Baltian Tie 2015

Tehtävät ja ratkaisut

1. *Tasasivuinen kolmio jaetaan n^2:ksi pienemmäksi yhteneväksi tasasivuiseksi kolmioksi ($n \geq 2$). Määritä kaikki tavat, joilla jokaiseen kolmion kärkipisteeseen (pisteitä on $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$) voidaan kirjoittaa reaaliluku siten, että kolmen tällaisen luvun summa on nolla silloin, kun niitä vastaavat pisteet muodostavat kolmion, jonka sivut ovat yhdensuuntaiset alkuperäisen ison kolmion sivujen kanssa.*

Ratkaisu. Numeroidaan kärjet ja niihin liitetyt reaaliluvut seuraavasti:

$$\begin{array}{ccccc} & & a_1 & & \\ & a_2 & & a_3 & \\ a_4 & & a_5 & & a_6 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Jos kahdella pikkukolmiolla on yhteinen sivu, niin kolmioiden kolmansissa kärjissä on oltava sama luku. Jos $n = 2$, on siis $a_1 = a_5$, $a_2 = a_6$ ja $a_3 = a_5$. Luvut $a_1 = x$, $a_2 = y$ ja $a_3 = z$ määrittävät siis kaikki luvut, ja luvuiksi x, y, z kelpaavat kaikki kolmikot (x, y, z), jolle $x + y + z = 0$. Jos $n = 3$, seuraa edellä tehdystä havainnosta, että $a_1 = a_5$, $a_7 = a_5$ ja $a_{10} = a_5$. Koska a_1, a_7, a_{10} ovat tasasivuisen kolmion kärjet, on $a_1 + a_7 + a_{10} = 3a_5 = 0$, joten $a_1 = a_5 = a_7 = a_{10} = 0$. Jos nyt $a_2 = x$, niin on oltava $a_3 = -x$, $a_6 = a_8 = x$ ja $a_5 = a_9 = -x$. Jokaisella x

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & x & & -x & & \\ & -x & & 0 & & x & \\ 0 & & x & & -x & & 0 \end{array}$$

on ratkaisu. Olkoon sitten $n > 3$. Edellinen päättely voidaan toistaa jokaisen yhdeksän pikkukolmion muodostaman osan suhteen. Nähdään, että kaikki ison kolmion sisäpuolella olevissa kärjissä olevat luvut ovat nollia, koska jokainen sellainen voidaan ympäröidä tapauksen $n = 3$ mukaisella kuviolla. Jokainen ison kolmion sivuilla oleva piste on yhtenä kärkenä sellaisessa kahdesta pikkukolmiosta muodostuvassa suunnikkaassa, jonka vastakkainen kärki on ison kolmion sisällä. Nähdään, että myös jokaiseen ison kolmion sivulla olevaan kärkipisteeseen liittyvä luku on 0.

2. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $a : 1, a_2, \ldots, a_n$ reaalilukuja, joille pätee $0 \leq a_i \leq 1$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$. Osoita, että*

$$(1 - a_1^n)(1 - a_2^n) \cdots (1 - a_n^n) \leq (1 - a_1 a_2 \cdots a_n)^n.$$

Ratkaisu. Koska jokainen $1 - a_i^n$ on positiivinen, voidaan käyttää geometrisen ja aritmeettisen keskiarvon välistä epäyhtälöä:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i^n) \le \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-a_i^n)\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^n\right)^n. \tag{1}$$

Toisaalta, niin ikään geometrisen ja aritmeettisen keskiarvon epäyhtälön perusteella, on

$$\prod_{i=1}^{n}a_i = \left(\prod_{i=1}^{n}a_i^n\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^n.$$

Kun tämä sijoitetaan epäyhtälöön (1), saadaan

$$\left(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^n\right)^n \le \left(1-\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^n,$$

ja väite on todistettu.

3. *Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Etsi kaikki ei-vakiot reaalilukukertoimiset polynomit $P(x)$, joille on voimassa kaikilla reaaliluvuilla x yhtälö*

$$P(x)P(x^2)P(x^3)\cdots P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right). \tag{1}$$

Ratkaisu. Tarkastetaan ensin tapaus, jossa $P(x) = ax^m$. Yhtälö (1) saa silloin muodon $a^n x^{\frac{n(n+1)}{2}m} = ax^{\frac{n(n+1)}{2}m}$ Yhtälö toteutuu identtisenä, jos $a^n = a$. Jos n on parillinen, ainoa mahdollisuus on $a = 1$; jos n on pariton, mahdollisia ovat $a = 1$ ja $a = -1$. Oletetaan sitten, että P ei ole monomi. Silloin $P(x) = ax^m + Q(x)$, missä Q on polynomi, jonka aste on k, $k < m$. Yhtälön (1) vasen puoli on nyt polynomi

$$(ax^m + Q(x))(ax^{2m} + Q(x^2))\cdots(ax^{nm} + Q(x^n)).$$

Tämän polynomin korkeimmanasteisen termin aste on $\frac{1}{2}n(n+1)m$ ja toiseksikorkeimmanasteisen termin aste

$$2m + 3m + \cdots + nm + k = \frac{1}{2}n(n+1)m - m + k.$$

Yhtälön (1) oikeanpuoleisen polynomin korkeimman- ja toiseksikorkeimmanasteisten termien asteluvut puolestaan ovat $\frac{1}{2}n(n+1)m$ ja $\frac{1}{2}n(n+1)k$. Jotta polynomit olisivat samat, on oltava

$$\frac{1}{2}n(n+1)m - m + k = \frac{1}{2}n(n+1)k$$

eli

$$k - m = \frac{1}{2}n(n+1)(k-m).$$

Koska $n \ge 2$, tämä on mahdollista vain, jos $k = m$. Mutta $k < m$, joten $P(x) = ax^m + Q(x)$ ei kelpaa. Ratkaisuja ovat vain polynomit $P(x) = x^m$, jos n on parillinen, ja $P(x) = \pm x^m$, jos n on pariton.

