Baltic Way 2017

Version: *Finnish*

Sorø, 11. marraskuuta, 2017

Aikaa käytettävissä: 4,5 tuntia.
Ensimmäisten 30 minuutin aikana voi esittää kysymyksiä.
Vain kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.

Tehtävä 1. Olkoon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ääretön jono reaalilukuja, joille pätee $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$ kaikille positiivisille kokonaisluvuille n. Osoita, että

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

kaikille positiivisille kokonaisluvuille n.

Tehtävä 2. Onko olemassa äärellistä reaalilukujen joukkoa, jonka alkioiden summa on 2, jonka alkioiden neliöiden summa on 3, jonka alkioiden kuutioiden summa on 4, ..., ja jonka alkioiden yhdeksänsien potenssien summa on 10?

Tehtävä 3. Positiiviset kokonaisluvut $x_1, \ldots, x_m$ (jotka eivät välttämättä ole erisuuria) kirjoitetaan liitutaululle. Tiedetään, että jokainen luvuista $F_1, \ldots, F_{2018}$ voidaan esittää yhden tai useamman liitutaululla esiintyvän luvun summana. Mikä on lukumäärän m pienin mahdollinen arvo?

(Tässä $F_1, \ldots, F_{2018}$ ovat ensimmäiset 2018 Fibonaccin lukua: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ kun $k > 1$.)

Tehtävä 4. Sanomme, että k muuttujan *lineaarinen muoto* on lauseke muotoa $P(x_1,\ldots,x_k) = a_1x_1+\ldots+a_kx_k$ reaalilukuvakioilla $a_1, \ldots, a_k$. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n ja 2017 muuttujan lineaariset muodot $P_1, \ldots, P_n$, joille pätee

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2017} = P_1(x_1,\ldots,x_{2017})^{2017}+\ldots+P_n(x_1,\ldots,x_{2017})^{2017}$$

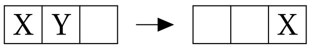
kaikilla reaaliluvuilla $x_1, \ldots, x_{2017}$.

Tehtävä 5. Etsi kaikki funktiot $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x)+y)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Tehtävä 6. 4×4-laudalle on asetettu viiteentoista ruutuun nappula ja jäljelle jäänyt ruutu on tyhjä. Kun kahdessa vierekkäisessä ruudussa (joilla on yhteinen sivu) on kummassakin nappula, voi toisella nappulalla hypätä toisen yli seuraavaan ruutuun, kunhan se on tyhjä. Nappula, jonka yli näin hypättiin, poistetaan laudalta.

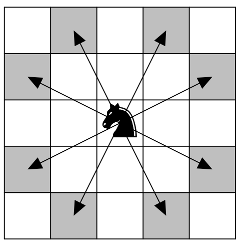


Mille tyhjän ruudun sijainneille alkuasetelmassa on mahdollista päästä asetelmaan, jossa on jäljellä vain yksi nappula?

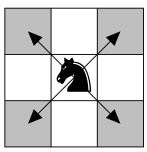
Tehtävä 7. Täysgraafissa on 30 kärkeä ja sen jokainen särmä on väritetty joko punaisella tai sinisellä. On sallittua valita kolmio, joka ei ole yksivärinen, ja vaihtaa sen kaksi samanväristä särmää toisen värisiksi niin, että kolmiosta tulee yksivärinen. Osoita, että tätä operaatiota toistamalla koko graafin voi aina muuttaa yksiväriseksi.

(Täysgraafi on graafi, jossa mitkä tahansa kaksi kärkeä on aina yhdistetty särmällä.)

Tehtävä 8. Šakkipelin ratsu on satuttanut jalkansa ja ontuu: se tekee vuorotellen tavallisia siirtoja ja sellaisia siirtoja, joissa se liikkuu vain yhden askeleen viistosti johonkin naapuriruutuun.



Tavallinen siirto



Lyhyt siirto

Ontuva ratsu liikkuu 5×6-šakkilaudalla aloittaen tavallisella siirrolla. Mikä on suurin määrä siirtoja, jotka se voi tehdä, jos se aloittaa haluamastaan ruudusta mutta sen ei ole sallittua käydä missään ruudussa (aloitusruutu mukaan lukien) useammin kuin kerran?

