". Niiden d:n tekijöiden, jotka ovat $\le d$, lukumäärä k on ≥ 2 (ainakin 1 ja d kuuluvat joukkoon). Silloin $\lceil k/2 \rceil < k$. Ohjelman löytämä d:n tekijä ei siis ole tekijöistä suurin eli d, joten d on yhdistetty luku. Jos taas d on yhdistetty luku, sillä on pienin alkutekijä p; selvästi $p^2 \le d$. Jos nyt $a_1, \ldots, a_m$ ovat p:tä pienemmät n:n tekijät, niin myös luvut $pa_1, \ldots, pa_m$ ovat d:tä pienempiä n:n tekijöitä (p:llä ja luvuilla a_i ei ole yhteisiä tekijöitä). n:llä on siis ainakin $2m + 1$ d:tä pienempää tekijää, ja p on näiden tekijöiden joukossa järjestyssijalla $m + 1$. Mutta $m + 1 \le \lceil k/2 \rceil$, joten Marin ohjelma löytää p:n ja tulostaa d:n yhdistetyksi.

2003.18. Ehdot täyttävä väritys on mahdollinen. Liitetään jokaiseen kokonaislukuun k luku, josta on poistettu tekijät 5, siis sellainen k', että $k = 5^m k'$, $m \ge 0$ ja k' jaoton viidellä. Väritetään nyt 0 ja 1 siniseksi, 2 vihreäksi, 3 punaiseksi ja 4 keltaiseksi. Väritetään kaikki kokonaisluvut niin, että k_1 ja k_2 ovat samanväriset, jos ja vain jos $k_1' \equiv k_2' \bmod 5$. Oleteaan nyt, että a, b, c ja d ovat samanväriset ja että $3a - 2b - 2c + 3d = 0$. Tämä yhtälö voidaan jakaa luvulla 5^m, missä m on suurin kokonaisluku, jolla 5^m on tekijänä luvuissa a, b, c ja d. Saadaan $0 = 3 \cdot 5^A a' - 2 \cdot 5^B b' - 2 \cdot 5^C c' + 3 \cdot 5^D d' \equiv 3(5^A a' + 5^B b' + 5^C c' + 5^D d') \bmod 5$, missä ainakin yksi luvuista A, B, C, D on 0. Jos luvut a, b, c ja d ovat nollasta eroavia, niin $a' \equiv b' \equiv c' \equiv d' \not\equiv 0 \bmod 5$. Silloin $5^A + 5^B + 5^C + 5^D \equiv 0 \bmod 5$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska yhteenlaskettavista viiden potensseista ainakin yksi on $5^0 = 1$. Jos jotkin yksi, kaksi tai kolme luvuista a, b, c, d ovat nollia, sama päättely toimii, kun kyseiset luvut jätetään pois tarkastelusta. Yhtälö $3a - 2b = 2c - 3d$ ei siis ole mahdollinen.

2003.19. Todistetaan epäsuorasti. Olkoon $a+b = pq$, missä $p \neq q$ ja p ja q ovat alkulukuja. Jos $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ on neliöluku, niin luvun $a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab$ on oltava jaollinen p:llä ja q:lla, joten $3ab$:n on oltava jaollinen p:llä ja q:lla. Voidaan olettaa, että $p \neq 3$. Silloin $p \mid a$ tai $p \mid b$. Koska $p \mid (a+b)$, sekä $p \mid a$ että $p \mid b$. Olkoon $a = pn$, $b = pm$. Nyt on oltava $q = 3$, sillä muussa tapauksessa voitaisiin päätellä, että myös $q \mid a$ ja $q \mid b$, jolloin $a \geq pq$, $b \geq pq$ ja $a + b > pq$. Näin ollen $3p = a + b = p(n+m)$. Siis $n = 1$ ja $m = 2$ tai $n = 2$ ja $m = 1$. Tällöin $a^3 + b^3 = 9p^3$. $a^3 + b^3$ ei siis voi olla neliöluku. Todistus on valmis.

2003.20. Olkoot $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ luvun n parittomat tekijät ja olkoon 2^k korkein 2:n potenssi, joka on n:n tekijä. Luvun n kaikki tekijät ovat a_1, a_2, …, a_q, $2a_1$, …, $2a_q$, …, $2^k a_1$, …, $2^k a_q = n$. n:ää pienempiä tekijöitä on siis $(k+1)q - 1$ kappaletta ja kaikkien tekijöiden, n itse mukaan lukien, summa on $2n = (2^{k+1} - 1)(a_1 + \cdots + a_q) + (k+1)q - 1$. Jos q on parillinen, yhtälön oikea puoli on pariton. Jos q on pariton ja $k+1$ on pariton, yhtälön oikea puoli on pariton. Lukujen p ja k on siis molempien oltava parittomia. Kokonaisluvulla $n' = 2^{-k}n < n$ on pariton määrä q tekijöitä. Jos n':n alkulukuhajotelma on $n' = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, niin sen tekijöiden määrä on $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$; tämä on pariton vain, jos jokainen α_j on parillinen eli jos n' on neliöluku. Siis, koska k on pariton, $n = 2^k s^2 = 2^{2t+1} s^2 = 2(2^t s)^2$.

Baltian Tie 2004 – ratkaisuja

2004.1. Tehtävän ehdosta (2) ja aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä seuraa

$$\sqrt{a_n(n+1)} \geq \frac{a_{n+1} + n}{2} \geq \sqrt{n a_{n+1}}$$

eli

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+1}{n}.$$

Kun tässä epäyhtälössä n korvataan luvuilla k, $k+1$, …, $2k-1$, saadaan ja syntyneet $2k$ epäyhtälöä kerrotaan puolittain keskenään, saadaan

$$\frac{a_{2k}}{a_k} \leq \frac{2k}{k} = 2.$$

Siis $2a_n \geq a_{2n}$ kaikilla n. Ehdon (1) perusteella on nyt

$$3a_n = a_n + 2a_n \geq a_n + a_{2n} \geq 3n$$

eli $a_n \geq n$. Väite (a) on todistettu. Olkoon sitten $a_n = n + 1$. Silloin $a_n + a_{2n} = n+1+2n+1 > 3n$ ja $a_{n+1} + n = 2n+2 = 2\sqrt{(n+1)^2} = 2\sqrt{a_n(n+1)}$. Jono $(a_n) = (n+1)$ on siis eräs kohtaan (b) kelpaava ratkaisu.

2004.2. Koska P:n kertoimet ovat ei-negatiivisia ja ainakin yksi kerroin on $\neq 0$, niin $P(x) > 0$, kun $x > 0$. Olkoon $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Tarkastellaan lauseketta $P(x)P(x^{-1})$. Se on muotoa $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_{-(n-1)}x^{1-n} + b_{-n}x^{-n}$. Selvästi $b_n = a_na_0$, $b_1 = a_na_1 + a_{n-1}a_0$, $b_2 = a_na_2 + a_{n-1}a_1 + a_{n-2}a_0$, $\ldots$, $b_k = a_na_{n-k} + a_{n-1}a_{n-k-1} + \cdots + a_ka_0$, $\ldots$, $b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2$, $\ldots$, $b_{-k} = a_0a_k + a_1a_{k+1} + \cdots + a_{n-k}a_n$, $\ldots$, $b_{1-n} = a_1a_n + a_0an - 1$, $b_{-n} = a_0a_n$. Näin ollen

$$P(x)P(x^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} a_{j-k}a_k(x^j + x^{-j}).$$

Koska kaikilla positiivisilla luvuilla y on $y + y^{-1} \geq 2$, on

$$P(x)P(x^{-1} \geq \sum_{k=0}^{n} a_k + 2\sum_{j>k} a_ja_k = P(1)P(1^{-1}) = (P(1))^2 \geq 1.$$

2004.3. Osoitetaan ensin, että väite pätee, kun $n = 3$. Silloin

$$\frac{1}{p^3+q^3+1} = \frac{1}{(p+q)(p^2-pq+q^2)+1} = \frac{1}{(p+q)(pq+(p-q)^2)+1} \leq \frac{1}{pq(p+q)+1} = \frac{r}{p+q+r}.$$

Vastaavasti

$$\frac{1}{q^3+r^3+1} \leq \frac{p}{q+r+p}, \quad \frac{1}{r^3+p^3+1} \leq \frac{q}{r+p+q}.$$

Saatujen kolmen epäyhtälön oikeiden puolien summa on 1, joten tehtävän epäyhtälö on tosi, kun $n = 3$. Yleisessä tapauksessa voidaan merkitä $p' = p^{n/3}$, $q' = q^{n/3}$ ja $r' = r^{n/3}$ ja soveltaa jo todistettua epäyhtälöä lukuihin p', q' ja r'. Väite seuraa heti.

2004.4. Elleivät asiat ole niin kuin tehtävässä väitetään, jokaisella K, $1 \leq K \leq n$, on olemassa sellainen $k \leq K$, että lukujen x_k, x_{k+1}, $\ldots$, x_K aritmeettinen keskiarvo on suurempi kuin X. On siis olemassa a_1 niin, että jonon x_{a_1}, x_{a_1+1}, $\ldots$, a_n aritmeettinen keskiarvo on $> X$. Jos $a_1 > 1$, on edelleen olemassa $a_2 < a_1$, niin että jonon x_{a_2}, x_{a_2+1}, $\ldots$, x_{a_1-1} aritmeettinen keskiarvo on $> X$ jne. Täten jono $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tulee ositetuksi paloiksi, joiden jokaisen aritmeettinen keskiaro on $> X$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että itse jonon aritmeettinen keskiarvo on X.

2004.5. Jos k ja p ovat positiivisia kokonaislukuja, merkitään $[k]_p$:llä sitä yksikäsitteistä kokonaislukua välillä $[0, p-1]$, joka on $\equiv k \bmod p$. Koska $(k)_{2n+1} = t(2n+1)$, missä $k-n \leq t(2n+1) \leq k+n$, $[k+n]_{2n+1} = k+n-t(2n+1)$ joten $(k)_{2n+1} = k+n-[k+n]_{2n+1}$. Siis $(k)_3 = k+1-[k+1]_3$, $(2k)_5 = 2k+2-[2k+2]_5$ ja $(3k)_7 = 3k+3-[3k+3]_7$ ja siis $f(k) = 6 - ([k+1]_3 + [2k+2]_5 + [3k+3]_7)$. Olkoot nyt a, b, c kokonaislukuja, joille pätee $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq\leq 4$ ja $0 \leq c \leq 6$. Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} k+1 \equiv a \bmod 3 \\ 2k+2 \equiv b \bmod 5 \\ 3k+3 \equiv c \bmod 7 \end{cases}$$

on yhtäpitävä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} k \equiv a-1 \bmod 3 \\ k \equiv -2b-1 \bmod 5 \\ k \equiv -2c-1 \bmod 7 \end{cases}$$

kanssa. Kiinalaisen jäännöslukulauseen nojalla ryhmällä on ratkaisu kaikilla valinnoilla (a, b, c). Mutta tämä merkitsee, että f saa kaikki arvot lukujen $6-0=6$ ja $6-(2+4+6)=-6$ väliltä.

2004.6. Olkoot a_1 ja a_2, b_1 ja b_2 sekä c_1 ja c_2 kuution kolmella vastakkaisella sivutahkolla sijaitsevat luvut. Kysytty summa on $a_1b_1c_1+a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_1b_2c_2+a_2b_1c_1+a_2b_1c_2+a_2b_2c_1+a_2b_2c_2=(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$. Koska $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$, ja tulon tekijät ovat suurempia kuin 1, yksi tulon tekijöistä on 7, yksi on 11 ja kolmas on 13. Siis kysytty summa on $a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2 = 7+11+13 = 31$.

2004.7. Olkoon X jokin tehtävässä mainittu joukko. Olkoot $m<n$ sen kaksi pienintä lukua. Koska $n = k^2m$ ja $k \in X$, niin $m \le k \le k^2 \le n$. Joko $k = m$ tai $k = n$, jolloin on oltava $k = m = n = 1$. Vain edellinen vaihtoehto on mahdollinen, joten $n = m^3$. Olkoon sitten p X:n kolmanneksi pienin luku, siis $n < p$. Nyt $p = k_1^2m$. Koska $m \le k_1 < p$ ja $k_1 \ne m$ (jos olisi $k_1 = m$, olisi $p = n$), on oltava $k_1 = n = m^3$ ja $p = m^7$. Edelleen X:ssä on luku k_2 niin, että $p = k_2^2n$ eli $m^7 = k_2^2m^3$. Siis $k_2 = m^2$. Mutta $m^2 \notin X$, joten tultiin ristiriitaan. Joukossa X ei siis ole kolmanneksi pienintä lkua, ja $X = \{m, m^3\}$. Kaikki muotoa $\{m, m^3\}$ olevat joukot selvästikin toteuttavat tehtävän ehdon.

2004.8. Osoitetaan, että $f(n)$:llä voi n:n valinnasta riippuen olla mielivaltaisen monta alkutekijää. Ellei näin olisi, jollain arvolla $n = n_0$ luvulla $f(n) = k$ olisi mahdollisimman monta alkutekijää. Voidaan olettaa, että $n_0 = 0$ (tarpeen vaatiessa voidaan siirtyä tarkastelemaan polynomia $f(x-n_0)$). Koska $f(0) = k$, $f(tk^2) \equiv k \bmod k^2$. Siis kaikilla kokonaisluvuilla t $f(tk^2) = bk^2+k = k(bk+1)$. Luvuilla k ja $bk+1$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Koska luvulla $f(tk^2)$ ei ole useampia alkutekijöitä kuin luvulla k, on oltava $bk+1 = \pm 1$. Mutta silloin $f(tk^2)$:lla olisi vain kaksi mahdollista arvoa, mikä on mahdotonta, koska f on polynomi, joka ei ole vakio.

2004.9. Oletetaan, että on olemassa tehtävän ehdon täyttävä joukko $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$, jolla ei ole mainitunlaista osajoukkoa. Voimme olettaa, että $a_{n-2} - a_{n-1}$ ei ole jaollinen n:llä. Olkoon $S_i = x_1 + \ldots + x_i$, $1 \le i \le n-1$. Nyt jokainen S_i antaa n:llä jaettaessa eri jakojäännöksen. Jos nimittäin olisi $S_i \equiv S_j \bmod n$, $i < j$, niin joukon $\{x_{i+1}, \ldots x_j\}$ alkioiden summa olisi n:llä jaollinen. Olkoon sitten $S_n = S_{n-3}+a_{n-1}$. Sama päättely kuin edellä osoittaa, että $S_n \equiv S_j \bmod n$ ei ole mahdollista, jos $j \ne n-2$, ja luvuista a_{n-2} ja a_{n-1} tehty oletus osoittaa, että ei myöskäään ole $S_n \equiv S_{n-1} \bmod n$. Summilla $S_1, S_2, \ldots, S_n$ on siis kaikilla eri jakojäännös $\bmod n$, joten jollain niistä jakojäännös on 0. Ristiriita, siis väite on oikea.

2004.10. Osoitetaan, että tällaista jonoa ei ole. Jos sellainen olisi, niin olisi $p_3 > 3$. ($p_3 = 3$ tarkoittaisi $p_2 = 2$ ja $2p_1 = 1$ tai $2p_1 = 3$, kummatkin mahdottomia.) Silloin $p_3 \equiv 1 \bmod 3$ tai $\equiv 2 \bmod 3$. Oletetaan, että $p_3 \equiv 1 \bmod 3$. Koska $p_4 = 2p_3 \pm 1 > 3$, ja p_4 alkulukuna ei ole kolmella jaollinen, on oltava $p_4 = 2p_3 - 1$ ja $p_4 \equiv 1 \bmod 3$. Samoin jatkaen saadaan $p_j = 2p_{j-1} - 1 = 2(p_{j-1} - 1) + 1$, $j \geq 5$. Tästä seuraa $p_{n+1} - 1 = 2^{n-2}(p_3 - 1)$ kaikilla $n \geq 4$. Asetetaan nyt $n = p_3 + 1$. Silloin $p_{p_3+2} - 1 = 2^{p_3-1}(p_3 - 1)$. Fermat'n pienen lauseen nojalla $2^{p_3-1} \equiv 1 \bmod p_3$. Siis $p_{p_3+2} \equiv 0 \bmod p_3$. Tämä ei ole mahdollista, koska p_{p_3+2} ja p_3 ovat eri alkulukuja.

2004.11. Osoitetaan, että näin voi tehdä, jos ja vain jos ainakin toinen luvuista m ja n on pariton. Todistetaan ensin ”vain jos” -osa. Ajatellaan taulukko ruudukoksi, jossa ruutujen reunat ovat yksikköjanoja. Jos jokin jana rajaa kahta ruutua, joissa molemmissa on 0, poistetaan se. Kun kaikkiin ruutuihin on kirjoitettu 0, on täytynyt poistaa yhteensä $m(n-1) + n(m-1) = 2mn - m - n$ janaa. Toisaalta ruutuun, jossa on ollu $+1$ on voinut tulla 0 vasta sitten, kun siinä oleva luku on muuttunut -1:ksi. Luvun on pitänyt muuttaa merkkiään pariton määrä kertoja eli kerran tai kolmesti. Kaikkien ruutujen, joissa on -1 (paitsi ensimmäisen ruudun) ympärysruuduissa on siten pariton määrä nollia. Kun tällainen -1 muuttuu nollaksi, poistuu aina pariton määrä yksikköjanoja. Tästä seuraa, että poistettavien yksikköjanojen määrä on kongruentti alkuperäisessä ruudukossa olevien ykkösten lukumäärän kanssa. Siis $2mn-m-n \equiv mn-1 \bmod 2$ eli $(m-1)(n-1) \cong 0 \bmod 2$. Luvuista $m-1$ ja $n-1$ ainakin toinen on parillinen.

Oletetaan sitten, että n, ruudukon sarakkeiden lukumäärä, on pariton. Oletaan, että -1 on i:nnellä rivillä. Nyt koko i:s rivi voidaan muuttaa nolliksi etenemällä ensimmäisestä -1:stä (tarvittaessa) vasemmalle ja oikealle. Samalla i:nnen rivin ylä- ja alapuoliset rivit (tai toinen, jos $i = 1$ tai $i = m$) muuttuvat kokonaan -1:ksi. Rivi, jossa on pelkkiä -1:siä pariton määrä saadaan nolliksi muuttamalla ensin parittomissa asemissa olevat -1:t nolliksi. Välissä olevat parillisissa asemissa olevien ruutujen luvut vaihtavat jokainen merkkinsä kahdesti, joten ne ovat -1:siä ja poistettavissa. Rivin viereisen rivin ykköset muuttuvat tässä prosessissa -1:siksi. Sama voidan toistaa joka rivillä.

2004.12. Merkitään tilannetta, jossa luku y on rivissä sillä paikalla, jossa suuruusjärjestyksen mukaan tulisi olla x, $x \to y$. Alkuaan jonossa voi olla tilanteita, *syklejä*, (1) $x \to x$, (2) $x \to y \to x$ tai (3) $\cdots \to x \to y \to z \to \cdots$, joissa on mukana kolme tai useampia lukuja. Lopputilanteessa on $2n$ sykliä $x \to x$. Syklit (1) ovat tavoiteltuja, jokaisesta (2)-syklistä päästään kahteen (1)-sykliin ensimmäiseen vaihtamalla x ja y keskenään. (3)-tyyppisissä Kolmannessa tilanteessa x:n, y:n ja z:n syklinen kierrätys vie ainakin x:n ja y:n omille paikoilleen, ja (1)-syklien määrä lisääntyy ainakin kahdella. Siirtoja tarvitaan siis enintään n kappaletta. Jos alkuperäinen järjestys on sellainen, että siinä on n (2)-sykliä (esimerkiksi) 2, 1, 4, 3, $\ldots$, $2n$, $2n-1$) tarvitaan tasan n siirtoa.

2004.13. Jos yksi ja sama maa on edustettuna joka kokouksessa, voi muissa kokouksissa olla aina eri osajoukko muista 24:stä maasta. Osajoukkoja on $2^{24} = 16777216$ kappaletta, joten kokouksia voi olla ainakin niin monena päivänä. Neljäs sääntö ei salli, että kahdessa eri kokouksessa olisi edustettuina jotkin kaksi 25 jäsenmaan komplementaarista osajoukkoa. Kokouksien määrä voi siis olla enintään puolet 25 alkion joukon osajoukkojen määrästä, eli $\frac{1}{2} \cdot 2^{25} = 2^{24}$.

2004.14. Osoitetaan, että tällainen strategia on olemassa täsmälleen silloin, kun $n = 4k + r$, missä $r = 0$, 1 tai 2, ja että kun $r = 3$, voittostrategia on toisella pelaajalla.

Todistetaan väite induktiolla k:n suhteen. Jos $k = 1$, $r \leq 2$, niin $4 \leq n \leq 6$. Ensimmäisen pelaaja, olkoon hän A, voi tehdä siirron, jonka jälkeen kasoja ei ole. Hän siis voittaa. Jos $r = 3$, $n = 7$. A:n siirron jälkeen jäljellä on tasan yksi kasa, jonka B voi hajottaa. Nyt B voittaa.

Käytetään hyväksi aputulosta: *Jos pelissä jollain hetkellä on tasan kaksi kasaa, joissa on* $4s+1$ *ja* $4t+1$ *pähkinää, missä* $t+s \leq k$*, niin se pelaaja, joka siirtää toisena tämän tilanteen jälkeen, voittaa.* Jos $k = 1$, aputulos on triviaalisti tosi (ehtolause ei voi toteutua). Jos $k = 2$, on oltava $t = s = 1$ ja ensiksi siirtävä hajottaa kasoista toisen ja toiseksi siirtävä toisen.