4. *Perhe käyttää vain kolmenvärisiä vaatteita: punaisia, sinisiä ja vihreitä. Jokaiselle värille on oma pyykkikorinsa, ja kaikki pyykkikorit ovat samanlaisia. Ensimmäisen viikon alussa kaikki pyykkikorit ovat tyhjiä. Joka viikko perheessä syntyy 10 kg pyykkiä (mutta eri värien osuus vaihtelee). Pyykki lajitellaan ensin värin mukaan pyykkikoreihin ja sitten painavimman korin pyykki pestään. (Jos painavimpia koreja on useita, vain yhden pyykki pestään.) Mikä on pienin mahdollinen pyykkikorin kapasiteetti, jos halutaan, että pyykkikorien tila aina riittää?*

Ratkaisu. Lasketaan yksikkönö kilogramma. Olkoon a_n pyykin määrä n:nnen viikon pesun jälkeen; $a_0 = 0$. Koska viikon aikana kertyvän pyykin määrä on 10 ja siitä aina pestään vähintään kolmasosa, niin $a_{n+1} \le \frac{2}{3}(a_n + 10)$. Jos $a_n \le 20$, niin $a_{n+1} \le 20$. Siis $a_n \le 20$ kaikilla n. Pyykin määrä juuri ennen pesua pyykin määrä on ≤ 30. Olkoot p, s, v punaisen, sinisen ja vihreän pyykin määrät juuri ennen pesua ja oletetaan, että v on näistä suurin. Silloin heti pesun jälkeen määrät ovat p, s, 0, ja jos määrät juuri ennen seuraavaa pesua ovat p', s', v', niin $p' \le p + 10$ ja $v \ge p$, joten $30 \ge p + s + v \ge 2p \ge 2(p' - 10)$ ja $p' \le 25$. Aivan samoin $s' \le 25$. Selvästi myös $v' \le 10 < 25$. Astia, joka vetää 25 kg pyykkiä riittää varmasti.

Osoitetaan, että pienempi astia ei välttämättä riitä. Jos joka viikko syntyy niin paljon eriväristä pyykkiä, että kaikki astiat tulevat yhtä täyteen, tilanne on se, että alkutilanteesta (0, 0, 0) tullaan viikon lopulla tilanteeseen $\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$, pesun jälkeen tilanteeseen $\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, 0\right)$, seuraavan viikon lopulla tilanteeseen $\left(\frac{50}{9}, \frac{50}{9}, \frac{50}{9}\right)$, pesun jälkeen tilanteeseen $\left(\frac{50}{9}, \frac{50}{9}, 0\right)$ jne., ja ajan mittaan tullaan pesun jälkeen mielivaltaisen lähelle tilannetta (10, 10, 0). Jos seuraavalla viikolla syntyy vain punaista ja sinistä pyykkiä, kumpaakin yhtä paljon, ollaan ennen pesua tilanteessa (15, 15, 0) ja pesun jälkeen tilanteessa (15, 0, 0). Jos nyt seuraavalla viikolla syntyy vain punaista pyykkiä, tilanne ennen pesua on (25, 0, 0). Ei siis selvitä ilman astiaa, jonka kapasiteetti on 25 kg.

5. *Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat kaikilla reaaliluvuilla x ja y yhtälön*

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y)). \tag{1}$$

Ratkaisu. Sijoitetaan yhtälöön (1) $x = y = 0$. Saadaan $f(f(0)) = -2f(0)$. Merkitään $f(0) = a$. Silloin $f(a) = -2a$. Jos nyt sijoitetaan yhtälöön (1) $y = 0$, saadaan $a|x| = a + f\left(x^2\right) - 2a$ ja edelleen $f(x^2) = a\left(|x| + 1\right)$ sekä $f(1) = 2a$. Sijoitetaan nyt yhtälöön (1) $x = z^2$ ja $y = 1$. Saadaan $2az^2 + f\left(z^2\right) = f\left(z^2\right) + f\left(z^4\right) + f(2a) = f\left(z^2\right) + a(z^2+1) + f(2a)$ eli $az^2 = a + f(2a)$. Tässä yhtälön vasen puoli on z:n toisen asteen polynomi, mutta oikea puoli on vakio. Yhtälö voi toteutua kaikilla positiivisilla z:n arvoilla vain, jos $a = 0$. Siis $f(x^2) = 0$ kaikilla x, eli $f(x) = 0$, kun $x \ge 0$. Kun nyt sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön (1), nähdään, että $f(f(y)) = 0$ kaikilla y. Yhtälöstä (1) saadaan nyt

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) = f(yx) = |y|f(x) + xf(y). \tag{2}$$

Sijoitetaan yhtälöön (2) $y = -1$ ja ratkaistaan $f(x)$. Saadaan

$$f(x) = \frac{f(-1)}{2}\left(|x| - x\right),$$

eli, jos merkitään $b = \frac{1}{2}f(-1)$, $f(x) = b(|x| - x)$. On helppo tarkistaa, että tämä funktio toteuttaa yhtälön (1) kaikilla parametrin b valinnoilla.