Tehtävä 9. Positiivinen kokonaisluku n on *varsin tanskalainen*, jos säännöllisen kuusikulmion voi osittaa n yhteneväksi monikulmioksi. Osoita, että on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua n, joille sekä n että $2^n + n$ ovat varsin tanskalaisia.

Tehtävä 10. Rakentaja ja Hajoittaja rakentavat muuria. Rakentajalla on varasto vihreitä kuutiopalikoita ja Hajoittajalla varasto punaisia kuutiopalikoita. Kaikki palikat ovat samankokoisia. Maahan on merkitty liidulla m ruudun rivi merkitsemään palikoiden paikkoja. Rakentaja ja Hajoittaja asettavat vuorotellen palikan muuriin, joko maassa olevaan ruutuun tai jo jonkin paikallaan olevan palikan päälle niin, että palikkatornin korkeus ei koskaan ylitä n palikan korkeutta. Rakentaja laittaa ensimmäisen palikan.

Rakentaja lyö vetoa, että hän voi muodostaa vihreän rivin, eli saada jokaiseen m palikkatorniin samalle korkeudelle vihreän palikan. Hajoittaja puolestaan lyö vetoa, että hän voi estää Rakentajaa saamasta tällaista riviä aikaiseksi. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (m,n), joilla Rakentaja pystyy varmasti voittamaan vedon.

Tehtävä 11. Teräväkulmaisen kolmion ABC ortokeskus on H ja sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I. Kolmion BCI ympäripiirretty ympyrä leikkaa janan AB pisteessä P, joka ei ole B. Olkoon K pisteen H projektio suoralle AI, ja olkoon Q pisteen P peilikuva pisteen K suhteen. Osoita, että B, H ja Q ovat samalla suoralla.

Tehtävä 12. Suora ℓ sivuaa ympyrää S_1 pisteessä X ja ympyrää S_2 pisteessä Y. Piirretään suora m, joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa ja leikkaa ympyrän S_1 pisteessä P ja ympyrän S_2 pisteessä Q. Osoita, että osamäärä XP/YQ ei riipu suoran m valinnasta.

Tehtävä 13. Olkoon ABC kolmio, jossa $\angle ABC = 60°$. Olkoon kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I ja olkoon sen ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O. Olkoon M kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän sen kaaren BC keskipiste, joka ei kulje pisteen A kautta. Määritä $\angle BAC$, kun tiedetään, että $MB = OI$.

Tehtävä 14. Piste P on terävän kulman $\angle BAC$ sisällä. Oletetaan, että $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Piste D on janalla BA ja piste E janalla CA siten, että $BD = BP$ ja $CP = CE$. Piste F on janalla AC ja piste G janalla AB siten, että $DF \perp AB$ ja $EG \perp AC$. Osoita, että $PF = PG$.

Tehtävä 15. Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Mikä on suurin mahdollinen määrä yli 180° kulmia, joka tason n-kulmiolla voi olla, jos se ei leikkaa itseään ja sen kaikki sivut ovat keskenään yhtä pitkiä?

Tehtävä 16. Onko millä tahansa ihmisjoukolla mahdollista valita positiivinen kokonaisluku N ja liittää jokaiseen joukon ihmiseen positiivinen kokonaisluku niin, että kahden ihmisen lukujen tulo on jaollinen luvulla N jos ja vain jos he ovat ystävyksiä?

Tehtävä 17. Onko yhtälöllä

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

ääretön määrä positiivisia kokonaislukuratkaisuita?

Tehtävä 18. Olkoon $p > 3$ alkuluku ja olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ lukujen $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ permutaatio. Mille p on aina mahdollista määrittää jono $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ kun tiedetään jäännökset $a_i a_j$ modulo p kaikille $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$, joilla $i \neq j$?

Tehtävä 19. Kun $n \geq 1$ on kokonaisluku, olkoon $a(n)$ lukujen 2017 ja $n \cdot 2017$ yhteenlaskussa esiintyvien muistinumeroiden kokonaismäärä. Ensimmäiset arvot ovat $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, jotka nähdään yhteenlaskuista

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Osoita, että

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

Tehtävä 20. Olkoon S niiden järjestettyjen kokonaislukuparien (a,b) joukko, joille $0 < 2a < 2b < 2017$ ja $a^2 + b^2$ on luvun 2017 monikerta. Osoita, että

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b.$$