Oletetaan, että väite on tosi, kun pähkinöitä on aluksi $4k - 1$ ja että aputulos pätee, kun $s + t \leq k$. Osoitetaan, että näillä edellytyksillä väite pätee, kun pähkinöitää on aluksi $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ tai $4k + 3$ ja että aputulos pätee, kun $s + t = k + 1$. Jos kasassa on $4k$, $4k + 1$ tai $4k + 2$ pähkinää, A muodostaa kasan, jossa on $4k - 1$ pähkinää. Induktio-oletuksen mukaan A nyt tässä tilanteessa toisena siirtäjänä, ja hänellä on voittostrategia. Oletetaan sitten, että kasassa on $4k + 3$ pähkinää. A:n siirron jälkeen tilanne on joko $(4p + 1,\ 4q + 2)$ tai $(4p,\ 4q + 3)$. Oletetaan ensimmäinen tilanne. Jos $p = 0$ tai $q = 0$, B voittaa induktio-oletuksen nojalla. Ellei näin ole, B:n siirto on yhden pähkinän poisto $4q+2$-kasasta. Silloin ollaan aputuloksen tilanteessa. Koska $p+q = k$, B voittaa. Oletetaan sitten, että A;n siirto on $(4p,\ 4q+3)$. Nyt B voi ottaa yhden pähkinän $4p$-kasasta. Tilanne on nyt $(4(p-1)+3,\ 4q+3)$. B voi soveltaa induktio-oletuksen mukaista voittostrategiaansa kumpaankin kasaan, ja voittaa.

On vielä osoitettava, että aputulos pätee, kun $s+t = k+1$. Siirtovuorossa olevan pelaajan siirron jälkeen tilanne on joko muotoa $(4s + 1,\ 4p,\ 4q + 1)$ tai $(4s + 1,\ 4p + 2,\ 4q + 3)$. Edellisessä tapauksessa järjestyksessä toisen pelaajan siirto on yhden pähkinän poisto $4p$-kasasta. Induktio-oletuksen perusteella nyt järjestyksessä toisena siirtävä voittaa sekä tilanteen $(4s+1,\ 4q+1)$ että $(4p-1)$. Jälkimmäisessä tapauksessa seuraava siirto riippuu siitä, onko $p = 0$ vai $p > 1$. Jos $p = 0$, pelaaja siirtää $(4q + 3) \to (4q + 1,\ 2)$ ja voittaa aputuloksen nojalla. Jos taas $p > 0$, pelaaja siirtää $(4p + 2) \to (4p + 1,\ 1)$. Koska hän voittaa sekä lähtötilanteet $(4s + 1,\ 4p + 1)$ että $4q + 3$, hän voittaa.

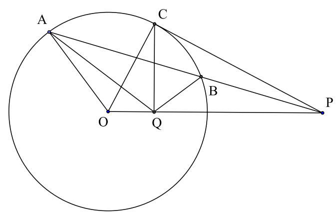
Oletetaan, että aputulos pätee, kun $t + s \leq k$, $2 \leq 2$, ja oletetaan, että $t + s = k + 1$. Ensimmäisen pelaajan siirto jakaa jommankumman kasan joukoiksi, joista toisessa on parillinen ja toisessa pariton määrä pähkinöitä. Oletaan ensin, että ensimmäistä siirtoa kuvaa $(4s + 1,\ 4t + 1) \to (4s + 1,\ 4p,\ 4q + 1)$.

2004.15. Kirjoitetaan luvut 1, 2, ..., 13 järjestykseen **1**, 6, 11, **3**, 8, 13, **5**, 10, **2**, 7, 12, **4**, 9. Jokainen viiden askeleen hyppy on tässä jonossa siirtyminen viereiseen lukuun (tai ensimmäisestä viimeiseen tai viimeisestä ensimmäiseen. Koska kirput eivät voi olla samassa ruudussa, ne eivät tässä järjestyksessä voi ohittaa toisiaan. Jos kirput ovat lihavoitujen numeroiden kohdalla, ne ovat jossain järjestyksen A, C, E, B, D eli alkuperäisen asetelman kiertovaihtelussa.

2004.16. Olkoon O ympyrän keskipiste. Suorakulmaisista kolmioista OQC ja OCP saadaan $OQ : OC = OC : OP$. Koska $OC = OA = OB$, $OQ : OA = OA : OP$, mistä seuraa, että kolmiot AOQ ja POA ovat yhdenmuotoiset (sks), ja samoin $QOB \sim BOP$. Koska

OAB on tasakylkinen, $\angle OAB = \angle OBA = 180° - \angle OBP$. Lasketaan $\angle AQP + \angle BQP$:

$$\begin{aligned}\angle AQP + \angle BQP &= (\angle AOQ + \angle AQO) + (\angle BOQ + \angle OBQ)\\ &= (\angle AOQ + \angle APO) + (\angle BOQ + \angle BPQ)\\ &= (180° - \angle OAB) + (180° - \angle OBP) = 180°.\end{aligned}$$



Kulmien $\angle AQP$ ja $\angle BQP$ keskiarvo on siis $90°$. Koska $\angle CQP = 90°$, QC on kulman $\angle AQB$ puolittaja.

2004.17. Olkoot a, b, c ja d valittujen pisteiden etäisyydet sivujen keskipisteistä. Oletetaan, että a ja c ovat niillä sivuilla, joiden pituus on 3. Silloin

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 =$$

$$\left(\frac{3}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + a\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + c\right)^2 + (2+b)^2 + (2-b)^2 + (2+d)^2 + (2-d)^2$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot 2^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 25 + 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

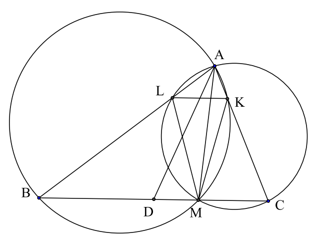
Nyt $0 \le a,\ c < \frac{3}{2}$ ja $0 \le b,\ d \le 2$. Kun ala- ja ylärajat sijoitetaan edellisen yhtälön oikealle puolelle, saadaan väite.

2004.18. Harmonisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \ge \frac{2}{\sqrt{AX \cdot XY}}.$$

Koska AY ja BC ovat kaksi kolmion ympärysympyrän jännettä ja ne leikkaavat pisteessä X, on $AX \cdot XY = BX \cdot XC$. Mutta $\sqrt{BX \cdot XC} \le \frac{1}{2}(AX + XC) = \frac{1}{2}BC$. Väite saadaan kun epäyhtälöt yhdistetään.

2004.19. Väitteen todistamiseksi riittää, jos saadaan osoitetuksi, että $CK : LB = AC : AB$. Havaitaan. että kolmiot MBL ja MKC ovat yhdenmuotoisia kolmion ABC kanssa. Tämä seuraa siitä, että jännenelikulmiosta $ALMC$ saadaan $\angle BLM = \angle ACM$ ja jännenelikulmiosta $ABMK$ vastaavasti $\angle MKC = \angle ABC$. Nyt kolmiot MBL ja MKC ovat keskenäänkin yhdenmuotoiset. Siis todellakin

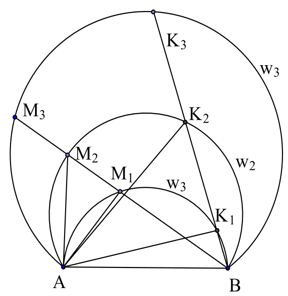


$$\frac{CK}{LB} = \frac{KM}{BM} = \frac{\dfrac{AM\sin(\angle KAM)}{\sin(\angle AKM)}}{\dfrac{AM\sin(\angle MAB)}{\sin(\angle MBA)}} = \frac{\sin(\angle KAM)}{\sin(\angle MAB)} = \frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle DAC)}$$

$$= \frac{\dfrac{BD\sin(\angle BDA)}{AB}}{\dfrac{CD\sin(\angle CDA)}{AC}} = \frac{AC}{AB}.$$

Yhtälöketjun toinen yhtäsuuruus seuraa sinilauseesta sobellettuna kolmioihin AKM ja ABM, kolmas siitä, että $\angle AKM = 180^\circ - \angle ABM$ (jännenelikulmio $ABMK$!), neljäs pisteen M määritelmästä, viides sinilauseesta sovellettuna kolmioihin ACD ja ABD ja viimeinen siitä, että D on sivun BC keskipiste.

2004.20. Samaa jännettä vastaavina kehäkulmina $\angle BK_1A = \angle BM_1A$ ja $\angle BK_2A = \angle BM_2A$. Siis $AK_1K_2 \sim AM_1M_2$ (kk) ja



$$\frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{AK_2}{AM_2}.$$

Samoin perustein $AK_2K_3 \sim AM_2M_3$ ja

$$\frac{K_2K_3}{M_2M_3} = \frac{AK_2}{AM_2}.$$

Väite seuraa heti edellisistä kahdesta yhtälöstä.

2005.1. Osoitetaan, että jonossa on aina kaksi samaa lukua. Olkoon k pienin positiivinen kokonaisluku, jolle on voimassa

$$(k+1)\cdot 9^{2005} < 10^k.$$

(Tällainen luku on olemassa, koska epäyhtälön vasen åpuoli on k:n ensimmäisen asteen polynomi ja oikea puoli eksponenttifunktio.) Osoitetaan, että on olemassa n_0 niin, että a_n:n kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden lukumäärä on pienempiu kuin $k+1$ kaikilla $n > n_0$. Olkoon a_i:ssä tasan $j+1$ numeroa, ts. $10^j \le a_i < 10^{j+1}$. Osoitetaan että (1) jos $j < k$, niin a_{i+1}:ssä on vähemmän kuin $k+1$ numeroa, ja (2) jos $k \le j$, niin $a_{i+1} < a_i$. (1): Koska $a_{i+1} \le (j+1)\cdot 9^{2005} < (k+1)\cdot 9^{2005} < 10^k$, niin a_i:ssä on vähemmän kuin $k+1$ numeroa. (2): Jälleen $a_{i+1} \le (j+1)\cdot 9^{2005}$. Koska $j \ge k$, $a_i \ge 10^j > (j+1)\cdot 9^{2005} \ge a_{i+1}$. Todistetaan nyt tehtävän väite. Jos a_0:ssa on enintään k numeroa, niin kaikissa jonon jäsenissä on (1):n perusteella enintään k numeroa. Jono on rajoitettu ja päättymätön, joten sen taytyy kohdata jokin sama luku useamman kerran. Jos a_0:ssa on numeroita $k+1$ tai enemmän, jono alkaa vähenevänä. Jossain termissä a_{n_0} on silloin enintään k numeroa, ja tästä alkaen kaikissa jonon termeissä on enintään k numeroa. Laatikkoperiaatteesta seuraa taas, että jonossa on samoja lukuja.

2005.2. Koska $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, todistettava epäyhtälö on

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} \ge 3 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}.$$

Sovelletaan harmonisen ja aritmeettisen keskiarvon epäyhtälöä ja aritmeettisen ja neliöllisen keskiarvon epäyhtälöä:

$$\frac{3}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\gamma}} \le \frac{\cos^\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3} = \frac{3-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{3}$$
$$= 1-\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

Väite seuraa.

2005.3. Jonon määritelmästä seuraa heti, että $a_{k+2} > a_k + \frac{1}{2}a_{k+1}$. Kun tämmä epäyhtälö jaetaan luvlla $a_ka_{k+1}a_{k+2}$ ja termit järjestetään uudelleen, saadaan

$$\frac{1}{a_ka_{k+2}} < \frac{2}{a_ka_{k+1}} - \frac{2}{a_{k+1}a_{k+2}}.$$

Näin tehtävän summalle saadaa ”teleskooppinen” yläraja:

$$\sum_{k=1}^{98}\frac{1}{a_ka_{k+2}} < \sum_{k=1}^{98}\left(\frac{2}{a_ka_{k+1}} - \frac{2}{a_{k+1}a_{k+2}}\right) = \frac{2}{a_1a_2} - \frac{2}{a_{99}a_{100}} < \frac{2}{a_1a_2} = 4.$$

2005.4. Olkoon $Q(x) = x^2+1$. Tehtävän yhtälö on $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Tämän yhtälön toteuttavat ainakin $P(x) = x$, $P(x) = Q(x) = x^2+1$ ja $P(x) = Q(Q(x)) = (x^2+1)^2+1 = x^4+2x^2+2$.

2005.5. Koska kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x on $2x \le x^2+1$, niin

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \le \frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1} = \frac{1}{2+\dfrac{1}{a}}+\frac{1}{2+\dfrac{1}{b}}+\frac{1}{2+\dfrac{1}{b}}.$$

Tehtävän epäyhtälö on siis yhtäpitävä epäyhtälön

$$\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)+\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)+\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right) \le \left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)$$

kanssa. Kun tässä suoritetaan kertolaskut, niin nähdään edelleen, että tehtävän epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{abc} \ge 4$$

eli

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \ge 3$$

kanssa. Mutta vimeinen epäyhtälö seuraa heti aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon epäyhtälöstä ja oletuksesta $abc = 1$:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{abc}\right)^3} = 3.$$

2005.6. Jakoyhtälön mukaan $N = qK + r$, $0 \leq r < K$. Numeroidaan kortit numeroilla yhdestä N:ään, alkaen pakan pohjalta. Kortit $N - (j - 1)$ siirtyvät korteiksi j, $1 \leq j \leq K$ ja kortit m, $1 \leq m \leq N - K$ siirtyvät korteiksi $m + K$. Selvitetään, miten kortit, joiden numero on 1, 2, ..., K vaihtavat paikkaa sekoitusoperaatioissa. Olkoon $i \leq r$. Silloin kortin numero i paikka vaihtuu seuraavasti:

$$i \to K+i \to 2K+i \to \cdots \to qK+i \to r+1-i \to K+r+1-i \to \cdots \to qK+r+1-i \to i$$

Tähän kiertoon tarvitaan $2q+2$ sekoitusta. Kortit i, $r < i \leq K$ puolestaan kiertävät näin:

$$\begin{aligned} i \to K+i \to 2K+i \to \cdots \to (q-1)K+i \to K+r+1-i \\ \to 2K+r+1-i \to \cdots \to qK+r+1-i \to i. \end{aligned}$$

Tämän kierron pituus on $2q$ sekoitusta. Jokainen luku 1, 2, ..., N on mukana jommassakummassa kierrossa. Jokainen kortti palaa siis alkuperäiselle paikalleen joko $2q + 2$:n tai $2q$:n sekoituksen jälkeen. Lukujen $2q$ ja $2q+2$ pienin yhteinen monikerta on $2q(q+1)$. Jokainen kortti palaa paikalleen viimeistään $2q(q+1)$:n sekoituksen jälkeen. Koska $q+1 \leq 2q$, niin

$$2q(q+1) \leq (2q)^2 \leq 4\left(\frac{N}{K}\right)^2,$$

ja väite on todistettu.

2005.7. Oletetaan, että taulukossa on rivi, jossa on tasan yksi nolla; voidaan olettaa, että brivi on (1, 1, 1, 1, 1, 0). Jos nyt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 1)$ on taulukon rivi, niin myös $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$ on taulukon rivi; taulukon viimeisessä sarakkeessa on siten ainakin puolessa riveistä 0. Oleteaan sitten, että jossain rivissä olisi tasan kaksi nollaa; voidaan olettaa, että rivi on $(x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 0)$. Olkoon k_{ij} sellaisten sivien lukumäärä, joiden kaksi viimeistä lukua ovat i ja j. Samoin kuin yllä nähdään, että $n_{00} \geq n_{11}$. Voimme olettaa, että $n_{10} \geq n_{01}$. Viimeisessä sarakkeessa on $n_{00} + n_{10}$ nollaa ja $n_{11} + n_{01}$ ykköstä; nollia on siis ainakin yhtä monta kuin ykkösiä. Oletetaan sitten, että kaikissa riveissä on ainakin kolme nollaa (paitsi mahdollisesti rivissä (1, 1, 1, 1, 1, 1), jos sellainen taulukossa on.) Koska $n \geq 3$, taulokossa on ainakin kaksi riviä, joissa on nollia. Koska rivit eivät ole samoja, niiden alkioiden tulojen joukossa on ainakin neljä nollaa. Taulukon nollien määrä on siis suurempi kuin $3(n-1)$. Ei ole mahdollista, että jokaisessa sarakkeessa olisi enintään $\dfrac{n-1}{2}$ nollaa; siis jossain sarakkeessa on oltava $\dfrac{n}{2}$ nollaa.

2005.8. Osoitetaan, että on väritettävä ainakin 48 neliötä. Osoitetaan ensin, että 48 neliötä riittää. Tämä nähdään seuravalla tavalla. Olkoon A jokin ruudukon lävistäjällä oleva yksikköneliön kärkipiste ja olkoon B se lävistäjän kärkipiste, joka on kauimpana A:sta. Väritetään neliö, jonka lävistäjä on AB. Kun sama tehdään kaikille 48:lle lävistän pisteelle, jotainen ruudukon sivu tulee väritetyksi. Se, että neliöitä tarvitaan ainakin 48, nähdään tarkastelemalla niitä ruudukon yksikköjanoja, joiden toinen ja vain toinen päätepiste on ison neliön reunalla. Selvästi mikään ruudukkoon piirretty neliö ei voi sisältää kuin enintään kaksi tällaista janaa. Janoja on $4 \cdot 24$ kappaletta, joten neliöitä tarvitaan ainakin 48.

2005.9. Hahmotetaan $n \times 3$-ruudukko niin, että siinä on n kolmen ruudun levyistä vaakariviä ja kolme n:n ruudun korkousta saraketta. Sanotaan tällaista ruudukkoa A_n-ruudukoksi. Tarkastellaan myös sellaista ruudukkoa, jossa ylimmällä rivillä on jommassakummassa laidassa kaksi vierekkäistä ruutua ja niiden alapuolella $n-2$ kolmen ruudun levyistä riviä. Kutsutaan näitä B_n-ruudukoiksi. Olkoon n parillinen. Olkoon A_n-ruudukkojen 1×2-paloittelujen lukumäärä N_n ja B_n-ruudukkojen vastaava lukumäärä K_n. Johdetaan suureille N_n ja K_n palautuskaava. A_n-ruudukon kaksi ylintä riviä voidaan paloitella sarakkeiden suuntaisilla 1×2 dominoilla vain yhdellä tavalla, ja alemmat $n-2$ riviä N_{n-2}:lla tavalla. A_n-ruudukko voidaan paloitella myös niin, että erotetaan siitä B_n ruudukko; tämä voidaan tehdä kahdella tavalla. yli jäävä neljän ruudun kuvio voidaan paloitella vain yhdellä tavalla. Kaikkiaan siis

$$N_n = N_{n-2} + 2K_n \tag{1}$$

ja

$$N_{n+2} = N_n + 2K_{n+2}. \tag{2}$$

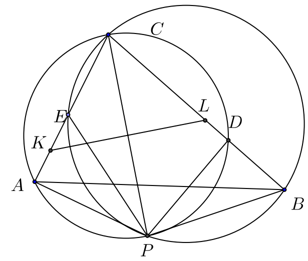
Tarkastellaan sitten B_{n+2}-ruudukon paloittelua. Siitä voidaan irrottaa ylin vajaa rivi omaksi palakseen, loppu on A_n-ruudukko, joka siis voidaan paloitella N_n eri tavalla. on myös mahdollista erottaa B_{n+2} ruudukosta kolme sarakkeiden suuntaista palaa, ja silloin jäljelle jää B_n-ruudukko, jonka voi paloitella K_n eri tavalla. Siis

$$K_{n+2} = N_n + K_n. \tag{3}$$

Yhtälöistä (1), (2) ja (3) on helppo eliminoida K_{n+2} ja K_n; jäljelle jää yhtälö $N_{n+2} = 4N_n - N_{n-2}$ ja $N_{n+2} \equiv N_n - N_{n-2} \bmod 3$. Heti nähdään, että $N_2 = 3 \equiv 0 \bmod 3$ ja $N_4 = 11 \equiv 2 \bmod 3$. Induktio-oletuksesta $N_{6k+2} \equiv 0 \bmod 3$ seuraa $N_{6k+6} \equiv N_{6k+4} \bmod 3$ ja $N_{6(k+1)+2} \equiv 0 \bmod 3$. Koska $200 = 33 \cdot 6 + 2$, N_{200} on kolmella jaollinen.

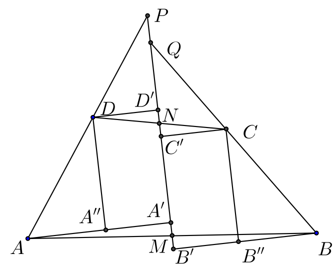
2005.10. Viisialkioisella joukolla $K = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ on kymmenen kahden alkion osajoukkoa. Jos valitaan kolme lukua niiden kymmenen m:n kahden alkuluvun tulon muotoisten tekijöiden joukosta, joiden molemmat tekijät ovat joukossa K, tulo ei voi olla m (koska tekijä 13 ei ole mukana). Siis $n \geq 11$. Jaetaan 15-alkioinen M viideksi osajoukoksi, joista jokaisessa alkioiden tulo on m: $\{2{\cdot}3,\ 5{\cdot}13,\ 7{\cdot}11\}$, $\{2{\cdot}5,\ 3{\cdot}7,\ 11{\cdot}13\}$, $\{2{\cdot}7,\ 3{\cdot}13,\ 5{\cdot}11\}$, $\{2 \cdot 11,\ 3 \cdot 5,\ 7 \cdot 13\}$ ja $\{2 \cdot 13,\ 3 \cdot 11,\ 5 \cdot 7\}$. Jos nyt valitaan mitkä tahansa M:n 11 lukua, niin laatikkoperiaatteen nojalla jotkin kolme, a, b ja c, kuuluvat samaan edellisistä viidestä joukosta. Silloin $abc = m$.