6. *Kaksi pelaajaa pelaa seuraavanlaista peliä vuorosiirroin. Aluksi on kaksi kasaa, joista toisessa on* 10 000 *ja toisessa* 20 000 *pelimerkkiä. Siirrolla pelaaja poistaa minkä tahansa positiivisen määrän merkkejä yhdestä pinosta tai poistaa* $x > 0$ *pelimerkkiä toisesta pinosta ja* $y > 0$ *pelimerkkiä toisesta pinosta, missä* $x + y$ *on jaollinen luvulla 2015. Pelaaja häviää, jos hän ei pysty tekemään siirtoa. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?*

Ratkaisu. Koska $10000 + 20000 = 30000 = 1790 \mod 2015$, ensimmäinen pelaaja voi ensimmäisellä siirrollaan saattaa kasat tilanteeseen (895, 895). Toinen pelaaja ei voi enää suorittaa jälkimmäistä siirtovaihtoehtoa, vaan hänen on poistettava n merkkiä toisesta kasasta. Ensimmäinen pelaaja voi nyt poistaa n merkkiä toisesta kasasta, ja peli jatkuu samalla tavalla, kunnes ensimmäinen pelaaja on ottanut viimeiset pelimerkit. Voittostrategia on siis aloittavalla pelaajalla.

7. *Hienostuneessa naisten teeseurassa on sata jäsentä. Jokainen jäsen on juonut (yksityisesti) teetä täsmälleen 56 seuran muun jäsenen kanssa. Johtokunnassa on 50 naista. He ovat kaikki juoneet teetä keskenään. Osoita, että seuran jäsenistä voidaan jakaa kahdeksi ryhmäksi niin, että kummankin ryhmän sisällä jokainen nainen on juonut teetä kaikkien muiden ryhmän jäsenten kanssa.*

Ratkaisu. Jokainen johtokunnan jäsen on juonut teetä 49 toisen johtokunnan jäsenen kanssa ja siis tasan seitsemän johtokuntaan kuulumattoman kanssa. Johtokuntaan kuuluvan ja kuulumattoman välisiä teenjuontisuhteita on siis $50 \cdot 7$. Jokainen johtokuntaan kuulumaton on juonut teetä enintään 49 johtokuntaan kuulumattoman kanssa ja siis ainakin seitsemän johtokuntaan kuuluvan kanssa. Näin laskien johtokuntaan kuuluvien ja kuulumattomien välisiä teenjuontisuhteita on $\geq 50 \cdot 7$. Jos joku johtokuntaan kuulumaton olisi juonut teetä yli seitsemän johtokuntaan kuuluvan kanssa, näitä suhteita olisi $> 50 \cdot 7$. Päätellään, että jokainen johtokuntaan kuulumaton on juonut teetä tasan seitsemän johtokuntaan kuuluvan kanssa ja siis 49:n johtokuntaan kuulumattoman kanssa. Kysytty jako on siis johtokunta ja muut.

8. *New Yorkin suorakulmainen katuverkko on inspiroinut Manhattan-etäisyyden. Pisteiden* (a, b) *ja* (c, d) *Manhattan-etäisyydeksi määritellään luku*

$$|a - c| + |b - d|.$$

Kuinka monta pistettä enintään on sellaisessa joukossa, jonka pisteiden välillä on vain kahta eri suurta Manhattan-etäisyyttä?

Ratkaisu. Osoitetaan, että suurin kysyttyjen pisteiden määrä on yhdeksän. Tehdään vastaoletus: olkoon $m \geq 10$, $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m$ ja joukon

$$E = \{(x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2),\, \ldots,\, (x_m,\, y_m)\}$$

jokaisen kahden pisteen välillä on tasan kaksi eri Manhattan-etäisyyttä. Todistetaan ensin aputulos (itse asiassa erikoistapaus *Erdősin ja Szekeresin lauseena* tunnetusta tuloksesta): *Jos lukujonossa* (a_i) *on* $n^2 + 1$ *jäsentä, sillä on* $(n + 1)$*:n jäsenen monotoninen osajono.* Olkoon jokaisella i p_i pisimmän kasvavan ja a_i:hin päättyvän osajonon pituus ja q_i pisimmän a_i:hin päättyvän vähenevän osajonon pituus. Jos $i < j$ ja $a_i \leq a_j$, niin $p_i < p_j$. Jos $i < j$ ja $a_j \leq a_i$, niin $q_i < q_j$. Joka tapauksessa siis $(p_i,\, q_i) \neq (p_j,\, q_j)$, kun $i \neq j$. Jos nyt $1 \leq p_i \leq n$ ja $1 \leq q_i \leq n$, pareja $(p_i,\, q_i)$ olisi enintään n^2 kappaletta. Niitä on kuitenkin $n^2 + 1$ kappaletta; siis jokin p_i tai q_i on ainakin $n + 1$.

