Baltian Tie 2015
Koeaika: 9.00–13.30
Kysymyksiä voi kysyä 9.00–9.30.
Vain kirjoitusvälineet ovat sallittuja.
Language: Finnish

1. Tasasivuinen kolmio jaetaan n^2 pienempään yhdenmuotoiseen tasasivuiseen kolmioon ($n \geq 2$). Määritä kaikki tavat, jolla jokaiseen kolmion kärkipisteeseen (pisteitä on $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$) voidaan kirjoittaa reaaliluku siten, että kolmen tällaisen luvun summa on nolla silloin kuin niitä vastaavat kärkipisteet muodostavat kolmion jonka sivut ovat yhdensuuntaiset alkuperäisen ison kolmion kanssa.

2. Olkoot n positiivinen kokonaisluku ja $a_1, \dots, a_n$ reaalilukuja joille $0 \leq a_i \leq 1$ kun $i = 1, \dots, n$. Osoita, että
$$(1 - a_1^n)(1 - a_2^n) \cdots (1 - a_n^n) \leq (1 - a_1 a_2 \cdots a_n)^n.$$

3. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Etsi kaikki ei-vakiot reaalilukukertoimiset polynomit $P(x)$, joille pätee kaikilla reaaliluvuilla x
$$P(x)P(x^2)P(x^3) \cdots P(x^n) = P(x^{\frac{n(n+1)}{2}})$$

4. Perhe käyttää vain kolmen värisiä vaatteita: punaisia, sinisiä ja vihreitä. Jokaiselle värille on oma pyykkikorinsa ja kaikki pyykkikorit ovat samanlaisia. Ensimmäisen viikon alussa kaikki pyykkikorit ovat tyhjiä. Joka viikko perheessä syntyy 10 kg pyykkiä (mutta eri värien osuus vaihtelee). Pyykki lajitellaan ensin värin mukaan pyykkikoreihin ja sitten painavimman pyykkikorin pyykki pestään (jos painavimpia on useita, yhden korin pyykit pestään). Mikä on pienin mahdollinen pyykkikorin kapasiteetti, jos halutaan että pyykkikorien tila aina riittää?

5. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jotka toteuttavat kaikilla reaaliluvuilla x ja y yhtälön
$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y)).$$

6. Kaksi pelaajaa pelaa seuraavanlaista peliä vuorosiirroin. Aluksi on kaksi kasaa, joista toisessa on 10000 ja toisessa 20000 pelimerkkiä. Siirrolla pelaaja poistaa minkä tahansa positiivisen määrän merkkejä yhdestä pinosta tai poistaa $x > 0$ pelimerkkiä toisesta pinosta ja $y > 0$ toisesta pinosta, kunhan $x + y$ on jaollinen luvulla 2015. Pelaaja häviää, jos hän ei pysty tekemään siirtoa. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

7. Hienostuneessa naisten teeseurassa on sata jäsentä. Jokainen nainen on juonut (yksityisesti) teetä täsmälleen 56 seuran muun jäsenen kanssa. Johtokunnassa on 50 naista. He ovat kaikki juoneet teetä keskenään. Osoita, että koko naisten seura voidaan jakaa kahteen ryhmään niin, että yhden ryhmän sisällä jokainen nainen on juonut teetä kaikkien muiden ryhmän naisten kanssa.

8. New Yorkin suorakulmainen tieverkosto on inspiroinut *Manhattan-etäisyyden*, joka kahden pisteen (a, b) ja (c, d) välillä määritellään olemaan
$$|a - c| + |b - d|.$$
Joukon eri pisteiden välillä on vain kahta erisuurta Manhattan-etäisyyttä. Mikä on joukon suurin mahdollinen pisteiden määrä?

9. Olkoon $n > 2$ kokonaisluku. Pelikorttipakassa on $\frac{n(n-1)}{2}$ korttia, ja ne on numeroitu
$$1, 2, 3, \dots, \frac{n(n-1)}{2}.$$
Kaksi korttia muodostaa *maagisen parin*, jos niiden numerot ovat peräkkäiset tai jos niiden numerot ovat 1 ja $\frac{n(n-1)}{2}$.
Millä luvuilla n on mahdollista jakaa kortit n pinoon niin, että minkä tahansa kahden pinon korttien joukossa on täsmälleen yksi maaginen pari?

10. Joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkoa S kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos kaikilla $a \in S$ on olemassa $b \in S$ niin että $\frac{a+b}{2} \in S$.

    a) Olkoon $k > 1$ kokonaisluku ja olkoon $n = 2^k$. Osoita, että jokainen joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukko S on tasapainoinen, kun $|S| > \frac{3n}{4}$.

    b) Onko olemassa $n = 2^k$, missä $k > 1$ on kokonaisluku, jolle jokainen joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukko S on tasapainoinen, jos $|S| > \frac{2n}{3}$.

11. Suunnikkaan $ABCD$ lävistäjät leikkaavat pisteessä E. Kulmien $\angle DAE$ ja $\angle EBC$ puolittajat pisteessä F. Lisäksi tiedetään että $ECFD$ on suunnikas. Määritä suhde $AB : AD$.

12. Ympyrä kulkee kolmion ABC kärjen B kautta ja leikkaa sivut AB ja BC pisteissä K ja L, tässä järjestyksessä. Lisäksi tämä ympyrä sivuaa janaa AC janan keskipisteessä M. Piste N on ympyrän kaarella BL (sillä kaarella jolla piste K ei ole) siten, että $\angle LKN = \angle ACB$. Lisäksi tiedetään, että kolmio CKN on tasasivuinen. Laske $\angle BAC$.

13. Olkoon piste D kolmion ABC kärjesta B piirretyn korkeusjanan kantapiste ja $AB = 1$. Kolmion BCD sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste on sama kuin kolmion ABC keskijanojen leikkauspiste. Laske sivujen AC ja BC pituudet.

14. Olkoon AD korkeusjana kolmiossa ABC joka ei ole tasakylkinen. Olkoon M sivun BC keskipiste ja piste N pisteen M kuva peilauksessa pisteen D yli. Kolmion AMN ympäripiirretty ympyrä leikkaa janan AB pisteessä $P \neq A$ ja janan AC pisteessä $Q \neq A$. Osoita, että suorat AN, BQ ja CP leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.

15. Kolmiossa ABC kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa suoran BC pisteessä D ja kulman $\angle BAC$ vieruskulman puolittaja leikkaa suoran BC pisteessä E. Olkoon piste $F \neq A$ suoran AD ja kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän leikkauspiste. Olkoon piste O kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän keskipiste ja piste D' pisteen D kuva peilauksessa pisteen O yli. Osoita, että $\angle D'FE = 90°$.

16. Olkoon $P(n)$ luvun n suurin alkutekijä. Millä kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 2$ pätee

$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor?$$

    (Huomaa, että $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x)

17. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla luku $n^{n-1} - 1$ on jaollinen luvulla 2^{2015}, mutta ei luvulla 2^{2016}.

18. Olkoon $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ astetta $n \geq 1$ oleva polynomi, jolla on n kokonaislukujuurta (jotka eivät välttämättä ole erisuuria). Tiedetään, että on olemassa erisuuret alkuluvut $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ niin, että $a_i > 1$ on luvun p_i potenssi kaikilla $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Etsi luvun n kaikki mahdolliset arvot.

19. Kolme pareittain erisuurta positiivista kokonaislukua a, b, c toteuttaa ehdot

$$a \mid (b-c)^2, \quad b \mid (c-a)^2 \quad \text{ja} \quad c \mid (a-b)^2$$

    ja $\mathrm{syt}(a, b, c) = 1$. Osoita, että ei ole olemassa kolmiota (surkastuneita kolmioita ei lasketa mukaan), jonka sivujen pituudet ovat a, b, c.

20. Kokonaisluvulle $n \geq 2$ määritellään suure A_n olemaan sellaisten positiivisten kokonaislukujen m lukumäärä, joiden jonkin epänegatiivisen monikerran etäisyys luvusta n on sama kuin luvun n^3 etäisyys lähimpään luvun m epänegatiiviseen monikertaan. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla A_n on pariton. (Kahden luvun a ja b etäisyys on $|a - b|$.)