2005.11. Piirretään kolmioiden ADC ja EBC ympärysympyrät. Niiden toinen leikkauspiste on P. Koska kahden toisiaan leikkaavan ympyrän yhteinen jänne on kohtisuorassa ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevaa suoraa vastaan, $CP \perp KL$. Kolmio CKL on tasakylkinen, jos sen C:stä piirretty korkeusjana yhtyy kulman C puolittajaan. On siis osoitettava, että CP on kulman $\angle ACB$ puolittaja. Tätä varten tarkastellaan jännenelikulmiota $APDC$. Jännenelikulmion perus-



ominaisuuden perusteella $\angle CAP = \angle BDB$. Jännenelikulmiosta $CEPB$ saadaan samoin $\angle PBD = \angle PEA$. Koska $AE = BD$, kolmiot APE ja DPB ovat yhteneviä (ksk). Tästä seuraa, että kolmioiden P:stä suorille AC ja BC piirretyt korkeusjanat ovat yhtä pitkät. Mutta tämä merkitsee, että CP on kulman $\angle ACB$ puolittaja.

2005.12. Olkoot A', B', C' ja D' pisteiden A, B, C ja D kohtisuorat projektiot suoralla MN ja olkoot A'' ja B'' pisteiden D ja C kohtisuorat projektiot suorilla AA' ja BB'. Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että kolmiot $DD'P$ ja $CC'Q$ ovat yhteneviä. Koska $AM =_M B$ ja $DN = NC$, suorakulmaisista kolmioista $AA'M$, $BB'M$ ja $DD'N$, $CC'N$ saadaan $AA' = BB'$ ja $DD' = CC'$. Nelikulmiot $A'D'DA''$ ja $C'B'B''C$ ovat suorakaiteita, joten $A'A'' = DD' = CC' = B'B''$ ja $AA'' = BB''$. Koska $AD = BC$ ja kolmiot $AA''D$

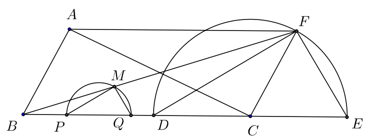


ja $BB''C$ ovat suorakulmaisia, ne ovat yhteneviä. Siis $\angle DAA'' = \angle CBB''$. Koska $DD' \| AA'$ ja $CC' \| BB'$, niin $\angle PDD' = \angle DAA'$ ja $\angle QCC' = \angle CBB'$. Siis $\angle PDD' = \angle QCC'$, jaten kolmiot $DD'P$ ja $CC'Q$ ovat todellakin yhteneviä (ksk).

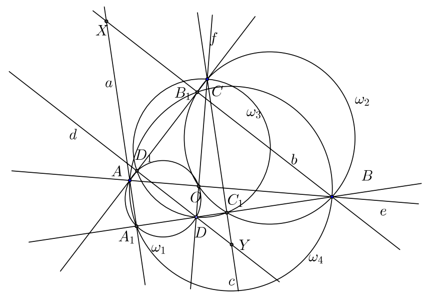
2005.13. Jos ympyrän säde on $\sqrt{2}$, sen halkaisjan pituus on pienempi kuin 3. (a) Tarkastellaan suorakaiteen kärkiä ja pitempien sivujen keskipisteitä. Mitkä tahansa kaksi näistä ovat ainakin kolmen yksikön päässä toisistaan. Mitkään kaksi eivät siis voi olla saman ympyrän sisällä. Ympyröitä tarvitaan siis ainakin kuusi. Toisaalta 2×2-neliön ympärysympyrän säde on $\sqrt{2}$. Kuusi tällaista neliötä peittää 6×3-suorakaiteen, joten suorakaide voidaan peittää kuudella $\sqrt{2}$-säteisellä ympyrällä. (b) Suorakaiteen keskipisteen etäisyys suorakaiteen kärjestä on

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{34} > \frac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2}.$$

Ympyrä, jonka säde on $\sqrt{2}$ ei voi peittää suorakaiteen kärkeä ja keskipistettä. Ympyröitä tarvitraan siis ainakin viisi. Suorakaide voidaan jakaa kolmeksi $2 \times \frac{5}{3}$-suorakaiteeksi ja kahdeksi $1 \times \frac{5}{2}$-suorakaiteeksi. On helppo todeta, että tällaisten suorakaiteiden lävistäjä ovat lyhempiä kuin $2\sqrt{2}$, joten ne voidaan peittää $\sqrt{2}$-säteisillä ympyröillä. Viisi ympyrää riittää.



2005.14. Täydennetään kolmion ABC suunnikkaaksi $ABCF$. Silloin piste F on ympyrällä, jonka keskipiste on C ja halkaisija DE. Thaleen lauseen nojalla $\angle DFE$ on suora. Koska $BD = 3 \cdot BP$, $BE = 3 \cdot BQ$ ja $BF = 3 \cdot BM$, D, E ja F ovat pisteiden P, Q ja M kuvat B-keskisessä homotetiassa, jossa suurennussuhde on 3. Siis myös $\angle PMQ$ on suora.



2005.15. Käytetään hyväksi kahden ympyrän *radikaaliakselin* käsitettä. Radikaaliakseli on niiden pisteiden joukko, joiden potenssi on kummankin ympyrän suhteen sama. Radikaaliakseli on aina suora, ja jos ympyrät leikkaavat, se on leikkauspisteiden kautta kulkeva suora. Olkoot nyt A_1 ja C_1 suorien a ja c ja suoran BD leikkauspisteet sekä B_1 ja D_1 suoran AC ja suorien b ja d leikkauspisteet. Suorista kulmista nähdään heti, että pisteet A, D_1, O ja D ovat samalla ympyrällä ω_1, pisteet C, B_1, O ja B samalla ympyrällä ω_3, pisteet D_1, C_1, D ja C samalla ympyrällä ω_2 ja pisteet A_1, B_1, A sekä B samalla ympyrällä ω_4. Piste O on ympyröiden ω_1 ja ω_2 radikaaliakselilla. Piste Y on sekä ympyröiden ω_1 ja ω_3 että ympyröiden ω_2 ja ω_3 radikaaliakselilla. Siten pisteen Y potenssi ympyröiden ω_1 ja ω_2 suhteen on sama, joten Y on näiden ympyröiden radikaalikaselilla. Vastaavasti nähdään, että X on sekä ympyröiden ω_1 ja ω_4 että ympyröiden ω_2 ja ω_4 radikaaliakselilla. Se on siis myös ympyröiden ω_1 ja ω_2 radilaaliakselin piste. Näin ollen X, Y ja O ovat samalla suoralla.

2005.16. Oositetaan ensin, että väite pätee, kun q on alkuluku. Koska $(n+1)^p - n^p = aq$, luvuilla $n+1$ ja q ja n ja q on sama suurin yhteinen tekijä. Sen on 1, koska peräkkäisistä luvuista n ja $n+1$ ainakin toinen on q:lla jaoton. Luvulla n on siis käänteisluku $\bmod q$; olkoon se m. Siis $mn \equiv 1 \bmod q$. Jos $s = m(n+1)$, niin $s^p = m^p(n+1)^p \equiv m^p n^p \equiv 1 \bmod q$. Olkoon t pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $s^t \equiv 1 \bmod q$. Silloin $t|p$. (Jos olisi $p = at+b$, $0 < b < t$, niin $1 \equiv s^p = s^{at+b} = (s^t)^a s^b \equiv s^b \bmod q$, mikä olisi ristiriidassa t:n määritelmän kanssa.) Koska p on alkuluku, niin $t = 1$ tai $t = p$. Jos olisi $t = 1$, olisi $m(n+1) \equiv 1 \bmod q$ ja $m \equiv 0 \bmod q$, $mn \equiv 0 \bmod q$. Siis $t = p$. Fermat'n pienen lauseen nojalla $s^{q-1} \equiv 1 \bmod q$. Siis p on $q-1$:n tekijä. – Jos mille tahansa luvun q kahdelle tekijälle q_1 ja q_2 pätee, että $q_1 - 1$ ja $q_2 - 1$ ovat p:llä jaollisia, niin identiteetistä $(q_1-1)(q_2-1) = q_1q_2 - 1 - (q_1-1) - (q_2-1)$ seuraa, että $q_1q_2 - 1$ on p:llä jaollinen. Tästä ja todistuksen alkuosasta seuraa helposti, että tehtävän väite pätee myös, jos q on yhdistetty luku.

2005.17. Määritelään jono y_n asettamalla $y_n = 2x_n - 1$. Nyt $y_n = 2(2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1) - 1 = 4x_{n-1}x_{n-2} - 2x_{n-1} - 2x_{n-2} + 1 = (2x_{n-1} - 1)(2x_{n-2} - 1) = y_{n-1}y_{n-2}$, kun $n \geq 2$. Siis $y_{n+3} = y_{n+2}y_{n+1} = y_{n+1}^2 y_n$. Luku y_{n+3} on neliöluku jos ja vain jos luku

y_n on neliöluku. Koska $y_0 = 2a - 1$, tehtävän ehto toteutuu, kun y_0 on pariton neliöluku, $y_0 = (2m-1)^2$, ja

$$a = \frac{1}{2}\left((2m-1)^2 + 1\right),$$

m positiivinen kokonaisluku.

2005.18. Olkoon $x = 2^s a$ ja $y = 2^t b$, a ja b parittomia kokonaislukuja. Voidaan olettaa, että $s \ge t$. Silloin

$$z = \frac{2^{2+t+s}ab}{2^t(2^{s-t}a + b)} = \frac{2^{s+2}ab}{2^{s-t}a + b}.$$

Jos olisi $s - t > 0$, niin z:n nimittäjä olisi pariton, ja z olisi parillinen. Siis $s = t$ ja

$$z = \frac{2^{s+2}ab}{a+b}.$$

Olkoon sitten $a = de$, $b = df$, missä e:n ja f:n suurin yhteinen tekijä on 1. Nyt

$$z = \frac{2^{s+2}def}{e+f}.$$

Koska z on pariton, $e + f$ on jaollinen $22 + 2$:lla ja siis ainakin 4:llä. Koska e ja f ovat parittomia kokonaoislukuja, toisen esimeskiksi e:n, on oltava $\cong 3 \bmod 4$. Mutta e:n ja $e + f$:n suurin yhteinen tekijä on 1, joten e on z:n tekijä, ja väite on todistettu.

2005.19. Lähdetään liikkeelle jostain Pythagoraan kolmikosta, esimerkiksi yhtälöstä $3^2 + 4^2 = 5^2$. Silloin $3^2(3^2 + 4^2) + 4^2 \cdot 5^2 = (3\cdot 3)^2 + (3\cdot 4)^2 + (4\cdot 5)^2 = (5\cdot 5)^2$. Näin on saatu kolmen neliöluvun summa, joka on neliöluku. Menetelmä voidaan toistaa mielivaltaisen monesti ja päästä tilanteeseen, jossa mielivaltaisen monen neliöluvun summa on neliöluku.

2005.20. Oletetaan, että p_k on n:n alkutekijöistä suurin. Olkoon $m = (p_1 + 1)(p_2 + 1)\cdots(p_k + 1)$. Silloin p_k on m:n ja siis myös jonkin $p_i + 1$:n alkutekijä. Oletetaan, että $p_k > 3$. Jos $p_i = 2$, niin $p_i + 1 < p_k$. Ristiriita. Jos $p_i > 2$, niin $p_i + 1$ on parillinen, ja sen tekijät 2 ja $\frac{1}{2}(p_i + 1)$ ovat $< p_k$. Ristiriita. Siis $p_k \le 3$ ja $n = 2^r 3^s$. Vastaavasti $m = 3^r 4^s = 2^{2s} 3^r$. $n|m$ jos ja vain jos $s \le r \le 2s$.

2006.1. Jonon kuusi ensimmäistä alkiota ovat a_1, a_2, a_3, $a_4 = a_2 - a_1$, $a_5 = a_3 - a_2$ ja $a_6 = a_4 - a_3 = a_2 - a_1 - a_3$. Näiden summa on $a_1 + a_2 + a_3 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 - a_3 = 0$. Kuusi ensimmäistä alkiota eivät voi olla kaikki positiivisia, joten jonossa voi olla enintään viisi peräkkäistä positiivista alkiota. Jono 1, 2, 3, 1, 1 osoittaa, että jonossa voi olla tasan viisi positiivista peräkkäistä alkiota.

2006.2. Merkitään $m = -2$ ja $M = 17$. Jokaisen a_i:n etäisyys välin $[m, M]$ keskipisteestä on enintään puolet välin pituudesta, joten

$$\left(a_i - \frac{m+M}{2}\right)^2 \le \left(\frac{M-m}{2}\right)^2.$$

Siis

$$\sum_{i=1}^{59}\left(a_i-\frac{m+M}{2}\right)^2=\sum_{i=1}^{59}a_i^2+59\left(\frac{m+M}{2}\right)^2-(m+M)\sum_{i=1}^{59}a_i\le 59\cdot\left(\frac{M-m}{2}\right)^2.$$

Koska

$$\sum_{i=1}^{59}a_i=0,$$

on

$$\sum_{i=1}^{59}a_i^2\le 59\left(\left(\frac{M-m}{2}\right)^2-\left(\frac{m+M}{2}\right)^2\right)=-59\cdot m\cdot M=2006.$$

2006.3. Todistetaan induktiolla, että jokainen astetta n oleva polynomi $P(x)$ voidaan kirjoittaa vaaditulla tavalla. Asia on selvä, kun $n=0$. Oletetaan sitten, että $P(x)$ on astetta n oleva polynomi, jonka korkeimmanasteinen termi on cx^n. Induktioaskel tulee otetuksi, jos voidaan osoittaa, että on olemassa sellaiset polynomit $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $\ldots$, $Q_k(x)$, että polynomin

$$P(x)-(Q_1(x)^3+Q_2(x)^3+\cdots+Q_k(x)^3)$$

aste on enintään $n-1$. Nyt on olemassa p niin, että $n=3p$, $n=3p+1$ tai $n=3p+2$. Ensimmäisessä tapauksessa voidaan asettaa $k=1$ ja $Q_1(x)=\sqrt[3]{c}x^k$, toisessa tapauksessa $k=3$ ja

$$Q_1(x)=\sqrt[3]{\frac{c}{6}}x^p(x-1),\quad Q_2(x)=\sqrt[3]{\frac{c}{6}}x^p(x+1),\quad Q_3(x)=-\sqrt[3]{\frac{c}{3}}x^{p+1},$$

ja kolmannessa $k=2$ ja

$$Q_1(x)=\sqrt[3]{\frac{c}{3}}x^p(x+1),\quad Q_2(x)=-\sqrt[3]{\frac{c}{3}}x^{p+1}.$$

Yksinkertainen lasku osoittaa, että kun $P(x)$:stä vähennetään $Q_i(x)$-polynomien kuutioiden summa, termi cx^n tulee vähennetyksi pois. Induktioaskel on siis otettavissa ja väite on tosi.

2006.4. Jos $a=b=c=2$, $d=e=f=0$, niin lausekkeen arvo on 8. Osoitetaan, että 8 on kysytty maksimiarvo. Geometrisen ja aritmeettisen keskiarvon välisen epäyhtälön nojalla on

$$8=\left(\frac{(a+d)+(b+e)+(c+f)}{3}\right)^3\ge(a+d)(b+e)(c+f)$$

$$=abc+bcd+cde+def+efa+fab+ace+bdf\ge abc+bcd+cde+def+efa+fab.$$

Siis $abc+bcd+cde+def+efa+fab\le 8$ ja yhtäsuuruus pätee, kun $a+d=b+e=c+f=2$ (koska $a+b+c+d+e+f=6$) ja $ace=bdf=0$. Kuusikko $(a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f)$ voidaan siis kirjoittaa muotoon $(a,\,b,\,c,\,2-a,\,2-b,\,2-c)$, ja pätee $ac(2-b)=b(2-a)(2-c)=0$. Jos $a\ne 0,\,2$, on oltava $b=0$ ja $c=0$ tai $b=2$ ja $c=2$. Samaa päätelyä jatkamalla todetaan, että maksimin tuottavat kaikki kolmikot $(a,\,b,\,c)$, jotka ovat muotoa $(t,\,0,\,0)$, $(t,\,2,\,2)$, $(0,\,t,\,0)$, $(2,\,t,\,2)$, $(0,\,0,\,t)$ ja $(2,\,2,\,t)$, missä $0\le t\le 2$.

2006.5. Osoitetaan, että $*$ on vaihdannainen. Olkoot x ja y kokonaislukuja ja $z = x * y$. Aksiooman b) nojalla $z*y = x$. Aksiooman a) nojalla nyt $z*x = z*(z*y) = y$. Käytetään vielä aksioomaa b): $y * x = (z * x) * x = z$. Siis $x * y = y * x$.

Osoitetaan vastaesimerkillä, että $*$ ei välttämättä ole liitännäinen. Olkoon $x*y = -(x+y)$. Silloin $x * (x * y) = -(x - (x + y)) = y$ ja $(x * y) * y = -(-(x + y) + y) = x$. $*$ toteuttaa siis aksioomat a) ja b). Mutta esimerkiksi $0 * (0 * 1) = -(0 - (0 + 1)) = 1$ ja $(0 * 0) * 1 = -(-(0 + 0) + 1) = -1$, joten $*$ ei ole liitännäinen.

2006.6. Osoitetaan, että kysytty maksimaalinen alkiomaarä on 32. Olkoon M jokin tehtävän mukainen lukujoukko. Ehtojen 1, 2 ja 3 nojalla jokainen M:n luku määräytyy yksikäsitteisesti luvun numeroiden joukon perusteella. Ehdon 4 perusteella jokaisella kahdella M:ään kuuluvan joukon numeroiden joukolla on yhteinen alkio. Joukolla $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on $2^6 = 64$ osajoukkoa. Jos jokin S:n osajoukko X on M:n jonkin luvun numeroiden joukko, niin komplementtijoukko $S \setminus X$ ei voi olla minkään M:n luvun numeroiden joukko. M:ssä voi olla enintään 32 alkiota. Joukolla S on yksi kuusialkioinen, kuusi viisialkioista ja $\binom{6}{4} = 15$ nelialkioista osajoukkoa, yhteensä siis 22 osajoukkoa, joissa on ainkin neljä alkiota. Jokaisella kahdella tällaisella joukolla on yhteinen alkio. Joukolla on $\binom{5}{2} = 10$ sellaista kolmialkioista osajoukkoa, jossa esiintyy luku 6. Kullakin tällaisella osajoukolla on ainakin yksi yhteinen alkio jokaisen nelialkioisen osajoukon kanssa: ellei se ole 6, niin joukoissa on yhteensä kuusi sellaista alkiota, jotka kaikki kuuluvat viisialkioiseen joukkoon $S \setminus \{6\}$. Näihin 32:een S:n osajoukkoon liittyvät luvut muodostavat 32 alkion joukon.

2006.7. Osoitetaan, että kuvia on otettu ainakin 19. Olkoon kuvia, joissa esiintyy kolme ihmistä ja siis myös kolme paria, x kappaletta, ja kuvia, joissa esiintyy kaksi ihmistä, y kappaletta. Koska jokainen pari esiintyi tasan yhdessä kuvassa, on oltava $3x + y = 45$. Jokainen vieras esiintyi parina yhdeksän muun vieraan kanssa. Koska 9 on pariton, ei ole mahdollista, että joku vieras olisi mukana vain kolmikkokuvissa. Näin ollen jokainen on ollut ainakin yhdessä parikuvassa, joten $y \geq 5$ ja $x \leq 13$. Kuvien lukumäärä on siis $x + y = 45 - 2x \geq 45 - 26 = 19$. Osoitetaan sitten, että 39 kuvaa riittää. Numeroidaan osallistujat numeroin 0, 1, 2, . . . , 9. Tarkastellaan osallistujia 1, 2, . . . , 8. Otetaan kuvat 123, 345, 567, 781. Sama pari ei esiinny missään kahdessa kuvassa; näissä kuvissa on siis 12 paria. Asetetaan osallistujat 1, 2, . . . , 8 istumaan pyöreän pöydän ympärille. Kaikki jo kuvissa olleet parit istuvat niin, että samassa kuvassa olleiden välissä istuu enintää yksi henkilö. Jos nyt valitaan pöydän ympäriltä pareja, joiden välissä on kaksi henkilöä, ja kuvataan nämä osallistujan 0 kanssa, voidaan ottaa esimerkiksi kuvat 014, 058, 027 ja 036, joissa on 12 sellaista paria, jotka eivät olleet mukana ensimmäisissä neljässä kuvassa. Pöydän ympäriltä saadaan vielä neljä paria, joiden välissä on kaksi muuta; nämä parit voidaan kuvata osallistujan 9 kanssa: 169, 259, 389, 479. Kolmikkoon 246 sisältyvät parit eivät esiinny missään aikaisemmista kuvista. Kun se liitetään mukaan, on otettu 13 kuvaa ja näissä on esiintynyt 39 paria. Loput 6 paria voidaan kuvata parikuvissa, jolloin kuvia tulee $13 + 6 = 19$.