Kun tätä tulosta sovelletaan jonoon (y_i), nähdään, että on ainakin neljä indeksiä $i < j < k < l$ niin, että joko $y_i \leq y_j \leq y_k \leq y_l$ tai $y_i \geq y_j \geq y_k \geq y_l$. Koska joukon E pisteet ovat eri pisteitä, niin ei voi olla yhtä aikaa $x_{i_1} = x_{i_2}$ ja $y_{i_1} = y_{i_2}$. Pisteiden $(x_i,\, y_i)$, $(x_j,\, y_j)$ ja $(x_k,\, y_k)$ Manhattan-etäisyydet pisteestä $(x_l,\, y_l)$ ovat kaikki eri suuria, joten joukon E pisteiden välillä on ainakin kolmea eri Manhattan-etäisyyttä.

Toisaalta yhdeksänalkioisen joukon $\{(0,\, 0),\, (\pm 1,\, \pm 1),\, (\pm 2,\, 0),\, (0,\, \pm 2)\}$ pisteiden välillä on vain Manhattan-etäisyyksiä 2 ja 4.

9. *Olkoon* $n > 2$ *kokonaisluku. Korttipakassa on* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *korttia, ja ne on numeroitu*

$$1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, \frac{n(n-1)}{2}.$$

Kaksi korttia muodostaa maagisen parin, jos niiden numerot ovat peräkkäiset tai jos niiden numerot ovat 1 ja $\dfrac{n(n-1)}{2}$*. Millä luvuilla* n *kortit voidaan jakaa* n*:ään pinoon niin, että minkä tahansa kahden pinon korttien joukossa on täsmälleen yksi maaginen pari?*

Ratkaisu. Osoitetaan, että kysyttyjä lukuja ovat kaikki parittomat kokonaisluvut $n > 2$.

Todetaan, että jos jossain pinossa P on maaginen pari, esimerkiksi i ja $i + 1$, niin $i + 3$ on jossain pinossa P'. Silloin pinoissa P ja P' on ainakin kaksi maagista paria. Näin ollen missään yhdessä pinossa ei ole maagista paria.

Oletetaan, että tehtävässä kuvailtu jako on suoritettu. Oletetaan, että jossain pinossa P on maaginen pari, i ja $i + 1$. Kortti $i + 2$ on jossain pinossa P'. Jos $P' \neq P$, niin pinot P ja P' sisältävät kaksi maagista paria; jos $P' = P$, P ja mikä hyvänsä muu pino muodostavat pinoparin, jossa on kaksi maagista paria. Tehtävänmukaisessa jaossa ei siis missään yhdessä pinossa voi olla maagista paria. Pinon P jokaista korttia kohden on oltava kaksi eri pinoa, joissa tämän kortin kanssa maagisen parin muodostavat kortit ovat.

Olkoon nyt n parillinen. Tarkastellaan yhtä pakkaa P. Jokaista sen korttia kohden on oltava kaksi eri pakkaa, joissa tämän kortin kanssa maagisen parin muodostavat kortit ovat. P:n kahta eri korttia kohden olevien pakkojen on oltava eri pakkoja.

Olkoon n parillinen. Olkoon pakassa P_j k_j korttia. Edellisen perusteella $2k_j \le n-1$; siis $k_j < \frac{n-1}{2}$. Mutta silloin

$$\sum_{j=1}^{n} k_j < \frac{n(n-1)}{2}.$$

n ei siis voi olla parillinen.

Olkoon sitten n pariton. Palautetaan mieleen verkkoteorian käsitteet n:n solmun *täydellinen verkko* ja verkon *Eulerin ketju*. Jos täydellisessä verkossa solmujen määrä n on pariton, jokaisen solmun aste on $n-1$ (koska solmu yhdistyy särmällä jokaiseen muuhun solmuun). Täydellisessä n-solmuisesssa verkossa on $\frac{1}{2}n(n-1)$ särmää. Jos verkon jokaisen solmun aste on parillinen, verkossa on umpinainen Eulerin ketju, eli mistä tahansa verkon solmusta alkava ja siihen päättyvä toisiinsa liittyvien särmien jono, joka sisältää kaikki verkon särmät. Tämän voi hahmottaa myös jonon särmien päätepisteiden jonoksi. Tehtävän pakat olkoot täydellisen verkon solmut. Verkon Eulerin ketju synnyttää solmujonon $P_1P_2\ldots P_{\frac{n(n-1)}{2}}P_1$. Jos nyt kortti j sijoitetaan pakkaan P_j, niin maagiset parit ovat pakoissa, joita yhdistää ketjuun ja siis täydelliseen verkkoon kuuluva särmä. (Tämän elegantin konstruktion parittoman n:n tapauksessa esitti Pietarin kilpailujoukkue.)

10. *Joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkoa S kutsutaan tasapainoiseksi, jos kaikilla $a \in S$ on olemassa $b \in S$ niin, että $\frac{a+b}{2} \in S$. Merkitään joukon S alkioiden lukumäärää $|S|$:llä.*

(a) Olkoon $k > 1$ kokonaisluku ja olkoon $n = 2^k$. Osoita, että jokainen joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukko S on tasapainoinen, kun $|S| > \frac{3n}{4}$.

(b) Onko olemassa lukua $n = 2^k$, missä $k > 1$ on kokonaisluku, niin että jokainen joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukko S on tasapainoinen, jos $|S| > \frac{2n}{3}$?

Ratkaisu. (a) Olkoon $m = n - |S|$. Koska n on jaollinen 4:llä, $m \le \frac{n}{4} - 1$. Olkoon $a \in S$ mielivaltainen. Joukossa $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus a$ on $\frac{n}{2} - 1$ lukua, jotka ovat $\equiv a \bmod 2$. Enintään m kappaletta näistä ei kuulu joukkoon S, joten ainakin $\frac{n}{2} - 1 - m \ge \frac{n}{4}$ kuuluu joukkoon S. Jos b on mikä hyvänsä näistä luvuista, niin $\frac{1}{2}(a+b)$ on kokonaisluku. Kaikki tällaiset luvut b ovat eri lukuja, ja niitä on ainakin $\frac{n}{4}$ kappaletta. Mutta enintään $m < \frac{n}{4}$ luvuista ei kuulu joukkoon S. Jokin siis kuuluu. S on määritelmän mukaan tasapainoinen.

(b) Asetetaan jokaisella $j <\le k$

$$A_j = \{2^{j-1}+1,\, 2^{j-1}+2,\, \ldots,\, 2^j\}.$$

Silloin $|A_j| = 2^{j-1}$ ja joukot A_j ovat erillisiä. Olkoon sitten

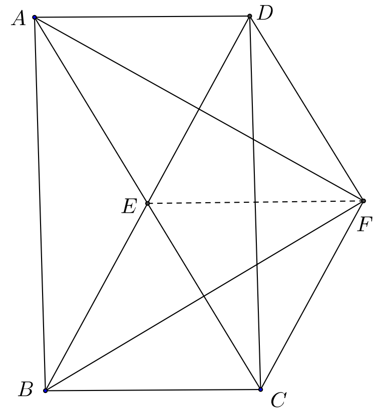
$$S = A_k \cup A_{k-2} \cup \cdots \cup A_p \cup \{1\},$$

missä $p = 2$, jos k on parillinen ja $p = 1$, jos k on pariton. Nyt

$$|S| = 2^{k-1} + 2^{k-3} + \cdots + 2^{p-1} + 1 = \frac{2^{p-1} - 2^{k+1}}{1-4} + 1 = -\frac{2^{p-1}}{3} + \frac{2n}{3} + 1 > \frac{2n}{3}.$$

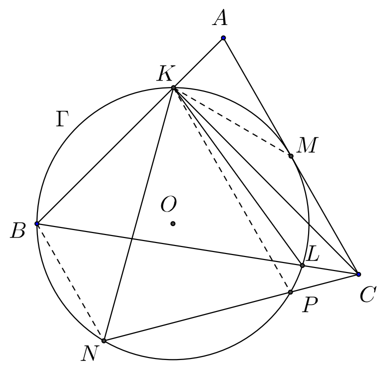
Osoitetaan, että S ei ole tasapainoinen. Valitaan $a = 1$. Olkoon $b \neq 1$ jokin muu S:n alkio. Silloin $b \in A_j$ jollain $j \leq k$. Jos b on parillinen, niin $\frac{1}{2}(1+b)$ ei ole kokonaisluku. Jos b on pariton, niin $1 + b \in A_j$ Mutta tällöin $\frac{1}{2}(1+b) \in A_{j-1}$. Koska S on "joka toisen" A_j:n yhdiste, $\frac{1}{2}(1+b) \notin S$. S ei ole tasapainoinen.

11. *Suunnikkaan $ABCD$ lävistäjät leikkaavat toisensa pisteessä E Kulmien $\angle DAE$ ja $\angle EBC$ puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä F. Lisäksi tiedetään, että $ECFD$ on suunnikas. Määritä suhde $AB : AD$.*



Ratkaisu. Koska suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, $AE = EC = DF$. Koska $AE \| DF$, $AEFD$ on suunnikas ja $\angle DFA = \angle FAE = \angle DAF$. Kolmio DAF on siis tasakylkinen ja $EF = AD = DF$. Samoin nähdään, että $EBCF$ on suunnikas ja kolmio CFB tasakylkinen, joten $EF = BC = CF = BE = ED$. Kaikkiaan siis kolmio EFD on tasasivuinen ja $AB = DC =$ kaksi kertaa kolmion EFD korkeus eli $\sqrt{3} \cdot EF = \sqrt{3} \cdot AD$. Kysytty suhde on $\sqrt{3}$.