2006.8. Olkoon laitoksessa n työntekijää. Koska $\binom{4}{3} = 4 < 6$, niin $n \geq 5$. Jos $n = 5$, on olemassa kolme työntekijää, jotka eivät muodosta salaliittoa. Heidät voidaan sijoittaa toiseen laboratorioon ja loput kaksi toiseen. Jos $n = 6$, niin kolmikkoja on $\binom{6}{3} = 20$. On olemassa kolmikko, joka ei muodosta salaliittoa ja jonka komplementtikaan ei muodosta salaliittoa. Laboratoriot voidaan muodostaa näistä kahdesta joukosta. Osoitetaan induktiolla, että jako on mahdollinen, kun $n \geq 7$. Salaliitoissa on enintään $6 \cdot 3 = 18$ työntekijäparia. Laitoksen tyäntekijöistä voidaan muodostaa $\binom{n}{2} \geq \binom{7}{2} = 21$ paria. Työnytekijöissä on siis jotkin kaksi, esimerkiksi X ja Y, jotka eivät kuulu mihinkään salaliittoon. Poistetaan joukosta Y. Induktio-oletuksen mukaan jäljelle jääneet $n-1$ työntekijää voidaan jakaa kahdeksi laboratorioksi niin, että kummassakaan ei ole yhtään salaliitto kolmikkoa. Sijoitetaan nyt Y samaan laboratorioon kuin X. Tämä ei muuta tilannetta, joten n:n työntekijän laitos on myös jaettavissa kahdeksi laboratorioksi halutulla tavalla.

2006.9. Osoitetaan, että on olemassa alkutilanteita, joista ei päästä haluttuun lopputilanteeseen. Tällainen on esimerkiksi se, jossa yhteen kärkeen sijoitetaan $\frac{4}{5}$ ja muihin $-\frac{1}{5}$. Jos siitä päästäisiin tilanteeseen, jossa kaikissa kärjissä on 0, niin alkutilanteesta, jossa yhdessä kärjessä on 1 ja muissa 0 päästäisiin samoin askelin tilanteeseen, jossa joka kärjessä olisi $\frac{1}{5}$. Mutta jälkimmäisestä alkutilanteesta lähdettäessä joka kärjessä on aina luku, joka on muotoa $\frac{k}{2^m}$, missä m on ei-negatiivinen kokonaisluku. Luku $\frac{1}{5}$ ei ole tätä muotoa.

2006.10. Tehtävässä on kahdenlaisia lukuja, "rivilukuja" eli $+$-merkkeihin liittyviä, ja "sarakelukuja" eli $-$-merkkeihin liittyviä. Käsitellään ensin rivilukuja. Tarkastellaan mielivaltaista riviä. Sivin ruuduissa on p $+$-merkkiä ja m $-$-merkkiä, $m+p \leq 17$. Tältä riviltä laskettujen rivilukujen summa on mp. Kirjoitetaan nyt jokaiseen sellaiseen ruutuun, jossa on jokin merkki, luku $\frac{mp}{m+p}$. Kaikkien rivilukujen summa on nyt sama kuin kaikkien 306 ruutuuun kirjoitettujen lukujen summa. Tarkastellaan funktiota f,

$$f(m,\,p) = \frac{mp}{m+p}, \quad m+p \leq 17.$$

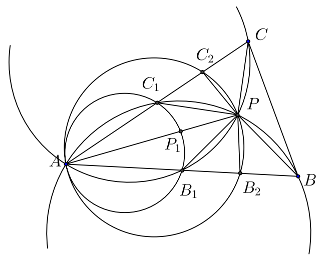
Funktio on m:n suhteen kasvava, joten jos $m + p < 17$, $f(m,\,p)$:n arvoa voidaan kasvattaa lisäämällä m:ää. Jos $m + p = 17$, niin

$$f(m,\,p) = \frac{m(17-m)}{17},$$

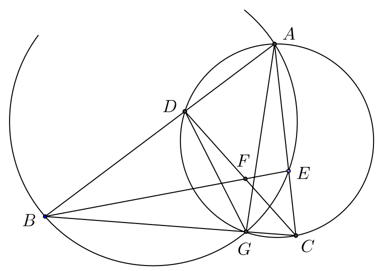
ja f maksimoituu (kokonaislukujen joukossa!), kun $m = 8$ tai $m = 9$. Silloin f saa arvon $\frac{72}{17}$. Rivilukujen summa on siis enintään $306 \cdot \frac{72}{17} = 18 \cdot 72$. Täsmälleen sama päättely osoittaa, että sarakelukujen summa on enintään $18 \cdot 72$. Tehtävässä kysytty summa on siis enintään $36 \cdot 72 = 2592$. Tämä maksimi saavutetaan selaisessa konfiguraatiossa, jossa jokaisella rivillä, joka ei ole tyhjä, on 9 $+$- ja 8 $-$-merkkiä. Tällainen asetelma saadaan esimerkiksi 18×18-ruudukosta, jonka yhdeksälle "yleistetylle" lävistäjälle merkitään $+$-merkkejä ja kahdeksalle lävistäjälle $-$-merkkejä, ja viimeinen lävistäjä jätetään tyhjäksi.

2006.11. Olkoot korkeusjanat $h_a = 12$, $h_b = 15$ ja $h_c = 20$ ja kolmion ala T. Koska $2T = ah_a = bh_b = ch_c$, niin $T = 6a$ ja $b = \frac{4}{5}a$, $c = \frac{3}{5}a$. Kolmion piirin puolikas on $p\frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right)a = \frac{6}{5}a$. Heronin kaavan nojalla $T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{36}{5^4}a^4$. Koska myös $T^2 = 36a^2$, on $a^2 = 5^4$ ja $a = 25$. Siis $T = 6a = 150$.

2006.12. Jännenelikulmiosta AB_1PC saadaan $\angle C_1CP = \angle ACP = \angle PB_1B$ ja jännenelikulmiosta $ABPC_2$ $\angle B_1BP = \angle ABP = \angle CC_1P$. Kolmiot B_1BP ja CC_1P ovat siis yhdenmuotoisia. Olkoot vielä B_2 ja C_2 janojen BB_1 ja CC_1 keskipisteet. Silloin mainitusta yhdenmuotoisuudesta seuraa $\angle B_1PB_2 = \angle CPC_2$ ja siis $\angle B_2PC_2 = \angle B_1PC$. Koska piste P on ympyrällä AB_1C, $\angle B_1PC$ ja $\angle CAB$ ovat vieruskulmia. Koska siis myös $\angle CAB$ ja $\angle B_2PC_2$ ovat vieruskulmia, nelikulmio AB_2PC_2 on jännenelikulmio, ts. P on kolmion AB_2C_2 ympärysympyrällä. Kolmioiden AB_1C_1 ja AB_2C_2 ympärysympyrät ovat homoteettisia. Homotetiakeskus on A ja homotetiasuhde $2 : 3$. Siten myös $AP_1 : AP = 2 : 3$, ja väite on todistettu.



2006.13. Koska $BC^2 > BD \cdot BA$, janalla BC on piste G, jolle pätee $BG \cdot BC = BD \cdot BA$. Kolmiot BGD ja BAC ovat tällöin yhdenmuotoiset (sks). Erityisesti $\angle BDG = \angle BAC$, joten nelikulmio $ADGC$ on jännenelikulmio. Mutta $CE \cdot CA = BC^2 - BD \cdot BA = BC \cdot (BG + CG) - BC \cdot BG = CB \cdot CG$. Tästä seuraa samoin kuin edellä, että $ABGE$ on myös jännenelikulmio. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle ADC = \angle AGC$ ja $\angle AEB = \angle AGB$. Mutta tämä merkitsee sitä, että $\angle ADC$ ja $\angle AEB$ ovat vieruskulmia, joten $ADFE$ on jännenelikulmio ja väite on todistettu.



2006.14. Valitaan pohjois- ja etälänapa P ja E niin, että mitkään kaksi pistettä eivät ole samalla leveyspiirillä eikä mikään pisteistä ole kummallakaan navalla. Piirretään jokaisen pisteen kautta leveyspiiri (siis pikkuympyrä, jonka taso on kohtisuorassa suoraa PE vastaan.) Jaetaan jokainen tällainen pikkuympyrä 2006:ksi yhteneväksi kaareksi niin, että mikään annetuista pisteistä ei ole töllaisen kaaren päätepiste. Ilmaus "yhdistetään pisteet A ja B" tarkoittaa, että piirretään A:n ja B:n kautta kulkevan isoymyrän lyhempi kaari $\overset{\frown}{AB}$. Olkoot jakopisteet $A_{i,j}$, $1 \le i \le 2006$, $1 \le j \le 2006$, missä i ilmaisee, pohjoisesta alkaen, leveyspiirin järjestysnumeron ja j pisteen järjestysnumeron leveyspiirillä. Numerointi voidaan suorittaa niin, että pisteiden $A_{i,i}$ ja $A_{i,i+1}$ välissä (mod 2006) on yksi annetuista pisteistä. Yhdistetään nyt pisteet

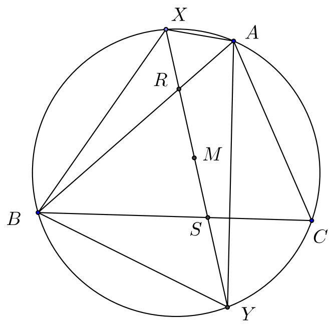
$$P,\ A_{1,1},\ A_{2,1},\ A_{3,1},\ \ldots,\ A_{2006,1},\ E$$
$$P,\ A_{1,2},\ A_{2,2},\ A_{3,2},\ \ldots,\ A_{2006,2},\ E$$

$$\vdots$$

$$P,\ A_{1,2006},\ A_{2,2006},\ A_{3,2006},\ \ldots,\ A_{2006,2006},\ E$$

Syntyneet 2006 isoympyränkaarimurtoviivaa jakavat pallon pinnan 2006 yhtenevään alueeseen (ne voidaan kuvata toisilleen kierroilla suoran PE ympäri). Jokaisessa alueessa on tasan yksi annetuista pisteistä.

2006.15. Leikatkoon t AB:n pisteessä R ja AC:n pisteessä S. Koska $\angle XBA = \angle XYA$, kolmiot BRX ja YRA ovat yhdenmuotoiset. Siis



$$\frac{AY}{BX} = \frac{RY}{BR}.$$

Kolmioiden BYR ja XAR yhdenmuotoisuudesta seuraa vastaavasti

$$\frac{AX}{BY} = \frac{AR}{RY}.$$

Siis

$$\frac{AX \cdot AY}{BX \cdot BY} = \frac{AR}{BR}.$$

Samoin osoitetaan, että

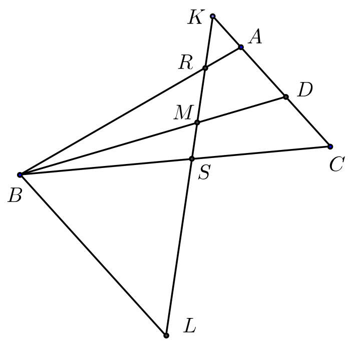
$$\frac{CX \cdot CY}{BX \cdot BY} = \frac{CS}{BS}.$$

On siis osoitettava, että

$$\frac{AR}{BR} + \frac{CS}{BS} = 1.$$

Jos $RS \| AC$, molemmat yhteenlaskettavat ovat $= \frac{1}{2}$ (koska RS kulkee mediaanien leikkauspisteen kautta).

Jos RS ei ole AC:n suuntainen, piirretään B:n kautta AC:n suuntainen suora. Leikatkoon RS sen pisteessä L ja suoran AC pisteessä K ja olkoon D janan AC keskipiste. Kolmiot MDK ja MBL ovat yhdenmuotoisia suhteessa $1:2$, joten $BL = 2 \cdot KD$. Toisaalta yhdenmuotoisista kolmioista RAK, RBL ja SCK, SBL saadaan



$$\frac{AR}{RB} = \frac{AK}{BL}, \quad \frac{CS}{SB} = \frac{CK}{BL} = \frac{AK + 2 \cdot AD}{BL}.$$

Väite saadaan, kun kaksi edellistä yhtälöä lasketaan puolittain yhteen.

2006.16. Oletetaan, että tehtävässä esitetyt neljä lukua olisivat olemassa. Koska neliöluvut ovat modulo 4 joko nollia tai ykkösiä ja $2006 \equiv 2 \mod 4$, niin jokaisen kahden näistä neljästä luvusta tulo on joko $\equiv 2$ tai $\equiv 3 \mod 4$. Lukujen joukossa on oltava ainakin kolme paritonta (koska kahden parillisen luvun tulo on $\equiv 0 \mod 4$). Kolmesta parittomasta luvusta ainakin kaksi on kongruentteja mod 4. Näiden tulo on kongruentti mod 4 joko luvun $1^1 = 1$ tai $3^2 = 9 \equiv 1$ kanssa. Vaadittuja lukuja ei siis ole olemassa.

2006.17. Osoitetaan, että $n = 1$ on ainoa tehtävän ehdon täyttävä kokonaisluku. Havaitaan ensin, että jos $n^2|3^n + 1$, niin n on pariton. Jos nimittäin n on parillinen, niin $3^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 = 2 \mod 4$, mutta $n^2 \equiv 0 \mod 4$. Jos nyt $n^2|3^n + 1$, niin n:n pienin alkutekijä p on pariton ja > 3. Siis $p \geq 5$. Koska $p|3^n + 1$, niin $p|3^{2n} - 1$. Okoon nyt k pienin kokonaisluku, jolle $p|3^k - 1$. Silloin $k|2n$. (Koska p on tekijänä luvussa $3^{2n} - 3^k + 3^k - 1 = 3^k(3^{2n-k} - 1) + 3^k - 1$, se on tekijänä luvussa $3^{2n-k} - 1$; jos $2n - k > k$, p on myös tekijänä luvussa $2n - 2k$ jne.; äärellisen monen askeleen jälkeen päädytään tilanteeseen $2n - tk = k$.) Toisaalta Fermat'n pienen lauseen perusteella $p|3^{p-1} - 1$, joten samoin kuin edellä, voidaan päätellä $k|p - 1$. Koska $p \geq 5$, p ei ole lukujen $3^1 - 1 = 2$ tai $3^2 - 1 = 8$ tekijä. Siis $k \geq 3$. Niinpä s.y.t.$(2n, p-1) \geq k \geq 3$. Edelleen s.y.t.$(n, p-1) > 1$. Luvulla n on siis varmasti pienempiä tekijöitä ja myös alkutekijöitä kuin p. Ristiriita todistaa, että jos $n > 1$, niin n^2 ei ole luvun $3^n + 1$ tekijä.

2006.18. Olkoon b_n luvun n ja c_n luvun n^n viimeinen numero. Jos $b_n = 0, 1, 5, 6$, niin myös $c_n = a_n = 0, 1, 5, 6$. Jos $b_n = 9$, niin n^n on pariton; koska 9^2 päättyy ykköseen, niin $a_n = 9$. Jos $b_n = 4$, niin n^n on parillinen ja $a_n = 6$. Jos b_n on 2 tai 8, niin n^n on jaollinen neljällä. Tarkastamalla lukujen 2^k ja 8^k viimeisten numeroiden jaksoja huomataan, että tällöin $a_n = 6$. Jäljellä ovat vielä $b_n = 3$ ja $b_n = 7$. Luvun 3^k viimeisen numeron jakso on 3, 9, 7, 1, ... ja luvun 7^k viimeisen numeron jakso on 7, 9, 3, 1, 7, ... Jos $b_n = 3$ tai $b_n = 7$, niin $n \equiv 1 \mod 4$ tai $n \equiv -1 \mod 4$. Edellisessä tapauksessa $n^n \equiv 1 \mod 4$, jälkimmäisessä tapauksessa $n^n \equiv -1 \mod 4$. Jos $b_n = 3$ ja $n \equiv 1 \mod 4$, niin $a_n = 3$ ja jos $n \equiv -1 \mod 4$, niin $a_n = 7$. Samoin, jos $b_n = 7$ ja $n \equiv 1 \mod 4$, niin $a_n = 7$ ja jos $n \equiv -1 \mod 4$, niin $a_n = 3$. Koska 3:een (tai 7:ään) päättyvät luvut on $\equiv 3$ tai $\equiv 13 \mod 20$ ($\equiv 7$ tai $\equiv 17 \mod 20$), a_n saa vuorotelle arvot 7 ja 3, kun $b_n = 3$ ja vuortellen arvot 3 ja 7, kun $b_n = 7$. Kun edellä annetut tiedot kerätään yhteen, nähdään, että a_n:llä on jakso, jonka pituus on 20, ja tämä on 1, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 6, 9, 0; tätä lyhempiä jaksoja ei ole.

2006.19. Todistetaan, että tällaisia jonoja on olemassa. Itse asiassa jonon voi aloittaa mistä tahansa positiivisesta kokonaisluvusta, sillä pätee seuraava tulos: Jos $a_1, \ldots, a_k$ ovat sellaiset positiiviset kokonaisluvut, että $n^2|(a_{i+1} + \cdots + a_{i+n})$ kaikilla $n \leq k$ ja $i \leq k - n$, niin on olemassa a_{k+1} niin, että $n^2|(a_{i+1} + \cdots + a_{i+n})$ kaikilla $n \leq k + 1$ ja $i \leq k + 1 - n$. Todistetaan tämä. Riittää, että osoitetaan luvun $x = a_{k+1}$ voitavan valita niin, että $xequiv - (a_{k-n+2} + \cdots + a_k) \mod n^2$ kaikilla $n \leq k - 1$. Luvun x on siis toteutettava $k + 1$ kongruenssiyhtälöä. Osoitetaan, että osa näistä on tarpeettomia. Jos p on alkuluku ja m on sellainen positiivinen kokonaisluku, että $p^m \leq k + 1$ ja x toteuttaa kongruenssiyhtälön, kun modulina on p^{2m}, niin x toteuttaa myös sen kongruenssiyhtälön, jossa moduli on $p^{2(m-1)}$. Ryhmitellään luvut $a_1, \ldots, a_k$, x p^{m-1}:n pituisiin jaksoihin. Lukujen $a_1, \ldots, a_k$ ominaisuuden perusteella kunkin jakson, viimeistä lukuun ottamatta, summa on jaollinen $p^{2(m-1)}$:llä koska kaikkien lukujen summa on jaollinen p^{2m}:llä, myös viimeisen jakson lukujen summa ja siten kaikkien lukujen summa on jaollinen $p^{2(m-1)}$:llä. Todetaan sitten, että jos c ja d ovat yhteistekijättömiä ja kongruenssiyhtälä toteutuu moduleilla c^2 ja d^2, se toteutuu myös modulilla $(cd)^2$. Tämä nähdään ryhmittämällä viimeiset cd luvuista $a_1, \ldots, a_k$, x d:ksi c:n peräkkäisen luvun jonoksi ja c:ksi d:n peräkkäisen luvun jonoksi. Kun käytetään hyväksi lukujen $a_1, \ldots, a_k$ ominaisuutta ja oletusta, saadaan, että viimeisten cd:n luvun summa on jaollinen sekä c^2:lla että d^2:lla; koska c:llä ja d:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, summa on jaollinen myös $(cd)^2$:lla. – Edelliset huomiot osoittavat, että ratkaistavaksi jää vain sellaisia kongruenssiyhtälöitä, joiden moduli on sellaisen alkuluvun p sellainen m:s potenssi, että $p^m \le k+1 < p^{m+1}$. Kiinalaisen jäännöslauseen perusteella kongruenssiyhtälöryhmällä on ratkaisu. (Jos $a_1 = 1$, jono alkaa 1, 3, 5, 55, 561, 851, 63253, 110055,. . . .)

2006.20. Koska $1000 \equiv 1 \bmod 37$ $(9 \cdot 3 \cdot 37 = 9 \cdot 111 = 999)$, niin luku $x = a_n 10^{3n} + a_{n-1}10^{3(n-1)} + \cdots + a_1 10^3 + a_0$ on jaollinen 37:llä jos ja vain jos $a_a + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ on jaollinen 37:llä. 12-numeroinen luku $A = 111\,111\,111\,111$ on siten jaollinen 37:llä. Olkoon N tehtävässä ilmoitettu 12-numeroinen luku. Oletetaan, että sen numeroiden summa on 76. Silloin $N - A$ on jaollinen 37:llä ja $N - A$ kirjoitetaan pelkästään numeroilla 0, 4 ja 8 ja sen numeroiden summa on $76 - 12 = 64$. $N - A$ on siten jaollinen neljällä, ja $M = \dfrac{1}{4}(N - A)$ on 37:llä jaollinen luku, joka kirjoitetaan vain numeroilla 0, 1 ja 2. M:n numeroiden summa on 16. Ryhmitellään M:n numerot kolmen ryhmiin; olkoon S näiden neljän luvun summa. Edellä sanotun perusteella S on jaollinen 37:llä. Summassa on enintään numero 8 ja summan numeroiden summa on edelleen 16, koska yhteenlaskussa ei tarvita muistinumeroita. Nyt $S \equiv 16 \equiv 1 \bmod 3$. Koska $37 \equiv 1 \bmod 3$, nähdään, että $S/37 \equiv 1 \bmod 3$. Siis S on muotoa $37(3k+1)$ oleva kolminumeroinen luku. Nämä luvut ovat 37, 128, 259, 370, 481, 592, 703, 814 ja 925. Jokaisessa on kuitenkin joko numero 9 tai numeroiden summa, joka ei ole 16. Ristiriita todistaa väitteen.