12. *Ympyrä kulkee kolmion ABC kärjen B kautta ja leikkaa kolmion sivun AB pisteessä K ja sivun BC pisteessä L. Lisäksi tämä ympyrä sivuaa janaa AC sen keskipisteessä M. Piste N on sillä ympyrän kaarella $\overset{\frown}{BL}$, jolla piste K ei ole, siten että $\angle LKN = \angle ABC$. Lisäksi tiedetään, että kolmio CKN on tasasivuinen. Määritä $\angle BAC$.*



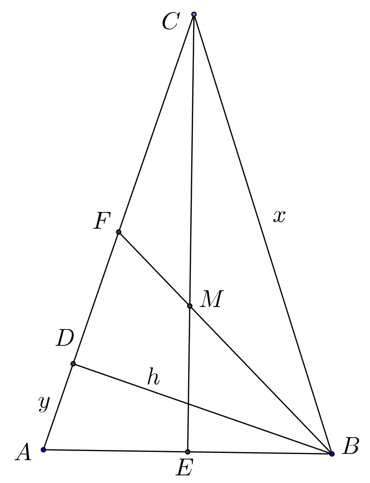
Ratkaisu. Olkoon tehtävän ympyrä Γ ja O sen keskipiste. Konstruktion ja kehäkulmalauseen nojalla on $\angle ACB = \angle LKN = \angle LBN = \angle CBN$, joten suorat AC ja BN ovat yhdensuuntaisia. Nelikulmio $ABNC$ on siis puolisuunnikas. Koska O on sekä AC:n että BN:n keskinormaalilla, puolisuunnikas on symmetrinen suoran OM suhteen. Jos P on NC:n ja Γ:n leikkauspiste, niin P ja K ovat symmetrisiä OM:n suhteen, mistä seuraa $KP \perp OM$ ja $KP \| AC$. Kaaret $\overset{\frown}{KM}$ ja $\overset{\frown}{PM}$ ovat yhtä suuret. Siis myös $\angle PNM = \angle KNM$. NM on kulman $\angle KNC$ puolittaja, joten NM on tasasivuisen kolmion KNC sivun KC keskinormaali. Mutta tästä seuraa $KM = MC = MA$. Piste K on ympyrällä, jonka keskipiste on M ja halkaisija AC. Siis $\angle AKC = 90°$.

Puolisuunnikkaan $ABNC$ tasakylkisyyden vuoksi $2 \cdot \angle CAB = \angle CAB + \angle ACN = \angle CAB + 60° + (90° - \angle CAB) = 150°$. Siis $\angle CAB = 75°$.

13. *Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä B piirretyn korkeusjanan kantapiste ja $AB = 1$. Kolmion BCD sisäympyrän keskipiste on sama kuin kolmion ABC keskijanojen leikkauspiste. Laske sivujen AC ja BC pituudet.*

Ratkaisu. Olkoon M kolmion ABC keskijanojen leikkauspiste ja kolmion BCD sisäympyrän keskipiste eli kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste ja olkoon E sivun AB keskipiste. Silloin CE on kolmion ABC kulman $\angle BCA$ puolittaja. Tästä seuraa, että ABC on tasakylkinen, $AC = BC = x$. Olkoon $AD = y$, $BD = h$. Suorakulmaisesta kolmiosta ABD saadaan $y^2 + h^2 = AB^2 = 1$ ja suorakulmaisesta kolmiosta BCD $(x-y)^2 + h^2 = x^2$ eli $2xy = 1$. Olkoon vielä F AC:n keskipiste. Silloin $FC = \frac{x}{2}$ ja $DF = \frac{x}{2} - y$. Koska BF on kulman $\angle DBC$ puolittaja, niin

$$\frac{\frac{x}{2} - y}{\frac{x}{2}} = \frac{DF}{FC} = \frac{BD}{BX} = \frac{h}{x}. \tag{1}$$

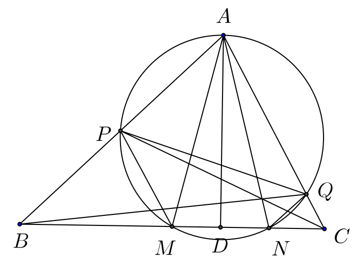


(1) sievenee muotoon $x - 2y = h$. Puolittain neliöön korottaen saadaan $x^2 - 4xy + 4y^2 = 1 - y^2$ ja $5y^2 + x^2 = 3$. Kun otetaan vielä (uudelleen) huomioon $2xy = 1$ ja merkitään $x^2 = t$, tullaan toisen asteen yhtälöön $t^2 - 3t + \frac{5}{4} = 0$, jonka ratkaisut ovat $t = \frac{1}{2}$ ja $t = \frac{5}{2}$. Koska $x > 1$ (muussa tapauksessa kolmioilla ABC ja BDC ei oleisi yhteisiä pisteitä), vain jälkimmäinen juuri tulee kysymykseen. Siis $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

14. *Olkoon AD ei-tasakylkisen kolmion ABC korkeusjana. Olkoon M sivun BC keskipiste ja N pisteen M kuva peilauksessa pisteen D yli. Kolmion AMN ympärysympyrä leikkaa janan AB pisteessä $P \neq A$ ja janan AC pisteessä $Q \neq A$. Osoita, että suorat AN, BQ ja CP kulkevat saman pisteen kautta.*