2007.1. Tehtävän summa S_n on suurin, kun $P_1 = \{1, 2\}$, $P_2 = \{3, 4\}$ jne.: jos pareissa olisi $\{1, k\}$, $k > 2$ ja $\{2, m\}$, $m > 2$, olisi

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{km} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) > 0,$$

joten suuurimmassa summassa yhden parin on oltava $\{1, 2\}$; samoin nähdään, että suurimmassa summassa on pari $\{3, 4\}$ jne. Siis

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \le \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Osoitetaan induktiolla, että $S_n < 1 + \dfrac{1}{2n+1}$ kaikilla n. Ensinnäkin $S_1 < 1 - \dfrac{1}{3}$. Ja jos $S_n < 1 - \dfrac{1}{2n+1}$, niin

$$S_{n+1} = S_n + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) < 1 - \frac{1}{2n+3}.$$

2007.2. Olkoon (a_n) tehtävän mukainen eksakti lukujono. Silloin $a_{2n}^2 = a_{2n-2}^2 + a_{4n-2}a_2 = a_{2n-2}^2$. Koska $a_2 = 0$, saadaan induktiolla, että $a_{2n} = 0$ kaikilla $n > 0$. Osoitetaan, että $a_{2n+1} = (-1)^n$; tällöin $a_{2007} = a_{2\cdot 1003+1} = -1$. Selvästi $-1 = a_2^2 - a_1^2 = a_3a_1 = a_3$. Koska $0 = a_{2n}^2 - a_1^2 = a_{2n+1}a_{2n-1}$, on $a_{2n+1}a_{2n-1} = -1$. Jonon peräkkäiset paritonindeksiset termit ovat siten vuorotellen $+1$ ja -1. On vielä todistettava, että jono (a_n), jossa $a_{2k} = 0$ ja $a_n = 1$, kun $n \equiv 1 \bmod 4$, $a_n = -1$, kun $n \equiv -1 \bmod 4$ todella on eksakti. Jos m ja n ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia, niin $a_n^2 - a_m^2 = 0$ ja $m - n$ ja $m + n$ ovat molemmat parillisia, joten myös $a_{m+n}a_{m-n} = 0$. Jos n on pariton ja m parillinen, niin $a_n^2 - a_m^2 = 1$ ja toisaalta $n - m \equiv n + m \bmod 4$. Silloin $n - m$ ja $n + m$ ovat parittomia ja a_{n-m} ja a_{n+m} ovat samanmerkkisiä, joten $a_{n+m}a_{n-m} = 1$. Jos viimein n on parillinen ja m pariton, niin $(n + m) - (n - m) \equiv 2 \bmod 4$; luvuista a_{n+m} ja a_{n-m} toinen on $+1$ ja toinen -1. Siis $a_n^2 - a_m^2 = -1$ ja $a_{n+m}a_{n-m} = -1$. Määritelty jono toteuttaa siis kaikilla indeksien yhdistelmillä eksaktisuusehdon.

2007.3. Olkoon $P(x) = G(x) - F(x)$. Silloin $P(x) \geq 0$ kaikilla x ja P:n aste on $\leq 2n + 1$. Lisäksi $P(x) = 0$, kun $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Koska $P(x) \geq 0$, sen jokaisen nollakohdan kertaluku on parillinen. Kun tämä yhdistetään tietoon P:n asteesta ja nollakohtien lukumäärästä, nähdään, että

$$P(x) = G(x) - F(x) = a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \cdots (x - x_n)^2,$$

missä a on ei-negatiivinen vakio. Aivan samoin päätellään, että

$$H(x) - F(x) = b(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \cdots (x - x_n)^2,$$

missä b on ei-negatiivinen vakio. Mutta $F(x) + H(x) - 2G(x) = H(x) - F(x) + 2(F(x) - G(x)) = (b - 2a)(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \cdots (x - x_n)^2$. Kun tähän sijoitetaan $x = x_0$, saadaan $b - 2a = 0$. Siis $F(x) + H(x) - 2G(x) = 0$ kaikilla x, ja väite on todistettu.

2007.4. Todistettavan epäyhtälön vasemman puolen tekijät voidaan kirjoittaa näin:

$$2S + n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1) + 1 + 1 + \cdots + 1,$$

$$2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$$
$$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1.$$

Tarkastellaan $3n$-vektoreita

$$\mathbf{v} = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \ldots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_1}, 1, \ldots, 1)$$

ja

$$\mathbf{w} = (\sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \ldots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_1}, \sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_1a_2}, \sqrt{a_2a_3}, \ldots, \sqrt{a_na_1}).$$

Aikaisemman perusteella nähdään, että $|\mathbf{v}|^2 = 2S + n$ ja $|\mathbf{w}|^2 = 2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$. Lisäksi skalaaritulo

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 3\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_ia_{i+1}}$$

(kun $a_{n+1} = a_1$). Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö perusteella

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 \leq |\mathbf{v}|^2|\mathbf{w}|^2.$$

Tämä on yhtäpitävää väitteen kanssa.

2007.5. Sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön $y = 1$. Saadaan $f(x) = f(x)f(-1) - f(x) + f(1)$ eli $(2 - f(-1))f(x) = f(1)$. Koska f ei ole vakiofunktio, on oltava $f(-1) = 2$ ja $f(1) = 0$. Sijoiteaan nyt ensimmäiseen yhtälöön $x = -t$ ja $y = -1$. Saadaan $f(t) = f(-t)f(1) - f(-t) + f(-1) = -f(-t) + 2$. Siis $f(t) - 1 = -(f(-t) - 1)$. Jos funktio g, $g(x) = f(x) - 1$ on siis pariton funktio. Kun ensimmäinen yhtälö kirjoitetaan funktion g avulla, saadaan $g(xy) = 1 - f(xy) = 1 - ((1 - g(x))(1 - g(-y)) - (1 - g(x)) + (1 - g(y))) = -g(x)g(-y) + g(-y) + g(y) = g(x)g(y)$. Tehtävän jälkimmäisen yhtälön perusteella saadaan

$$1 - g(1 - g(x)) = f(f(x)) = \frac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1 - g\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{g(x) - 1}.$$

Siis

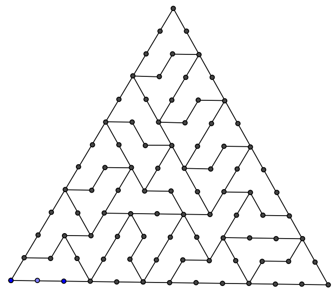
$$g(1 - g(x)) = \frac{1}{1 - g(x)}.$$

Koska funktio f saa kaikki reaaliarvot paitsi arvoa 1, g saa kaikki reaaliarvot paitsi arvoa 0. Jos $y \neq 1$, niin jollain x on $y = 1 - g(x)$ ja $g(y) = \dfrac{1}{y}$. Silloin myös $f(x) = 1 - g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Helposti nähdään, että $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ toteuttaa tehtävän yhtälöt.

2007.6. Osoitetaan ensin, että jos luvut $1, 2, \ldots, n$ on kirjoitettu muuhun kuin aidosti nousevaan järjestykseen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, niin joillain $1 \le i < j \le n$ on $a_i = a_j + 1$. Tämän todistamiseksi tarkastellaan pienintä indeksiä i, jolle $a_i \neq i$. Silloin $a_i = k > i$. Jos nyt $k - 1 = a_j$, niin $a_j \geq i$. Kaikilla $j' < i$ on $a_{j'} = j' < i$. Siis $j > i$. i ja j kelpaavat väitetyksi indeksipariksi. Nyt Freddy valitsee ensimmäiseksi listaltaan tällaisen parin (i, j). Lukujen i ja j vaihtaminen keskenään ei muuta muiden lukujen keskinäistä suuruusjärjestystä. Se ei myöskään muuta i:nnen ja j:nnen luvun suuruusjärjestystä muihin lukuihin nähden, koska verrattuna mihinkä tahansa muuhun listan lukuun a_i ja a_j ovat joko molemmat pienempiä tai molemmat suurempia. Kun Freddy on poistanut parin (i, j) listaltaan, tilanne on muiden lukujen suhteen säilynyt ennallaan, ja Freddy voi toistaa prosessin. Kun Freddy on käynyt listansa kokonaan läpi ja poistanut kaikki sillä olleet parit, luvut ovat suuruusjärjestyksessä.

2007.7. Jos tasasivuisen kolmion sivun pituus on n, se voidaan jakaa sivujen suuntaisilla suorilla n^2:ksi tasasivuiseksi kolmioksi, joiden sivun pituus on 1. Koska virityksessä on 6 pikkukolmiota, välttämätön ehto tehtävässä vaaditun jaon onnistumiselle on, että n^2 on jaollinen 6:lla. Tällöin myös luvun n on oltava kuudella jaollinen. Jos pikkukolmiot väritetään ”šakkilaudan tapaan”, niin että kolmiot ovat valkoisia ja mustia, ja kolmiot, joilla on yhteinen sivu, ovat erivärisiä, niin virityksessä on joko 2 tai 4 mustaa pikkukolmiota. Jos iso kolmio väritetään niin, että ne pikkukolmiot, joiden yksi sivu on osa ison kolmion reunaa, niin mustia kolmioita on

$$n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$



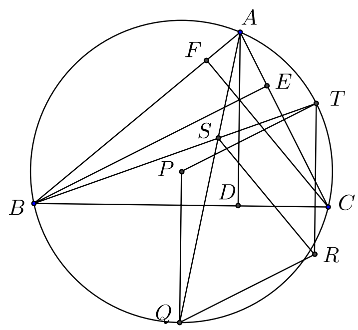
kappaletta. Jos n on jaollinen kuudella, mutta ei 12:lla, siis jos $n = 12k + 6$, niin mustia pikkukolmioita on $(6k + 3)(12k + 7)$ kappaletta, eli pariton määrä. Välttämätön ehto jaon onnistumiselle on siis $12|n$. Tämä on myös riittävä ehto. Jos $12|n$, n-sivuinen kolmio voidaan jakaa tasasivuisiksi kolmioiksi, joiden sivu on 12, ja tällainen voidaan aina jakaa virityksiin, kuten oheinen kuva osoittaa.

2007.8. Liitetään jokaiseen joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ viisialkioiseen osajoukkoon ilmeisellä tavalla jono $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jonka viisi jäsentä on ykkösiä ja muut nollia. Eristämättömiä viisialkioisia osajoukkoja tulevat vastamaan sellaiset jonot, joissa kaksi ykköstä on peräkkäin ja loput kolme ykköstä ovat peräkkäin. Tällaisten jonojen lukumäärä on sama, kuin sellaisten jonojen $b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$, missä yksi b_i on kaksi ja yksi b_i on kolme, ja muut alkiot ovat nollia. Tällaisten jonojen lukumäärä on $(n-3)(n-4)$. Mutta ne jonot, joissa beräkkäiset b_i ja b_j ovat 2 ja 3 tai 3 ja 2 liittyvät samaan eristämättömään osajoukkoon. Tällaiset jonot on siis laskettu kahdesti. Näitä jonoja on $n-4$ kappaletta. Eristämättömiä osajoukkoja on siis $(n-3)(n-4) - (n-4) = (n-4)^2$ kappaletta.

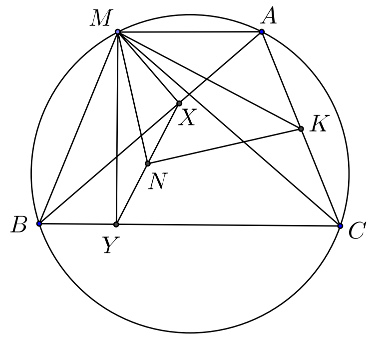
2007.9. Olkoon a jokin yhteisön jäsen ja olkoon A a:n ehdokkaiden muodostama hallitus. Jos A:han kuuluu ainakin yksi jokaisen yhteisön jäsenen halitusehdokkaista, kaikki ovat tyytyväisiä. Elleivät kaikki ole tyytyväisiä, on olemassa yhteisön jäsen b, jonka hallituskandidaattien joukon B ja joukon A leikkaus on tyhjä. Jaetaan nyt $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, missä A_1, A_2, B_1 ja B_2 ovat kaikki viidestä henkilöstä muodostuvia. Silloin ainakin yksi joukoista $C_1 = A_1 \cup B_1$, $C_2 = A_2 \cup B_1$, $C_3 = A_1 \cup B_2$, $C_4 = A_2 \cup B_2$ tyydyttää kaikkia yhteisön jäseniä. Ellei näin ole, on olemassa yhteisön jäsenet x_1, x_2, x_3, x_4, niin että x_i ei ole tyytyväinen C_i:hin, $i = 1, 2, 3, 4$. Nyt ei ole sellaista kahdesta jäsenestä koostuvaa hallitusta, johon kaikki kuusi jäsentä a, b, x_1, x_2, x_3, x_4 olisivat tyytyväisiä. Jos $\{x, y\}$ olisi tällainen, niin $\{x, y\}$ sisältyisi tasan yhteen joukoista C_i, mutta koska C_i ei tyydytä x_i:tä, kumpikaan x:stä ja y:stä ei kuulu C_i:hin. Ristiriita, siis jokin joukoista C_i on kaikkia yhteisön jseniä tyydyttävä hallitus.

2007.10. Osoitetaan, että tehtävässä esitetty menettely ei ole mahdollinen. Todetaan ansin, että laudalla, jossa on tasan 16 mustaa ruutua, on aina ainakin yksi 2×2-neliö, jonka ruuduista tasan yksi on musta. Koska ruudukossa on 18 riviä, ainakin jotkin rivit ovat kokonaan alkoisia. Jokin kokonaan valkoinen rivi on jonki ei kokonaan valkoisen rivin vieressä. Tässä ei-valkoisessa rivissä on enintään 16 mustaa ruutua, joten siinä on valkoisiakin ruutuja. Yhdestä mustasta ja sen viereisestä valkoisesta ja viereisen kokonaan valkoisen rivin kahdesta ruudusta syntyy 2×2-neliö, jossa on tasan yksi musta ruutu. Mutta jokainen operaatio, jossa jonkin rivin tai sarakeen kaikkien ruutujen väri muutetaan päinvastaiseksi, säilyttää tämän 2×2-neliön mustien ruutujen lukumäärän parillisuuden tai parittomuuden. Koska alkuaan neliössä on parillinen määrä (0) mustia ruutuja, siinä ei koskaan voi olla tasan yhtä mustaa ruutua.

2007.11. Piste Q puolittaa kolmion ABC ympärysympyrän kaaren $\overset{\frown}{BC}$. Tästä seuraa, että AQ on kulman $\angle BAC$ puolittaja. Koska $QR \perp AC$ ka $RS \perp AB$, kulman $\angle QRS$ puolittaja on kohtisuorassa kulman $\angle BAC$ puolittajaa vastaan. Kolmio RSQ on tasakylkinen, joten kulman $\angle QRS$ puolittaja on kohtisuorassa kantaa SQ vastaan. Mutta tästä seuraa, että SQ on kulman $\angle BAC$ puolittajan suuntainen. Koska Q on tällä puolittajalla, SQ on myös, ja erityisesti S on $\angle BAC$:n puolittajan piste. Täydennetään nyt PQR suunnikkaaksi $PQRT$. Nyt piste T puolittaa ABC:n ympärysympyrän kaaren $\overset{\frown}{CA}$, joten BT on kulman $\angle ABC$ puolittaja. Kulman $\angle SRT$ kyljet ovat kohtisuorassa kulman $\angle ABC$ kylkiä vastaan ja kulman $\angle SRT$ puolittaja on kohtisuorassa ST:tä vastaan. Samoin kuin edellä, nähdään että S on kulman $\angle ABC$ puolittajalla. S on siis kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste eli kolmion sisäympyrän keskipiste.

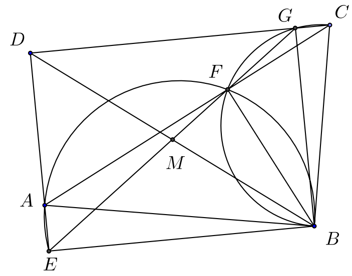


2007.12. Tarkastellaan kolmioita MCA ja MYX. Koska $MBYX$ ja $MBCA$ ovat jännenelikulmioita ja $\angle MBY = \angle MBC$, niin $\angle MAC = \angle MXY$. Koska $MY \perp BC$ ja $MX \perp AB$, $\angle XMY = \angle ABC = \angle AMC$. Kolmiot MCA ja MYX ovat yhdenmuotoisia (kk). MK ja MN ovat näiden kolmioiden keskijanoja, joten $\angle NMY = \angle KMC$. Siis $\angle YMC = \angle NMK$. Lisäksi keskijanojen suhde $MN : MK$ on sama kuin vastinsivujen suhde $MY : MC$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot MNK ja MYC ovat yhdenmuotoisia (sks). Koska $\angle MYC$ on suora, myös $\angle MNK$ on suora.

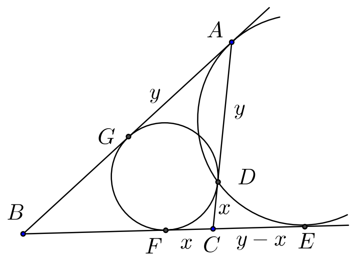


2007.13. Jos suorat ovat kaikki yhdensuuntaisia, niin tehtävän mukainen murtoviiva on helppo muodostaa mihin tahansa sellaiseen tasoon, joka on kohtisuorassa jokaista suoraa $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vastaan. Ellei näin ole, niin olkoon suorien t_i ja t_{i+1} $(t_1 = t_{k+1})$ välinen terävää tai suora kulma α_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Kaikki kulmat eivät ole $= 0$, joten $0 \le \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_k < 1$. Olkoon P_{k+1} pisteen P_k kohtisuora projektio suoralla t_1. On osoitettava, että P_1 voidaan valita niin, että $P_{k+1} = P_1$. Annetaan pisteen P_1 liikkua pitkin suoraa t_1 nopeudella v. Silloin P_2 liikkuu pitkin suoraa t_2 nopeudella $v\cos\alpha_1$, P_3 pitkin suoraa t_3 nopeudella $v\cos\alpha_1\cos\alpha_2$ ja viimein P_{k+1} pitkin suoraa t_1 nopeudella $v\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots\cos\alpha_k$. Koska pisteet P_1 ja P_{k+1} liikkuvat pitkin samaa suoraa eri nopeudella, ne kohtaavat toisensa jonain hetkenä.

2007.14. Olkoon M janan BD keskipiste ja G suorien EF ja DC leikkauspiste. Koska $BE \| DC$, kolmioiden EBM ja GDM vastinkulmat ovat yhtä suuria. Koska $MD = MB$, kolmiot ovat yhteneviä (ksk tai kks). Siis $EB = DG$, ja $EBGD$ on suorakaide. Koska siis $\angle BGC$ on suora, nelikulmio $BCGF$ on jännenelikulmio. Nelikulmiossa $AEBF$ on myös kaksi suoraa kulmaa, joten sekin on jännenelikulmio. Kehäkulmalauseen ja ristikulmien yhtäsuuruuden perusteella $\angle CBG = \angle CFG = \angle AFE = \angle ABE$. Koska $\angle EBG$ on suora, on myös $\angle ABC = \angle EBG - \angle ABE + \angle CBG$ suora. Koska $\angle CDA$ on suora, $ABCD$ on jännenelikulmio.



2007.15. Sivutkoon kolmion ABC sisäympyrä sivua AB pisteessä G ja sivua BC pisteessä F. Olkoon toinen tehtävän ympyrä Γ; piste, jossa Γ sivuaa suoraa BC olkoon E. Olkoon vielä $DC = x$ ja $AD = y$. Silloin $AG = y$, $FC = x$, $FE = AG = y$ ja $CE = y - x$. Lasketaan pisteen C potenssi ympyrän Γ suhteen sekantin CDA ja tangentin CE avulla. Saadaan $x(x+y) = (y-x)^2$, josta $3xy = y^2$ ja $3x = y$. Kysytty suhde on siis 3.



2007.16. Murtoluvut a ja b voidaan tehdä samannimisiksi: $a = \dfrac{m}{k}$, $b = \dfrac{n}{k}$; k voidaan valita niin, että lukujen m, n ja k suurin yhteinen tekijä on 1. Oletuksen mukaan

$$s = \frac{m+n}{k} = \frac{m^2+n^2}{k^2},$$

eli

$$(m+n)k = m^2 + n^2. \tag{1}$$

Jos nyt jokin alkuluku on k:n ja m:n tekijä, se on myös n:n tekijä ja jos jokin alkuluku on k:n ja n:n tekijä, se on myösn m:n tekijä. Koska s.y.t.$(k,\ m,\ n) = 1$, on oltava s.y.t.$(k,\ m) =$ s.y.t.$(k,\ n) = 1$. Jos s kirjoitetaan supisteussa muodossa olevaksi murtoluvuksi, niin tämän murtoluvun nimittäjä on k:n tekijä. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan, että 2 ja 3 eivät voi olla k:n tekijöitä. Jos $3|k$, niin m ja n ovat jaottomia kolmella. Silloin $m^2 \equiv n^2 \equiv 1 \bmod 3$. Yhtälön (1) vasen puoli on kolmella jaollinen ja oikea puoli kolmella jaoton. Jos $2|k$, niin m ja n ovat parittomia. Silloin $m+n$ on parillinen ja yhtälön (1) vasen puoli on jaollinen neljällä. Mutta $m^2 + n^2 \equiv 1 + 1 = 2 \bmod 4$. Oletus, että s.y.t.$(k,\ 6) > 1$ johti siis ristiriitaan ja oli väärä.

2007.17. Olkoon $x = dx'$, $y = dy'$ ja $z = dz'$. Silloin

$$\begin{aligned} n = \frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x} &= \frac{d^2x'z'(dx'+1) + d^2y'x'(dy'+1) + d^2y'z'(dz'+1)}{d^3x'y'z'} \\ &= \frac{d^3(x'^2z' + x'y'^2 + y'z'^2) + d^2(x'z' + x'y' + y'z')}{d^3x'y'z'}. \end{aligned}$$

Koska n on kokonaisluku, d^3 on osoittajan tekijä, joten d on luvun

$$x'z' + x'y' + y'z' = \frac{xz + xy + yz}{d^2}$$

tekijä. Siis $d^3 \leq xy + yz + zy$, eli väite on tosi.

2007.18. Oletetaan, että kokonaisluvut x, y, z, t toteuttavat yhtälön $x^2+y^2-3z^2-3t^2 = 0$; luvut voidaan vielä valita niin, että x, y, z, t nelikko minimoi suureen $x^2+y^2+z^2+t^2$ kaikkien yhtälön toteuttavien nelikkojen joukossa. Silloin x^2+y^2 on kolmella jaollinen; koska neliöt ovat joko $\equiv 0$ tai $\equiv 1 \bmod 3$, lukujen x ja y on molempien oltava kolmella jaollisia: $x = 3x'$, $y = 3y'$. Mutta silloin $3(z^2+t^2)$ on jaollinen 9:llä ja z^2+t^2 on jaollinen kolmella. Mutta tämä on mahdollista vain, jos z ja t ovat molemmat jaollisia kolmella: $z = 3z'$, $t = 3t'$. Mutta nyt $x'^2+y'^2-3z'^2-3t'^2 = 0$, mikä on mahdollista vain, jos $x^2+y^2+z^2+t^2 = x'^2+y'^2+z'^2+t'^2 = 0$. Vastaus tehtävän kysymykseen on siis ”ei”.

2007.19. Oletetaan, että kieroutuneita lukuja on äärettömän paljon. Silloin on olemassa kieroutunut luku, jossa on ainakin $10k+1$ numeroa. Olkoot c_1, c_2, $\ldots$, c_{10+1} tämän luvun peräkkäisiä numeroita. Silloin k-numeroiset luvut

$$\begin{aligned} a &= c_1 10^{k-1} + c_2 10^{k-2} + \cdots + 10c_{k-1} + c_k, \\ b &= c_2 10^{k-1} + c_3 10^{k-2} + \cdots + 10c_k + c_{k+1}, \end{aligned}$$

ovat r:llä jaollisia samoin kuin erotus $10a - b = c_1 10^k - c_{k-1}$. Jos merkitään $d_i = c_{ki+1}$, $i = 0, 1, \ldots, 10$, niin voidaan päätellä samoin kuin edellä, että luvut $10^k d_i - d_{i+1}$ ovat jaollsia r:llä, kun $i = 0, 1, \ldots, 9$. Koska d_0, d_1, $\ldots$, d_{10} on 11:n numeron jono, jotkin kaksi luvuista d_i ovat samoja. Siis joillain i ja j luvut d_1, d_2, $\ldots$, d_{j-1} ovat kaikki eri suuria, mutta $d_j = d_i$. Nyt summa

$$\begin{aligned} &(10^k d_i - d_{i+1}) + (10^k d_{i+1} - d_{i+2}) + \cdots + (10^k d_{j-1} - d_j) \\ &= (10^k d_i - d_{i+1}) + (10^k d_{i+1} - d_{i+2}) + \cdots + (10^k d_{j-1} - d_i) = (10^k - 1)(d_i + d_{i+1} + \cdots + d_{j-1}) \end{aligned}$$

on jaollinen r:llä. Mutta $d_i + \cdots + d_{j+1} \leq 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$. Koska r:n alkutekijät ovat suurempia kuin 50, $10^k - 1$ on jaollinen r:llä. $10^k - 1$ on siis kieroutunut.

2007.20. Väite tulee todistetuksi, jos jokaiselle alkuluvulle p korkein p:n potenssi, jolla $ab(a-b)$ on jaollinen, on p^{3m} jollain $m \geq 0$. Olkoon siis p alkuluku; olkoot p^k ja p^n korkeimmat p:n potenssit, joilla p^k on a:n tekijä p^n on b:n tekijä. Jos $k = n$, niin $ab(a-b)$ on jaollinen luvulla p^{3k}, mutta a^3+b^3+ab on jaollinen enintään p^{2k}:lla. Tämä on mahdollista vain, jos $k = 0$. Olkoon sitten $k > n$. Silloin $ab(a-b)$ on jaollinen ainakin p^{k+2n}:llä. Luvun a^3+b^3+ab yhteenlaskettavat ovat jaollisia p^{3k}:lla, p^{3n}:llä ja p^{k+n}:llä. Nyt $3n < k+2n$ ja $k+n < k+2n$. Jos $3n \neq k+n$, summa ei voi olla jaollinen p^{k+2n}:llä. Jaollisuus voi toteutua, jos $3n = k+n$ (koska b^3+ab voi tällöin olla jaollinen korkeammalla p:n potenssilla). Jaollisuus voi siis toteutua vain, jos $k = 2n$. Silloin ab on jaollinen luvulla $p^{2n+n} = p^{3n}$.

2008.1. Merkitään $q(x) = p(x) - x$. Oletetaan, että q ei ole nollapolynomi. Silloin sillä on enintään p:n asteen verran nollakohtia. Koska $q(0) = 0$, q:n nollakohdista suurin, x_0, on ei-negatiivinen. Selvästi $p(x_0) = x_0$. Mutta $q((x_0+1)^3) = p((x_0+1)^3) - (x_0+1)^3 = (p(x_0)+1)^3 - (x_0+1)^3 = (x_0+1)^3 - (x_0+1)^3 = 0$. Koska $x_0 \geq 0$, $(x_0+1)^3 > x_0+1 > x_0$. Näin ollen x_0 ei olisikaan suurin q:n nollakohdista. Siis q on nollapolynomi ja $p(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

2008.2. Asetetaan $x = 2 + b + c^2$, $y = 2 + c + a^2$ ja $z = 2 + a + b^2$. Silloin $x + y + x = 6 + (a^2 + b^2 + c^2) + a + b + c = 9 + a + b + c$. Caychyn–Schwarzin epäyhtälön perusteella $(a+b+c)^2 \leq (|a|\cdot 1 + |b| \cdot 1 + |c| \cdot 1)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) = (a^2+b^2+c^2)^2 = 9$, joten $x + y + x \leq 12$. Koska $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, kukin luvuista a, b, c on $\geq -\sqrt{3} > -2$, ja kaikki luvut x, y, z ovat positiivisia. Käytetään Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä:

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}}\sqrt{y} + \frac{c}{\sqrt{z}}\sqrt{z}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}\right)(x+y+z).$$

Koska $x + y + z \leq 12$, väite on tosi.

2008.3. Osoitetaan, että tehtävässä esitetty tilanne ei ole mahdollinen. Olkoon $0 < x \leq \frac{1}{4}\pi$. Silloin $\sin x \leq \cos x \leq 1 \leq \cot x$ ja $\sin x < \tan x \leq 1 \leq \cot x$. Jos $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$ muodostavat aritmeettisen jonon, niin ne eivät ole yhtä suuria ja $\sin x$ on luvuista pienin, $\cot x$ suurin. Jos luvut muodostavat aritmeettisen jonon, niin riippumatta siitä, onko $\cos x$ vai $\tan x$ suurempi,

$$\cos x - \sin x = \cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x \cos x}$$

eli

$$1 = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $\sin x < 1$ ja $\cos x < 1$. Jos $x > \frac{1}{4}\pi$, niin $y = \frac{1}{2}\pi - x < \frac{1}{4}\pi$. Luvut $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$ ovat samat kuin luvut $\cos y$, $\sin y$, $\cot y$ ja $\tan y$; edellä todistetun mukaan nämä viimeksi mainitut luvut eivät voi muodostaa aritmeettista jonoa, joten sama pätee luvuille $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$.

2008.4. Jos $-6 \leq n \leq 4$ tai $6 \leq n \neq 16$, niin $|n - 5| \leq 11$. Jos $P(x) - 5 = 0$, kun $x = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, missä x_k:t ovat eri kokonaislukuja, niin

$$P(x) - 5 = \prod_{k=1}^{5}(x - x_k)Q(x),$$

missä Q on kokonaislukukertoiminen polynomi. Jos nyt $P(x) = n$, niin $n - 5$ on kuuden kokonaisluvun tulo ja näistä viisi on eri suuria. Viiden eri suuren kokonaisluvun tulon itseisarvo on ainakin $1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 3 = 12$. Tehtävän ehdot toteuttavaa kokonaislukua ei siis voi olla olemassa.

2008.5. Olkoot luvut Romeon tetraedin kärjissä x_1, x_2, x_3 ja x_4, ja luvut Julian tetraedrin kärjissä y_1, y_2, y_3 ja y_4. Voidaan olettaa, että luvut sijoittuvat tetraedien kärkiin niin, että

$$x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_2 = y_2y_3 + y_3y_4 + y_4y_2, \tag{1}$$

$$x_1x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = y_1y_3 + y_3y_4 + y_4y_1, \tag{2}$$

$$x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 = y_1y_2 + y_2y_4 + y_4y_1, \tag{3}$$

ja

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1. \tag{4}$$

Osoitetaan, että tällöin $x_i = y_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Olkoon $R = \{i \mid x_i > y_i\}$ ja $J = \{i \mid y_i > x_i\}$. Jos joukossa R on ainakin kolme alkiota, voidaan olettaa, että $\{1, 2, 3\} \subset R$. Tämä on ristiriidassa yhtälön (4) kanssa. Oleteaan sitten, että R:ssä on kaksi alkiota. Voidaan olettaa, että $R = \{1, 2\}$. Silloin $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 \le y_3$ ja $x_4 \le y_4$, joten $x_1x_2 - x_3y_3 > y_1y_2 - y_3y_4$. Mutta jos yhtälöt (1) ja (2) lasketaan yhteen ja vähennetään yhtälöt (3) ja (4), saadaan $x_1x_2 - x_3x_4 = y_1y_2 - y_3y_4$. Siis R:ssä on enintään yksi alkio. Samoin nähdään, että J:ssä on enintään yksi alkio. Luvuista x_i ja y_i ainakin kaksi paria on samoja, esimerkiksi $x_1 = y_1$ ja $x_2 = y_2$. Tällöin yhtälöistä (3) ja (4) voidaan ratkaista $x_3 = y_3$ ja $x_4 = y_4$.

2008.6. Olkoon E jokin tehtävässä määritelty joukko. Jos a on E:n pienin alkio ja jos $b \in E$, $b \ne a$, niin

$$\frac{a^2}{b-a} \ge a$$

eli $b \le 2a$. Tämä tarkoittaa sitä, että mielivaltaisille x, $y \in E$, $x < y$, on

$$\frac{y}{x} \le 2.$$

Olkoot sitten c ja d, $c < d$, joukon E kaksi suurinta alkiota. Koska $d \le 2c$, niin

$$\frac{c^2}{d-c} \ge c.$$

Silloin

$$\frac{c^2}{d-c} = d \quad \text{tai} \quad \frac{c^2}{d-c} = c.$$

Edellinen vaihtoehto merkitsee yhtälöä

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{c}{d} - 1 = 0,$$

jonka ratkaisut ovat irrationaalisia. Vaihtoehto on siis mahdoton. Siis $c^2 = dc - c^2$ eli $d = 2c$. Joukossa E voi siis olla vain kaksi alkiota c ja $2c$. Jokainen joukko $\{c, 2c\}$, c positiivinen kokonaisluku, kelpaa joukoksi E.

2008.7. Olkoon $d = \text{s.y.t.}(m, n)$ ja $m = da$, $n = db$. Silloin $a < b$, $\text{s.y.t.}(a, b) = 1$ ja yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$3abd = 2008(a + b).$$

Havaitaan, että $2008 = 8 \cdot 251$ ja että 251 on alkuluku. Koska $\text{s.y.t.}(a, a + b) = \text{s.y.t.}(b, a + b) = 1$, niin a ja b ovat kumpikin luvun 2008 tekijöitä. Koska enintään toinen luvuista on parillinen ja enintään toinen on jaollinen luvulla 251, saadaan seuraavat mahdollisuudet pariksi (a, b): (1, 2), (1, 4), (1, 8), (1, 251), (1, 502), (1, 1004), (1, 2008), (2, 251), (4, 251) ja (8, 251). Koska 3 ei ole luvun 2008 teijä, $a + b$:n on olava kolmella jaollinen. Tämä pudottaa osan edellisen listan kandidaateista pois; jäljelle jäävät (1, 2), (1, 8), (1, 251), (1, 1004) ja (4, 251). Jokaiselle näistä ab on luvun 2008 tekijä, ja näin ollen d on kokonaisluku. Ehdon täyttäviä pareja on siis tasan viisi kappaletta.

2008.8. Koska $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, joukossa A on oltava jokin muu luku, jonka tekijänä on 13 korotettuna parittomaan potenssiin. Nyt $1014 = 78 \cdot 13 = 6 \cdot 13^2$, joten joukossa on oltava jokin lukua 1014 suurempi 13:n monikerta. Nyt $13 \cdot 79 = 1027$ on tällainen, mutta koska 79 on alkuluku, joukossa A olisi oltava jokin toinen 79:n monikerta. Nyt $12 \cdot 79 = 948 < 1001$ ja $14 \cdot 79 = 1106$. Mutta $13 \cdot 80 = 1040$, joten $13 \cdot 80$ on lupaavampi kandidaatti joukon A suurimman alkion pienimmäksi mahdolliseksi arvoksi. Joka tapauksessa A:n suurin alkio ei voi olla pienempi kuin 1040. Se myös kelpaa, sillä voidaan valita $A = \{1001, 1008, 1012, 1035, 1040\}$. Näin siksi, että $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $1008 = 7 \cdot 2^4 \cdot 3^2$, $1012 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$, $1035 = 3 \cdot 3^2 \cdot 23$ ja $1040 = 2^4 \cdot 5 \cdot 13$. Kun A:n alkiot kerrotaan keskenään, jokaisen alkutekijän eksponentti on parillinen. Tulo on siis neliöluku.

2008.9. Todetaan, että $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. Oletetaan, että $1008 = a^b - b^a$. Osoitetaan ensin, että ainakin toinen luvuista a ja b on pariton. Jos olisi $\max\{a, b\} = 2x$ ja $\min\{a, b\} = 2y$, niin olisi $(2x)^{2y} - (2y)^{2x} = 2^{2y}(x^{2y} - 2^{2(x-y)}y^{2x}) = \pm 1008 = \pm 2^4 \cdot 63$. Siis $y \le 2$. Jos olisi $y = 2$, olisi 63 jaollinen luvulla $x^4 - 4^{2x-2} = (x^2 + 4^{x-1})(x^2 - 4^{x-1})$. Helposti nähdään, että tämä ei ole mahdollista. Jos olisi $y = 1$, olisi $\pm 1008 = 4x^2 - 2^{2x}$ ja $x^2 - 2^{2x-2} = 252$ eli $(x + 2^{x-1})(x - 2^{x-1}) = 4 \cdot 63$. Nyt x:n olisi oltava parillinen. Kokeilemalla nähdään, että $x = 2$, 4, 6, ja 8 eivät ole ratkaisuja; kun $x \ge 10$, niin $x + 2^{x-1} > 252$. Koska a ja b eivät voi olla molemmat parillisia, ja niiden kokonaislukupotenssien erotus on parillinen, molemmat ovat parittomia. Jos molemmat luvut olisivat jaollisia kolmella, $1008 = a^b - b^a$ olisi jaollinen 27:llä. Siis kumpikaan luvuista ei ole jaollinen 3:lla. Samoin päätellään, että kumpikaan luvuista ei ole jaollinen 7:llä.

Todistuksen loppuun saattamiseksi joudutaan käyttämään hyväksi Eulerin funktiota ϕ. Osoitetaan, että jos n on luvun 1008 tekijä, $\text{s.y.t.}(a, n) = \text{s.y.t.}(b, n) = \text{s.y.t.}(a, \phi(n)) = \text{s.y.t.}(b, \phi(n))$ ja $a \equiv b \bmod \phi(n)$, niin $a \equiv b \bmod n$. Eulerin lauseesta seuraa nimittäin, että $a^{\phi(n)} \equiv b^{\phi(n)} \equiv 1 \bmod n$. Toisaalta, jos $a \equiv b \equiv d \bmod \phi(n)$, niin $a^b = a^{d+k\phi(n)} \equiv a^d \bmod n$ ja vastaavasti $b^a \equiv b^d \bmod n$. Siis $a^d - b^d \equiv a^b - b^a = 1008 \equiv 0 \bmod n$. Koska $\text{s.y.t.}(d, \phi(n)) = 1$, on olemassa d' siten, että $dd' \equiv 1 \bmod \phi(n)$ (d:llä on käänteisalkio mod $\phi(n)$) eli $dd' = 1 + k\phi(n)$. Koska $a^d \equiv b^d \bmod n$, on $a^{dd'} \equiv b^{dd'} \bmod n$ eli $a^{1+k\phi(n)} \equiv b^{1+k\phi(n)} \bmod n$. Eulerin lauseesta seuraa nyt $a \equiv b \bmod n$.

Nyt $a \equiv b \equiv 1 \bmod 2$. Koska $\phi(4) = 2$, $\phi(8) = 4$ ja $\phi(16) = 8$, niin $a \equiv b \bmod 4$, $a \equiv b \bmod 8$ ja $a \equiv b \bmod 16$. Olemme todennet, että a ja b ovat kolmella jaottomia. Koska $a \equiv b \bmod 2$ ja $\phi(3) = 2$, $a \equiv b \bmod 3$. Luku $a - b$ on siis jaollinen 6:lla; koska

$\phi(9) = 6$, niin $a \equiv b \bmod 9$. Myös $\phi(7) = 6$ ja a ja b ovat jaottomia 7:llä. Siis $a \equiv b \bmod 7$. Kaikkiaan siis $a \equiv b \bmod 1008$. – Koska $1009^1 - 1^{1009} = 1008$, yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu. Ei ole tiedossa, onko sillä muita ratkaisuja.

2008.10. On ilmeistä, että jos a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, niin $S(ab) \le S(a)S(b)$. [Oikealla puolella on kaikkien a:n ja kaikksien b:n numeroiden tulojen summa, vasemmalla puolella osa näistä summista on korvautunut summan numeroiden summalla.] Näin ollen $S(n) = S(10000n) = S(16n \cdot 625) \le S(16n)S(625) = 13S(16n)$. Siis

$$\frac{S(n)}{S(16n)} \le 13$$

kaikilla n. Nyt $S(625) = 13$ ja $S(16 \cdot 625) = S(10000) = 1$, joten suurin kysytyn suhteen arvo on 13.

2008.11. Jos $169 = 13^2$ kuuluu joukkoon A, joukossa on neliöluku. Oletaan, että

$$A \subset \{1, 2, \ldots, 168\} = \bigcup_{k=1}^{84} \{k, 169 - k\}.$$

Koska joukossa A ei ole kahta lukua, joiden summa olisi 169, A:han ei sisälly kahta lukua mistään edellä olevan parien yhdisteen parista. Koska A:ssa on 84 lukua ja pareja on 84, jokaisesta parista on mukana tasan yksi luku. Siis myös parista $\{25, 144\} = \{5^2, 12^2\}$ jompikumpi luku on joukossa A.

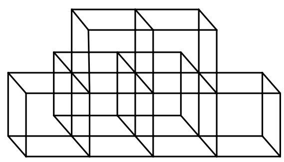
2008.12. Konstruoidaan sellainen $3n$:n alkion joukon E kolmialkioisten osajoukkojen joukon osajoukko S, että jokainen E:n kaksialkioinen osajoukko on tasan yhden S:n joukon osajoukko. Jos tällainen luokan oppilaiden kolmikkojen joukko on olemassa, niin jokaiset kaksi oppilasta A ja B tekevät lahjan sille oppilaalle C, jolle $\{A, B, C\} \in S$. Oppilasparia A, C vastaava S:n alkio on yksikäsitteisyyden nojalla myös $\{A, C, B\} = \{A, B, C\}$, joten A ja C tekevät lahjansa B:lle.

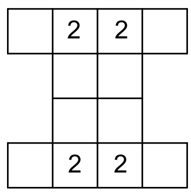
Joukon S konstruoimiseksi nimetään lapset symboleilla $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$. Sisällytetään joukkoon S ensiksi kaikki kolmikot $\{A_i, B_i, C_i\}$, $1 \le i \le n$. Joukkoon S otetaan myös kaikki kolmiokot $\{A_i, A_j, B_k\}$, $\{B_i, B_j, C_k\}$ ja $\{C_i, C_j, A_k\}$, missä $1 \le i < j \le n$ ja $i + j \equiv 2k \bmod n$. Todetaan, että i ja j määrittävät k:n, $1 \le k \le n$, yksikäsitteisesti. Jokaisella $1 \le i < j \le n$ pari $\{A_i, A_j\}$ on yksikäsitteisen joukon $\{A_i, A_j, B_k\}$ osajoukko; sama pätee pareihin $\{B_i, B_j\}$ ja $\{C_i, C_j\}$. Jos pariin $\{A_i, A_j\}$ liitetty joukko B_k olisi joko B_i tai B_j, olisi $i+j \equiv 2i \bmod n$ tai $i+j \equiv 2j \bmod n$. Kummastakin seuraisi $i \equiv j \bmod n$ ja koska $1 \le i, j \le n$, ristiriita $i = j$. Tämä merkitsee sitä, että $\{A_i, B_i, C_i\} \in S$ on ainoa joukko, jonka osajoukkona on $\{A_i, B_i\}$ (tai $\{B_i, C_i\}$, $\{A_i, C_i\}$). Jos $i \ne k$, niin $i + j \equiv 2k \bmod n$ määrittää j:n yksikäsitteisesti, ja $i \ne j$, koska muuten ehdosta $i + j \equiv 2k \bmod n$ seuraisi $i = k$. Näin ollen pariin $\{A_i, B_k\}$ liittyy yksikäsitteinen joukko $\{A_i, A_j, B_k\} \in S$.