Ratkaisu. Nojaudutaan Cevan lauseeseen. Sen mukaan väite pitää paikkansa, jos

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot AP \cdot PB = 1.$$



Jännenelikulmiosta $APMN$ saadaan $\angle PMB = \angle PAN$. Näin ollen kolmiot PBM ja NBA ovat yhdenmuotoisia ja

$$\frac{BN}{PB} = \frac{AB}{BM}.$$

Samoin nähdään, että QNC ja MAC ovat yhdenmuotoisia, joten

$$\frac{CQ}{CN} = \frac{CM}{AC}.$$

Nyt $BM = CM$, joten

$$\frac{BN}{CN} \cdot \frac{QQ}{PB} = \frac{AB}{AC}.$$

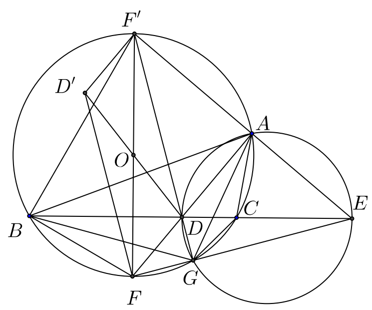
Väite tulee siis todistetuksi, jos osoitetaan, että

$$\frac{AP}{QA} = \frac{AC}{AB}. \tag{1}$$

Koska M ja N ovat symmetrisiä pisteen D suhteen, $\angle AMN = \angle MNA = \angle BPM$; viimeinen yhtäsuuruus johtuu jännenelikulmiosta $APMD$. Koska $\angle PMA + \angle AMN = \angle PMD = \angle BPM + \angle PBM = \angle AMN + \angle PBM$, on $\angle PBM = \angle PMA = \angle PQA$; viimeinen yhtäsuuruus johtuu jäleen kehäkulmalauseesta. Kolmioilla ABC ja AQP on siis kaksi yhteistä kulmaa, joten ne ovat yhdenmuotoisia. Yhdenmuotoisuudesta seuraa (1), ja väite on todistettu.

15. *Kolmiossa ABC kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa suoran BC pisteessä D ja kulman $\angle BAC$ vieruskulman puolittaja leikkaa suoran BC pisteessä E. Olkoon piste $F \neq A$ suoran AD ja kolmion ABC ympärysympyrän leikkauspiste. Olkoon O kolmion ABC ympärysympyrän keskipiste ja D' pisteen D kuva peilauksessa yli pisteen O. Osoita, että $\angle D'FE = 90°$.*

Ratkaisu. Palautetaan mieleen *Apollonioksen ympyrä*, niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys pisteistä A ja B on kiinteä luku. Pisteisiin B ja C ja suhteeseen $AB : AC$ liittyvä Apollonioksen ympyrä on ympyrä, jonka halaksija on DE. Leikatkoon tämä ympyrä kolmion ABC ympärysympyrän pisteessä G. Koska



$$\frac{GB}{GC} = \frac{BD}{DC},$$

GD on kulman $\angle BGC$ puolittaja. Leikatkoon GD kolmion ABC ympärysympyrän myös pisteessä F'. Silloin F' on kaaren $\overset{\frown}{CAB}$ keskipiste. Toisaalta F on komplementtikaaren $\overset{\frown}{BC}$ keskipiste. Siis FF' on ABC:n ympärysympyrän halkaisija, eli F' on F:n peilikuva peilauksessa yli O:n. Mutta tästä seuraa $FD = D'F'$ ja $FD \| D'F'$. Nelikulmio $FDF'D'$ on siis suunnikas ja $D'F \| F'D$. Mutta Thaleen lauseen nojalla $F'G \perp FE$, joten myös $D'F \perp FE$.

16. *Olkoon $P(n)$ luvun n suurin alkutekijä. Millä kokonaisluvuilla $n \geq 2$ pätee*

$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor? \tag{1}$$

Ratkaisu. Koska $P(n) \neq P(n+1)$ kaikilla n, yhtälö (1) voi toteutua vain, jos $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \neq \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$. Tämä taas pitää paikkansa silloin, kun $n+1$ on neliöluku; silloin $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$. On siis oltava $P(n) = P(n+1) + 1$. Ainoat peräkkäiset alkuluvut ovat 2 ja 3; siis $P(n+1) = 2$, $P(n) = 3$. Koska $n+1$ on neliö, $n+1 = 2^{2a}$ jollain a ja $n = 3^b$ jollain b (koska $n+1$ on parillinen, n ei ole jaollinen 2:lla). Siis $3^b = 2^{2a} - 1 = (2^a - 1)(2^a + 1)$. Viimeisen tulon tekijöiden erotus on 2, joten vain toinen niistä on jaollinen 3:lla. Siis $2^a - 1 = 1$ ja $a = 1$, $n + 1 = 4$ ja $n = 3$.

17. *Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille luku $n^{n-1} - 1$ on jaollinen luvulla 2^{2015}, mutta ei luvulla 2^{2016}.*

Ratkaisu. Luvun n on oltava pariton, joten se on muotoa $n = 2^d u + 1$, missä u on pariton. Siis $n - 1 = 2^d u$ ja

$$n^{n-1} - 1 = n^{2^d u} - 1 = \left(n^{2^d}\right)^u - 1 = \left(n^{2^d} - 1\right)\left(\left(n^{2^d}\right)^{u-1} + \cdots + n^{2^d} + 1\right).$$