2008.13. Kilpailuun voi osallistua ainakin 56 maata, sillä jos kaikki valitsevat kolme tehtävää vain kahdeksasta mahdollisesta, niin eri valintoja on $\binom{8}{3} = 56$ kappaletta. Osoitetaan, että 56 on suurin mahdollinen osallistuvien maiden määrä. Olkoon K niiden tehtäväkolmikkojen joukko, joita joku äänesti ja E niiden tehtäväkolmikkojen joukko, joita kukaan ei äänestänyt. Olkoon K:ssa k alkiota ja E:ssä e alkiota. Silloin $k + e = \binom{9}{3} = 84$. Tarkastellaan kolmikkoa $x \in K$. Kolmikkoja, joissa ei ole yhtään x:ään kuuluvaa tehtävää, on $\binom{6}{3} = 20$ kappaletta. Nämä voidaan jakaa kymmeneksi pariksi niin, että pariin kuuluvissa kolmikoissa ei ole yhteistä tehtävää. Jokaisessa parissa ainakin toisen kolmikon on kuuluttava joukkoon E, koska muuten olisi kolme maata, jotka yhteensä ovat äänestänet kaikkia yhdeksää tehtävää, toisin kuin tehtävässä ilmoitettiin. Jokaiseen $x \in K$ liittyy siis ainakin 10 joukkoa $y \in E$ niin, että x:llä ja y:llä ei ole yhteisiä alkioita. Jokaiseen $y \in E$ voidaan toisaalta liittää enintään 20 alkiota $x \in K$ (koska on tasan 20 joukkoa, joilla ei ole yhteisä alkioita y:n kanssa). Mutta tämä merkitsee, että $10k \leq 20e$ ja

$$k = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}k \leq \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}e = \frac{2}{3}(k + e) = \frac{2}{3} \cdot 84 = 56.$$

2008.14. Vastaus tehtävän kysymykseen on myönteinen. Kahdesta tehtävässä määritellystä palikasta saa oheisen kuvion mukaisen kappaleen (toinen on "lappeellaan" osaksi toisen alla). Kaksi tällaista kappaletta voidaan laittaa vierekkäin, niin että syntyy esine, joka suoraan ylhäältä katsottuna näyttää alemman kuvan mukaiselta. Siinä 12 kuutiota on samassa tasossa ja 2:lla on merkitty paikat, joissa kaksi kuutiota on päällekkäin. Kun toisen tällaisen esineen kääntää ylösalaisin ja kiertää sitä 90°, niin sen voi asettaa kuvan mukaisen esineen päälle niin, että syntyy $4 \times 4 \times 2$-suorakulmainen särmiö. Kaksi tällaista päällekkäin asetettuna muodostaa $4 \times 4 \times 4$-kuution.



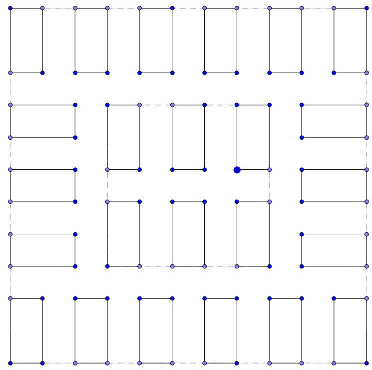


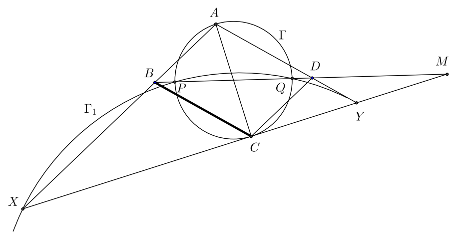
2008.15. Jos dominot asetellaan neliön keskustasta alaken oheisen kuvan mukaisesti, niin neliöön, jonka sivu on $5 + 6n$ saadaan sopimaan

$$\sum_{k=0}^{n}(6 + 12n) = 6(n + 1)^2$$

dominoa. Tämä nähdään induktiolla, sillä renkaaseen, jonka sisäreuna on $5 + 6n$-neliö ja ulkoreuna $5 + 6(n + 1)$ neliö saadaan kuvan järjestelyä seuraten "pystysuoraan asentoon" $2 \cdot (3 + 3(n + 1))$ dominoa ja "vaakasuoraan asentoon" $2 \cdot (3 + 3n)$ eli yhteensä $12n + 18 = 6 + 12(n + 1)$ dominoa. Kun $n = 12$ eli $5 + 6n = 77$, dominoita saadaan sijoitettu $6 \cdot 13^2 = 1014$ kappaletta ja dominoiden pinta-ala on $2028 > 2008$. Kysytty n:n pienin arvo on siis ≤ 77.

Jos 1004 dominoa olisi sijoitettu tehtävässä esitetyllä tavalla 76×76-neliöön, niin sellaiset suorakaiteet, joiden keskellä on domino, ja joiden sivut ovat puolen yksikön etäisyydellä dominon sivuista, eivät mene päällekkäin. Tällaiset suorakaiteet olisivat myös kokonaan $77 \cdot 77$-neliön sisällä. Mutta kuvattujen suorakaiteiden ala on $2 \cdot 3 = 6$, ja ne peittäisivät siis kaikkiaan alan $1004 \cdot 6 = 6024$. Mutta $77^2 = 5929$. Dominot eivät siis mahdu 76×76-neliöön, joten tehtävässä kysytty pienin n on 77.



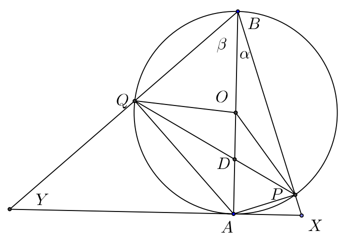


2008.16. Olkoon Γ ympyrä, jonka halkaisija on AC ja Γ_1 ympyrä joka kulkee pisteiden X, P ja Q kautta. Olkoon M suorien AD ja CY leikkauspiste. Pisteen M potenssi ympyrän Γ_1 suhteen on $MP \cdot MQ$. Näin ollen piste Y on ympyrällä Γ_1, jos $MX \cdot MY = MP \cdot MQ$. Koska $AC \perp CM$, CM on ympyrän Γ tangentti. Pisteen M potenssi ympyrän Γ suhteen on $MP \cdot MQ = MC^2$. Mutta koska $BC \| AY$ ja $AX \| DC$, on

$$\frac{MC}{MY} = \frac{MB}{MD} = \frac{MX}{MC}.$$

Siis $MX \cdot MY = MC^2 = MP \cdot MQ$, ja väite on todistettu.

2008.17. Olkoon tehtävän jännenelikulmio $ABCD$, S sen ala ja R sen ympäri piirretyn ympyrän säde. Voidaan olettaa, että $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ ja $DA = d$. Olkoon vielä $AC = e$ ja $BD = f$. Ptolemaioksen lauseen nojalla $ac + bd = ef$. Maksimoitava lauseke on siis $(e(ab+cd))(f(ad+bc)) = (abe+cde)(bcf+adf)$. Kolmion ala on tunnetusti neljäsosa sen sivujen tulosta jaettuna ympärysympyrän säteellä. Koska kolmioiden ABC ja CDA ympärysympyrän säde on R ja alojen summa S, on $abe + cde = 4RS$. Samoin on $(bcf + adf) = 4RS$. Tehtävän lauseke on maksimaalinen, kun S on maksimaalinen. Kuperan nelikulmion ala on puolet sen lävistäjien tulon ja niiden välisen kulman sinin tulosta. Kaikki nämä maksimoituvat tehtävän tapauksessa silloin, kun $ABCD$ on neliö.



2008.18. Olkoon ympyrän S keskipiste O. Voidaan olettaa, että ympyrän säde on 1. Leikatkoon PQ suoran AB pisteessä D. Olkoon $\angle ABP = \alpha$ ja $\angle ABQ = \beta$. Silloin $\angle POQ = 2(\alpha+\beta)$, ja koska kolmio OQP on tasakylkinen, $\angle OQP = \angle OPQ = 90° - (\alpha+\beta)$. Koska $\angle DOP = 2\alpha$, $\angle ODP = 180° - (2\alpha + 90° - \alpha - \beta) = 90° - (\alpha - \beta)$. Sovelletaan sinilausetta kolmioon ODP, jossa $OP = 1$. Saadaan

$$OD = \frac{\sin(\angle OPD)}{\sin(\angle ODP)} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$$

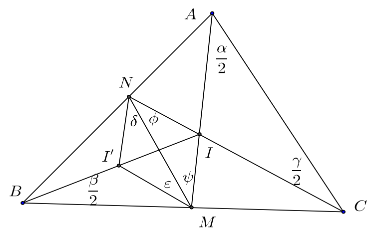
Mutta

$$\tan\alpha = \frac{AX}{AB} = \frac{AX}{2}, \quad \tan\beta = \frac{AY}{AB} = \frac{AY}{2}.$$

Siis $\tan\alpha\tan\beta = \frac{1}{4}AX \cdot AY = \frac{c}{4}$. Näin ollen OD on riippumaton pisteiden X ja Y valinnasta, eli jokainen suora PQ kulkee pisteen D kautta.

2008.19. Valitaan jokaista jännettä AB kohden lyhempi kaari $\overset{\frown}{AB}$ (jos AB on halkaisija, valitaan jompikumpi puoliympyröistä $\overset{\frown}{AB}$. Valittujen kaarien pituuksien summa on > 19. Ympyrän kehän pituus on π. Kuusi kehän pituutta on $< 6 \cdot 3{,}15 = 18{,}9 < 19$. Tästä seuraa, että ainakin jokin ympyrän kaari sisältyy ainakin seitsemään valituista kaarista. Jokainen tällaisen kaaren pisteestä piirretty halkaisija leikkaa kaikki ainakin seitsemään kaareen liittyvät jänteet.

2008.20. Olkoon kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste I ja kolmion NBM kulmanpuolittajien leikkauspiste I'. Olkoot kolmion ABC kulmat α, β, γ ja $\angle I'NM = \delta$, $\angle I'MN = \varepsilon$, $\angle MNI = \phi$ ja $\angle NMI = \psi$. Tehtävän ehdosta seuraa, että jollain k on $\delta = k\phi$ ja $\varepsilon = k\psi$. Kulmat kolmioiden AIC ja MIN kärjessä I ovat ristikulmia, joten $\phi+\psi = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$. Kolmioista



ABC ja NBM saadaan $\alpha + \gamma = 2\delta + 2\varepsilon$. Siis $k(\phi + \psi) = \delta + \varepsilon = \phi + \psi$, eli $k = 1$. Tästä seuraa, että kolmiot NIM ja $NI'M$ ovat yhteneviä (ksk) ja että kolmio $NI'I$ on tasakylkinen. Silloin sen huipusta N piirretty korkeusjana yhtyy kulmanpuolittajaan. Siis $NM \perp I'I$. Mutta tämä merkitsee sitä, että kolmion BMN kärjestä B piirretty kulmanpuolittaja on kohtisuorassa kantaa MN vastaan. Silloin kolmio BMN on tasakylkinen; $BM = BN$. Mutta koska AM ja CN ovat kulmanpuolittajia,

$$BM = \frac{AB}{AB + AC} \cdot BC, \quad BN = \frac{BC}{AC + BC} \cdot AB.$$

Edellisistä yhtälöistä seuraa $AB = AC$; ABC on siis tasakylkinen.

2009.1. Jos p:n nollakohdat ovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$, niin

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Luvut $1 - x_i$ ovat ei-negatiivisia ja luvut $2 - x_i$ positiivisia. Jos jokin luvuista $x_i = 1$, niin $p(1) = 0$. Oletetaan, että $x_i < 1$ kaikilla i. Siis

$$p(1) = \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \geq 0.$$

Nyt

$$\frac{p(1)}{3^n} = \frac{p(1)}{p(2)} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1 - x_i}{2 - x_i}\right)$$

ja aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kaksi kertaa soveltaen saadaan

$$\frac{\sqrt[n]{p(1)}}{3} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-x_i}{2-x_i}\right)} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-x_i}{2-x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2-x_i}\right) = 1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}$$
$$\le 1-\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}} = 1-\sqrt[n]{p(2)^{-1}} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Siis $p(1) \le 2^n$. Jos $p(x) = (x+1)^n$, $p(1) = 2^n$.

On vielä osoitettava, että kaikki arvot väliltä $[0,\, 2^n]$ voivat olla $p(1)$:n arvoja. Arvoon 0 päästään esimerkiksi, kun $p(x) = (x-1)(x-a)^{n-1}$, missä a määräytyy yhtälöstä $2-a = 3^{\frac{n}{n-1}}$. Silloin $a = 2-3^{\frac{n}{n-1}} < 2-3 = -1$. Jos $p(x) = (x-b)(x-a)^{n-1}$, niin ehto $p(2) = 3^n$ määrittää a:n ja b:n välille jatkuvan yhteyden; $a = a(b)$. Kun b kasvaa -1:stä $+1$:een, niin $p(1) = (1-b)(1-a(b))^{n+1}$ on jatkuva b:n funktio ja saa siis kaikki arvot väliltä $[0,\, 2^n]$.

2009.2. Sekä tehtävän oletusepäyhtälö että väitetty epäyhtälö pätevät yhtälöinä, jos $a_1 = a_2 = \ldots = a_{100} = 99$. Voidaan olettaa, että $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{100}$. Oletetaan nyt, että $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} > 9900$. Silloin $a_{100} > 99$ ja $a_1 < 99$. Olkoon oletusepäyhtälön vasen puoli S ja olkoon S' luku, joka saadaan, kun a_1 korvataan $a_1 + 1$:llä ja a_{100} $a_{100} - 1$:llä. Nyt

$$S - S'$$
$$= (a_1-20-(a_1+1))(a_1(a_1-1)\cdots(a_1-19)+(a_{100}-(a_{100}-21))(a_{100}-1)(a_{100}-2)\cdots(a_{100}-20)$$
$$= 21((a_{100}(a_{100}-1)\cdots(a_{100}-20) - (a_1(a_1-1)\cdots(a_1-19)) > 0.$$

Siis $S' < S$. Luvut $a_1 + 1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{99},\, a_{100} - 1$ toteuttavat tehtävän ehdon ja niiden summa on sama kuin lukujen $a_1,\, \ldots,\, a_{100}$ summa. Prosessi voidaa siis toistaa. Tullaan ristiriitaan, koska prosessia ei selvästikään voi toistaa äärettömän monta kertaa.

2009.3. Koska $(x+1)^2-x^2-(x-1)^2+(x-2)^2 = 2x+1-(-2x+1+4x-4) = 4$, voidaan luvut n^2, $(n-1)^2$, $\ldots$ ryhmittää suurimmasta alkaen kahdeksan ryhmiin ja varustaa kertoimin 1 ja -1 niin, että ryhmissä olevien lukujen summa 0. Jos $8|n$, väite on siis tosi. Ellei näin ole, on vielä osoitettava, että pienimmät enintään seitsemän neliötä voidaan varsustaa kertoimin $+1$ ja -1 niin että ehto toteutuu, Jos jäljelle jääneitä lukuja on enemmän kuin 4, varustetaan neljä suurinta kertoimin niin, että summa on 4. Jos jäljelle jää ainakin neljä lukua, ne voidaan varustaa kertoimin niin, että summa on 4. Nyt $4-3^2+2^2+1 = 0$, $4-2^2-1^2 = 1$, $4-1^2 = 3$, joten kertoimet voidaan valita halutulla tavalla. Jos taas jäljellä on enintään kolmen luvun neliöt, niin yhtälöt $3^2-2^2-1^2 = 4$, $2^2-1^2 = 1$ ja $1^2 = 1$ osoittavat, että nämä luvut voidaan varustaa kerpoimin ± 1 halutulla tavalla. Kertoimet c_k on siis aina mahdollista valita tehtävässä esiteyllä tavalla.

2009.4. Koska $(x_1+\cdots+x_{n-1})x_n \le (|x_1|+\cdots+|x_{n-1}|)|x_n|$, tehtävän epäyhtälö toteutuu kaikilla x_i, jos se toteutuu kaikilla ei-negatiivisilla x_i. Epäyhtälö toteutuu varmasti, jos $x_n = 0$. Oletetaan siis, että $x_n > 0$. Tehtävän epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\left(\frac{x_1}{x_n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^2 + 1 \ge \frac{x_1}{x_n} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

kanssa. Voidaan siis tutkia epäyhtälöä $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + 1 \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$. Tämä epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - (n-1)\frac{1}{4} \geq 0 \tag{1}$$

kanssa. Kun $2 \leq n \leq 5$, epäyhtälö on tosi kaikilla reaaliluvuilla x_i. Kun $n \geq 6$, epäyhtälön (1) vsen puoli on pienempi kuin

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

ja vasen puoli on negatiivinen, jos esimerkiksi $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$. Tehtävässä kysytyt n:n arvot ovat siis 2, 3, 4 ja 5.

2009.5. Yhtälön $x^2 = f_1x + f_0 = x + 1$ juuret ovat $\dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Olkoon t jompikumpi näistä. Osoitetaan induktiolla, että t toteuttaa jokaisen yhtälön $x^n = f_{n-1}x + f_{n-2}$, $n \geq 2$. Näin on, kun $n = 2$. Oletetaan, että $t^k = f_{k-1}t + f_{k-2}$ jollain $k \geq 2$. Silloin $t^{k+1} = t(t^k) = f_{k-1}t^2 + f_{k-2}t = f_{k-1}(t+1) + f_{k-2}t = (f_{k-1} + f_{k-2})t + f_{k-1} = f_kt + f_{k-1}$. Koska 2010 on parillinen, käyrän $y = x^{2010}$ muoto on "ylospäin aukeavan paraabelin". Suora voi leikata tällaisen käyrän enintään kahdessa pisteessä. Tehtävän yhtälöllä on siis tasan kaksi reaalilukuratkaisua, ja ne ovat $\dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

2009.6. Olkoot yhtälön $x^3 - ax^2 - b = 0$ ratkaisut t_1, t_2 ja t_3. Jos jokin näistä on 0, $b = 0$ ja väite on ilmeinen. Oletetaan, että $b \neq 0$. Vietan kaavojen perusteella $b = t_1t_2t_3$. Tarkastellaan b:n alkulukuhajotelmaa. Väitteen todistamiseksi riittää, kun osoitetaan, että ne alkuluvut p, joiden eksponentti p:n alkulukuhajotelmassa on pariton, ovat a:n tekijöitä. Olkoon p eräs tällainen luku, ja olkoon p:n eksponentti b:n alkulukuhajotelmassa pariton luku α. Olkoot p:n eksponentit t_1:n, t_2:n ja t_3:n alkulukuhajotelmissa $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ ja $\alpha_3 \geq 0$. Silloin $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$. Voidaan olettaa, että $\alpha_1 = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Silloin $3\alpha_1 \geq \alpha$. Koska $t_1^3 = at_1^2 + t_1t_2t_3$, on $t_1^2 = at_1 + t_2t_3$. t_1 ja siis erityisesti p^{α_1} on siis luvun t_2t_3 tekijä, joten $\alpha_1 \leq \alpha_2 + \alpha_2$. Siis $2\alpha_1 \leq \alpha$ ja koska α on pariton, $2\alpha_1 < \alpha$. Tarkastellan nyt yhtälöä $t_1^3 = at_1^2 + b$. p:n eksponentti t_1^3:n alkulukuhajotelmassa on $3\alpha_1 \geq \alpha$, t_1^2:n alkulukuhajotelmassa $2\alpha_1 < \alpha$ ja b:n alkulukuhajotelmassa α. Koska p:n eksponentin luvun at_1^2 alkulukuhajotelmassa on myös oltava α, p:n on oltava a:n tekijä.

2009.7. Tehtävän oletuksista seuraa, että p on luvun $a^4 + b^4 + (-(a+b))^4 = 2a^2 + 2b^2 + 4a^3b + 6a^ab^2 + 4ab^3 = 2(a^4 + b^4 + (ab)^2 + 2a^3b + 2ab^3 + 2a^2b^2) = 2(a^2 + b^2 + ab)^2$ tekijä. Koska p on pariton, se on luvun $a^2 + ab + b^2$ ja siis myös luvun $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ tekijä. Olkoon $p = 6n - 1$. Fermat'n pientä lausetta soveltaen saadaan $a \equiv a^p =\equiv a^pa^{p-1} = a^{3(4n-1)} \equiv b^{3(4n-1)} \equiv b^pb^{p-1} \equiv b^p \equiv b \bmod p$. Samoin saadaan $a \equiv c \bmod p$. Mutta siis $3a \equiv a + b + c \equiv 0 \bmod p$. Koska $p \neq 3$, $a \equiv 0 \bmod p$. Samoin tietysti b ja c:kin ovat p:llä jaollisia.

2009.8. Jos jokin joukon luvuista olisi jaollinen alkuluvulla p, joka on > 9, niin p voisi olla tekijänä vain yhdessä joukon luvuista. Joukon lukujen alkutekijöinä voi siis esiintyä vain lukuja 2, 3, 5 tai 7. Minkään luvun tekijä ei voi olla 5^2 eikä 7^2, koska joukkoon ei voi kuulua kuin yksi luku, joka on jaollinen näillä luvuilla. Jos joukkoon kuuluu luku, joka on jaollinen 3^3:lla, siinä on tasan kaksi muuta kolmella jaollista lukua, ja kumpikaan näistä ei ole jaolllinen 3^2:lla. Joukossa on siis yksi 3^2:lla jaollinen ja kaksi kolmella jaollista lukua. Joukossa voi olla viisi parillista lukua. Jos siinä on kaksi 2^3:lla jaollista, ne ovat ensimmäinen ja viimeinen; muista parillisista yksi on jaollinen 2^2:lla, mutta muut kaksio vai 2^1:llä. Jos joukossa on 2^5:llä jaollinen luku, muista parillisista enintään kaksi on 2^2:lla jaollisia. Joukossa eo voi olla 2^6:lla jaollista lukua. Kaikkiaan lukujen tulo voi olla jaollinen 2^{11}:llä. Kun edelliset tarkastelut kootaan yhteen, nähdään, että joukon lukujen tulo voi olla enintään $2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 < 2{,}5 \cdot 10^7$. Mutta on ilmeistä, että ehdon täyttävän joukon pienin luku on suurempi kuin 10, ja joukon lukujen tulo siis ainakin 10^9. – Tehtävässä kysyttyjä kokonaislukuja ei ole olemassa.

2009.9. Jos n on parillinen, $2^{n+1} - n^2$ on jaollinen kahdella. Jos n on pariton, $n = 2k-1$, $k > 0$, niin $2^{n+1} - n^2 = 2^{2k} - (2k-1)^2 = (2^k - 2k + 1)(2^k + 2k - 1)$. Kun $k = 1$ tai $k = 2$, ensimmäinen tekijä on 1 ja jälkimmäinen tekijä 3 tai 7. Tällöin $2^{n+1} - n^2$ on alkuluku. Kun $k > 2$, niin $2^k - 2k + 1 = 2(2^{k-1} - k) + 1$. Alaspäin kupera käyrä $y = 2^{x-1}$ ja suora $y = x$ eivät voi leikata kuin kahdessa pisteessä. Siis $2^{k-1} \neq k$, kun $k \neq 1, 2$, ja luvulla $2^{n+1} - n^2$ on ainakin kaksi tekijää, jotka ovat > 1.

2009.10. Osoitetaan, että aina, kun M on parittoman kokonaisluvun neliö, niin tehtävässä tarjottu esitys on mahdoton. Olkoon siis $M = k^2$ ja k pariton kokonaisluku. Oletetaan, että jollain n on

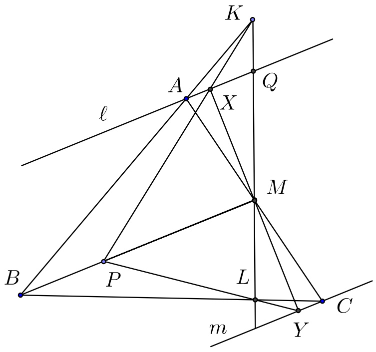
$$k^2 = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2.$$

Silloin

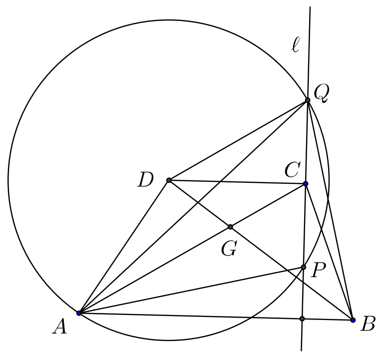
$$\sqrt{n} = \frac{kd(n)}{2}$$

, ja koska $\sqrt{n}$ on rationaaliluku, on oltava $n = m^2$ jollain kokonaisluvulla. Mutta neliöluvulla m^2 $d(m^2)$ on pariton (jokaista m^2:n tekijää q, joka on $< m$, vastaa yksikäsitteinen tekijä $\dfrac{m^2}{q} > m$, paitsi tekijää m). Näin ollen parillinen luku $2m$ olisi parittomien lukujen k ja $d(m^2)$ tulo. Ristiriita osoittaa väitteen oikeaksi.

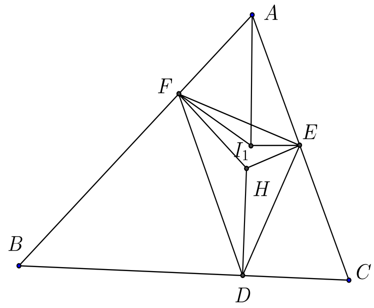
2009.11. Piirretään myös C:n kautta BP:n suuntainen suora m. Leikatkoon PK ℓ:n pisteessä X ja PL m:n pisteessä Y. Leikatkoon vielä KL ℓ:n pisteessä Q. Peilataan kuvio suorassa BM. Silloin A kuvautuu pisteeseen C, suora PK suoraksi PL ja leikkauspiste X leikkauspisteeksi Y. Peilaus säilyttää kulmat, joten $\angle MXQ = \angle MYC$. Mutta $MX = MY$, $MA = MC$ ja $AX = CY$. Kolmkiot AMX ja CMY ovat yhteneviä (sss). Siis $\angle AXM = \angle MYC = \angle MXQ$. Kulman $\angle MXA$ on vieruskulmansa suuruinen, joten se on suora kulma. Pisteestä M suoralle ℓ piirretty normaali kulkee siis pisteen X kautta, ja väite on todistettu.



2009.12. Olkoon G nelikulmion $ABCD$ lävistäjien leikkauspiste. Kolmiot ABG ja CDG ovat ydenmuotoisia ja yhdenmuotoisuussuhde on $2:1$. Tarkastellaan kolmiota APQ. Koska $QP \perp DC$ ja $DQ = DP$, niin C on PQ:n keskipiste ja AC kolmion APQ keskijana. Koska G jakaa AC:n suhteessa $2:1$, G on kolmion APQ keskijanojen leikkauspiste. Konstruktion mukaan D on kolmion APQ ympärysympyrän keskipiste. Suora DG on siis kolmion APQ Eulerin suora. Eulerin suoralla on myös kolmion ortokeskus, ja keskijanojen leikkauspiste jakaa ortokeskuksen ja ympärysympyrän keskipisteen välisen janan suhteessa $2:1$. Mutta B on Eulerin suoralla ja G jakaa janan BD suhteessa $2:1$. B on siis kolmion APB ortokeskus. QB on kolmion korkeussuora, ja $QB \perp AP$.



2009.13. Sovelletaan Cevan lauseen trigonometrista versiota ensin kolmioihin AFE, BDF ja CED ja sitten kolmioon ABC. Tarkastellaan ensin kolmiota AFE. Jännenelikulmiosta $AFHE$ saadaan heti $\angle FEA = \angle FHA$; koska $HA \perp BC$ ja $HF \perp BA$, $\angle FHA = \angle ABC = \beta$. Vastaavasti $\angle AFE = \angle BCA = \gamma$. Mainitusta jännenelikulmiosta nähdään myös, että $\angle HFE = \angle HAE = 90^\circ - \gamma$ ja vastaavasti $\angle HEF = 90^\circ - \beta$. Koska I_1 on kolmion HEF sisäkeskipiste, $\angle EFI_1 = 45^\circ - \dfrac{1}{2}\gamma$ ja $\angle FEI_1 = 45^\circ - \dfrac{1}{2}\beta$. Nyt



$\angle AFI_1 = \gamma + 45^\circ - \dfrac{1}{2}\gamma = 45^\circ + \dfrac{1}{2}\gamma$ ja $\angle AEI_1 = 45^\circ + \dfrac{1}{2}\beta$. Janat AI_1, FI_1 ja EI_1 kulkevat saman pisteen kautta, joten Cevan lauseen trigonometrinen versio sovellettuna kolmioon

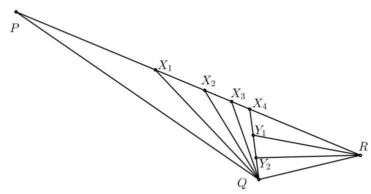
AFE antaa

$$\frac{\sin\angle BAI_1}{\sin\angle I_1AC}\cdot\frac{\sin\left(45^\circ-\dfrac{1}{2}\gamma\right)}{\sin\left(45^\circ+\dfrac{1}{2}\gamma\right)}\cdot\frac{\sin\left(45^\circ+\dfrac{1}{2}\beta\right)}{\sin\left(45^\circ-\dfrac{1}{2}\beta\right)}=1.$$

Kolmiosta BDF sekä pisteestä I_2 ja kolmiosta CED ja pisteestä I_3 saadaan analogiset yhtälöt. Kun ne kerrotaan keskenään, saadaan

$$\frac{\sin\angle BAI_1}{\sin\angle I_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBI_2}{\sin\angle I_2BA}\cdot\frac{\sin\angle ACI_3}{\sin\angle I_3CB}=1.$$

Kun nyt sovelletaan Cevan lauseen trigonometrista versiota kolmioon ABC, saadaan haluttu tulos: suorat AI_1, BI_2 ja CI_3 leikkaavat toisensa samassa pisteessä.



2009.14. Tällaiset kolmiot voidaan muodostaa kaikilla n. Olkoon $t=\dfrac{1}{2n+1}\cdot 180^\circ$. Konstruoidaan kolmio A_i niin, että sen kulmat ovat t, it ja $(2n-i)t$, $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$. Mitkään kaksi kolmiota A_i ja A_j eivät ole yhdenmuotoisia, koska niiden suurimmat kulmat ovat eri suuria. Osoitetaan sitten, että jokaisella k, $1\le k\le n$, sellainen kolmio PQR, jossa $\angle RPQ=t$, $\angle PQR=(2n-k)t$ ja $\angle QRP=kt$, voidaan jakaa n:ksi kolmioksi, joista kukin on yhdenmuotoinen yhden kolmion A_i kanssa. Tätä varten valitaan ensin janalta PR pisteet $X_0=P$, $X_1,\,\ldots,\,X_{n-k}$ niin, että $\angle X_jQX_{j+1}=t$. Silloin jokainen kulma $QX_jX_j+1=(j+1)t$, joten $n-k$ kolmiota $X_{j-1}QX_j$ ovat yhdenmuotoisia kukin kolmion A_j kanssa. Kolmiossa QRX_{n-k} on $\angle RX_{n-k}Q=(n-k+1)t$. Valitaan nyt janalta $X_{n-k}Q$ pisteet $Y_0=X_{n-k}$, $Y_1,\,\ldots,\,Y_k=Q$ niin, että $\angle Y_jRY_{j+1}=t$. Samoin kuin edellä saadaan $\angle RY_{j-1}Y_j=(n-k+j)t$. Kolmiot $RY_{j-1}Y_j$ ovat siis yhdenmuotoisia kolmioiden A_{n-k+j} kanssa, $j=1,\,\ldots,\,k$. Kuvassa tilanne, kun $n=7$ ja $k=3$.

2009.15. Olkoon T_i, $i=1,\,2,\,\ldots,\,m$, nelikulmion Q_i ala. Silloin $T_1+T_2+\cdots+T_m=1$. Jos nelikulmion Q_i sivut ovat a_i, b_i, c_i ja d_i ja sivujen a_i, b_i välinen kulma α_i sekä sivujen c_i, d_i välinen kulma γ_i, niin $4T_i=2a_ib_i\sin\alpha_i+2c_id_i\sin\gamma_i\le 2a_ib_i+2c_id_i\le a_i^2+b_i^2+c_i^2+d_i^2$. Väite seuraa.

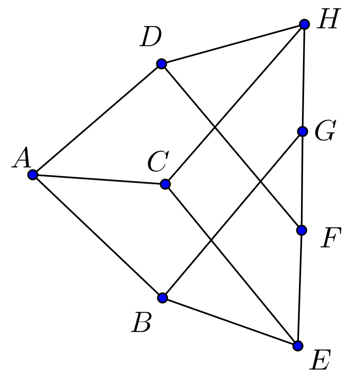
2009.16. Jos hoipertelussa on a kappaletta askelia $(1,\,1)$, b kappaletta askelia $(1,\,-1)$ ja c kappaletta askelia $(-1,\,1)$, niin x-akselin suuntan otettujen askelien määrä on $a+b-c=2n$ ja y-akselin suuntaan otettujen askelien määrä on $a-b+c=0$. Näistä ratkaistaan $a=n$. Olkoot nyt $(x_i,\,y_i)$, $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$ ne pisteet, joihin n $(1,\,1)$-muotoista askelta päättyvät. Koska askeleet $(1,\,-1)$ ja $(-1,\,1)$ tapahtuvat suorien $x+y=k$ suuntaisesti, jokainen piste $(x_i,\,y_i)$ on suoralla $x+y=2i$. Pisteet $(x_i,\,y_i)$ määrittävät hoipertelun yksikäsitteisesti: pisteen $(x_i,\,y_i)$ ja $(x_{i+1},\,y_{i+1})$ välissä voi olla vain tarvittava määrä askelia $(1,\,-1)$ tai $(-1,\,1)$ pitkin suoraa $x+y=2i$. Piste ei voi olla $(2n,\,0)$ eikä $(0,\,2n)$ (koska askel tällöin alkaisi muualta kuin tason ensimmäisestä neljänneksestä). Suoralla $x+y=2i$ on siis $2i-1$ mahdollista pistettä $(x_i,\,y_i)$ ja hoiperteluja voi olla enintään $1\cdot 3\cdots(2n-1)$ kappaletta. Jokaiseen jonoon $(x_1,\,y_1)$, $(x_2,\,y_2)$, $\ldots$, $(x_n,\,y_n)$ voidaan liittää hoipertelu. Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis $1\cdot 3\cdots(2n-1)$.

2009.17. Voidaan löytää ainakin 8 tehtävän ehdon täyttävää lukua. On olemassa 8 erilaista kolmikkoa $(a,\,b,\,c)$, missä $a,\,b,\,c = \pm 1$. Jokaista kolmikkoa kohden löytyy kokonaisluku k, jolle $k \equiv a \bmod 7$, $k \equiv b \bmod 11$ ja $k \equiv c \bmod 13$. Jos k_1 ja k_2 ovat kaksi näistä luvuista, niin $k_1 + k_2$ on $\equiv 0$ modulo 7, 11 tai 13.

Olkoon sitten S lukujoukko, jossa on $n > 8$ tehtävän ehdon mukaista lukua. Olkoon $S_7 = \{x \in S \mid \exists y \in S : 7|(x+y)\}$. Määritellään vastaavasti S_{11} ja S_{13}. Selvästi $S = S_7 \cup S_{11} \cup S_{13}$. Tarkastellaan joukkoa S_7. Jos siinä olisi parillinen määrä eri lukuja $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{2p}$ niin, että modulo 7 olisi $x_1 + x_2 \equiv x_2 + x_3 \equiv \ldots \equiv x_{2n} + x_{2n+1} \equiv x_{2n+1} + x_1 \equiv 0$, olisi $x_1 \equiv -x_2 \equiv \ldots \equiv x_{2n+1} \equiv -x_1$. Tällöin $2x_1$ olisi jaollinen 7:llä ja siis x_1 olisi jaollinen 7:llä, vastoin oletusta. Osoitetaan, että S voidaan jakaa kahdeksi sellaiseksi osajoukoksi S_7' ja S_7'', että jos x ja y kuuluvat samaan osajoukkoon, niin $x + y$ ei ole jaollinen 7:llä. Jos $S_7 = \emptyset$, mikä tahansa S:n ositus kelpaa. Muussa tapauksessa olkoon x_1 jokin S_7:n luku. Olkoon se joukossa S_7'. Sijoitetaan kaikki ne luvut y, joille $7|(x_1 + y)$ joukkoon S_7''. Jos y on jokin edellisistä luvuista, sijoitetaan kaikki luvut z, joille $7|(y + z)$ joukkoon S_7' jne. Jos jokin luku olisi sekä S_7':ssa että S_7'':ssa, syntyisi aikaisemmin mahdottomaksi osoitettu paritonterminen jono. Jos kaikki S_7:n alkiot eivät ole tulleet käsitellyiksi, valitaan lopuista jokin, x_2 ja sijoitetaan se jompaankumpaan joukoista S_7', S_7'' ja jatketaan kuten edellä. Lopuksi sijoitetaan kaikki ne luvut x, joille kaikki luvut $x+y$, $y \in S$ ovat jaottomia 7:llä joukkoon S_7'. Konstruktion mukaan on selvää, että minkään kahden S_7' luvun summa ei ole jaollinen 7:llä eikä minkään kahden S_7'' luvun summa ole jaollinen 7:llä. Samalla tavalla voidaan joukko S osittaa joukoiksi osittaa osajoukoiksi S_{11}' ja S_{11}'' sekä S_{13}' ja S_{13}''. Koska S:ssä on ainakin 9 alkiota, jotkin kaksi niistä kuuluvat yhtä aikaa samaan joukkoon kaikissa kolmessa osituksessa. Näiden lukujen summa ei ole jaollinen 7:llä, 11:llä eikä 13:lla. Ristiriita osoittaa, että suurin tehtävässä kysytty n voi olla enintään 8.

2009.18. Osoitetaan, että pienin m on 3 kaikilla n. Jos $m = 1$, kaikkien kaupunkien tärkeysindeksi on sama, $n - 1$. Siis $m \geq 2$. Oletetaan, että $m = 2$. Silloin mahdollisia tärkeysindeksejä ovat $n-1$, n, $n+1$, $\ldots$, $2(n-1)$. Näitä on n kappaletta, joten jos kaikki tärkeysindeksit ovat eri suuria, jokainen jonon luku on jonkin kaupungin tärkeysindeksi. Mutta silloin jostakin kaupungista lähteviin kaikkiin teihin liittyy luku 1 ja jostakin kaupungista lähteviin teihin luku 2. Koska nitä kaupunkeja yhdistää tie, syntyy ristiriita. Olkoon sitten $m = 3$. Oletetaan, että kaupunkeja on pariton määrä, $n = 2k - 1$. Numeroidaan kaupungit 1:stä $2k$:hon. Liitetään kaikkiin kaupungista 1 lähteviin teihin luku 1. Liitetään sitten kaupungista 2 kaupunkiin $2k-1$ johtavaan tiehen luku 2 ja luku 1 kaikkiin muihin kaupungista 2 lähteviin teihin luku 1. Kaupungista 3 lähteviin teihin liitetään luku 1, paitsi kaupunkeihin $2k-2$ ja $2k-3$ vieviin. Jatketaan näin, kunnes tullaan k:nteen kaupunkiin. Sen kaupunkeihin $k+1,\,\ldots,\,2k-1$ liittävät tiet saavat luvun 2. Nyt kaupunkien $1,\,2,\,\ldots,\,k$ tärkeysindeksit ovat $2k-2$, $2k-1$, $\ldots$, $3k-3$. Jo tehdyt numeroinnit ovat kerryttäneet kaupungeille $k+1,\,\ldots,\,2k-1$ tärkeysindeksiä keskenään eri suuret määrät $k+1$, $k+2$, $\ldots$, $2k-1$. Liitetään nyt jokaiseen kaupunkeja $k+1,\,\ldots,\,2k-1$ yhdistävään tiehen numero 3. Silloin kaikkien kaupunkien tärkeysindeksi on eri suuri. – Jos kaupunkien määrä on parillinen, numerointi voidaan tehdä analogisella tavalla.

2009.19. Osoitetaan, että ehdot voivat toteutua. Koska jokainen juhlija tuntee kolme muuta, tuttavuussuhteita on kaikkiaan $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$. Olkoon A yksi juhlijoista. Hän tuntee juhlijat B, C ja D. Tehtävän ensimmäisen ehdon vuoksi ketkään kaksi joukon $\{B, C, D\}$ jäsentä eivät tunne toisiaan. Jokaisen heistä on siis tunnettava kaksi lopuista juhlijoista E, F, G ja H. Viimemainituissa on oltava kaksi sellaista, jotka tuntevat kaksi joukon $\{B, C, D\}$ jäsentä, ja kaksi sellaista, jotka tuntevat yhden. Nyt on käytetty 9 tuttavuussuhdetta. Loppujen kolmen on vallittava joukon $\{E, F, G, H\}$ jäsenten kesken. Jos yksi tämän joukon jäsenistä, esimerkiksi E, tuntisi kaikki muut, niin nelikko A, F, G, H ei toteuttaisi jälkimmäistä ehtoa. Ainoa mahdollisuus on, että joukossa $\{E, F, G, H\}$ kolme tuntemisrelaatiota järjestävät joukon lineaarisesti. Voidaan olettaa, että E tuntee F:n, F G:n ja G H:n. Jos E tuntee B:n ja C:n ja jos F on sellainen johlija, joka tuntee vain yhden joukon $\{B, C, D\}$ jäsenen, niin tämän jäsenen on oltava D. Nyt G ei voi tuntea D:tä, joten G tuntee esimerkiksi B:n. Silloin C ja D voivat olla H:n tuttavia. Suoritettu konstruktio täyttää tehtävän ensimmäisen ehdon. Jälkimmäisen ehdon toteutumisen tarkistamiseksi riittää, että jokaisen juhlijan X kohdalla tarkastetaan niitä neljää juhlijaa, jotka eivät tunne X:ää. Näiden joukossa on aina kaksi paria tuttuja, ja pareista yksi tulee sellaiseen nelikkoon, jossa on X ja kolme X:ää tuntematonta.



2009.20. Seuraava kaavio osoittaa, että järjestely on mahdollinen. Sairaalat on numeroitu 1:stä 16:een ja samalla rivillä olevat päivystävät yhtä aikaa.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	5	9	13
2	8	10	15
3	6	11	16
4	7	12	14

1	6	10	14
2	7	9	16
3	5	12	15
4	8	11	13

1	7	11	15
2	6	12	13
3	8	9	14
4	5	10	16

1	8	12	16
2	5	11	14
3	7	10	13
4	6	9	15