Jälkimmäisessä tulontekijässä on u termiä ja ne ovat kaikki parittomia. Tehtävän ehdon toteuttavat luvut ovat siis sellaisia, joille 2^{2015} on luvun $n^{2^d} - 1$ tekijä, mutta 2^{2016} ei ole. Nyt

$$\begin{aligned} n^{2^d} - 1 &= \left(n^{2^{d-1}}\right)^2 - 1 = \left(n^{2^{d-1}} - 1\right)\left(n^{2^{d-1}} + 1\right) = \cdots = \\ &= (n-1)(n+1)(n^2+1)\cdots\left(n^{2^{d-1}} + 1\right). \end{aligned}$$

Tulossa on kaikkiaan $d+1$ tekijää. Jos $k \geq 1$, niin $n^{2^k} + 1$ on parillinen, mutta $\equiv 2 \bmod 4$. Koska $n + 1 = 2^d u + 2 = 2\left(2^{d-1}u + 1\right)$,

$$n^{2^d} - 1 = 2^{d+1}u\left(2^{d-1}u + 1\right)(n^2+1)\cdots\left(n^{2d-1} + 1\right).$$

Edellä sanotun perusteella luku $2^{d+1}u(n^2+1)(n^4+1)\cdots(n^{2^{d-1}} + 1)$ on jaollinen luvulla 2^{2d}, muttei luvulla 2^{2d+1}. Tehtävän ehto vaatii siis, että luvun $2^{d-1}u+1$ on oltava jaollinen luvulla $2^{2015-2d}$ muttei luvulla $2^{2016-2d}$. Koska $2^{d-1}u + 1$:n on oltava parillinen, on oltava $d = 1$; tästä seuraa, että on oltava $u = 2^{2013}v - 1$, missä v on pariton. Halutut luvut ovat siis kaikki muotoa $n = 2\left(2^{2013}v - 1\right) + 1 = 2^{2014}v - 1$ olevat luvut, missä v on mikä tahansa pariton luku.

18. *Olkoon $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ astetta $n \geq 1$ oleva polynomi, jolla on n kokonaislukunollakohtaa (jotka eivät välttämättä ole eri suuria). Tiedetään, että on olemassa alkuluvut p_0, p_1, $\ldots$, p_{n-1} niin, että kaikilla $i = 0, 1, \ldots, n-1$ luku a_i on luvun p_i potenssi. Etsi luvun n kaikki mahdolliset arvot.*

Ratkaisu. Polynomin f kaikki kertoimet ovat positiivisia, joten kaikki juuret ovat negatiivisia kokonaislukuja. Osoitetaan ensin, että f:n nollakohdista enintään yksi on $\neq -1$; jos sellaisia olisi kaksi, molempien olisi oltava tekijänä luvussa $a_0 = p_0^c$, joten ne olisivat p_0:n potensseja. Vietan kaavojen mukaan ainakin jompikumpi juurista olisi tekijänä jokaisessa niistä tuloista, joiden summa on a_1, joten p_0 olisi p_1:n tekijä, mikä tehtävän oletusten mukaan ei ole mahdollista. Siis $f(x) = (x + a_0)(x + 1)^{n-1}$. Binomikaavan perusteella saadaan

$$a_2 = \binom{n-1}{1} + a_0\binom{n-1}{2} = n - 1 + a_0\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

ja

$$a_{n-2} = a_0\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-3} = a_0(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Jos $n \geq 5$, niin $2 < n-2$, joten kertoimet a_2 ja a_{n-2} ovat kahden eri alkuluvun potensseja. Mutta jos n on parillinen, molemmat ovat jaollisia luvulla $n - 1$ ja jos n on pariton, molemmat ovat jaollisia luvulla $\frac{n-1}{2}$. Ristiriita osoitta, että on oltava $n \leq 4$. Toisaalta polynomit $x + 2$, $(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$, $(x + 3)(x + 1)^2 = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ ja $(x + 2)(x + 1)^3 = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$ osoittavat, että arvot $n = 1, 2, 3, 4$ ovat mahdollisia.

19. *Kolme pareittain eri suurta kokonaislukua a, b, c toteuttaa ehdot*

$$a \mid (b-c)^2, \quad b \mid (c-a)^2 \quad \text{ja} \quad c \mid (a-b)^2.$$

Lisäksi s.y.t.$(a, b, c) = 1$. *Osoita että ei ole olemassa aitoa kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat a, b, c.*

Ratkaisu. Todetaan ensin, että millään kahdella luvuista a, b, c ei ole yhteistä tekijää. Jos esimerkiksi a:lla ja b:llä olisi yhteinen alkutekijä p, niin koska $(c-a)^2$ on jaollinen b:llä, niin $c - a$ olisi jaollinen p:llä ja edelleen c olisi jaollinen p:llä. Tämä ei tehtävän oletusten mukaan ole kuitenkaan mahdollista. Tarkastellaan lukua $m = 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2$. Koska $m = 2ab + 2ac - (b-c)^2$, $a \mid m$. Samoin nähdään, että $b \mid m$ ja $c \mid m$. Koska a, b, c ovat pareittain yhteistekijättömiä, $abc \mid m$. Jos olisi olemassa kolmio, jonka sivut ovat a, b, c, niin olisi $a < b + c$ eli $a^2 < ab + ac$. Samoin olisi $b^2 < ab + bc$ ja $c^2 < ac + bc$. Kun edelliset kolme epäyhtälöä lasketaan puolittain yhteen, saadaan $m > 0$. Koska $abc \mid m$, on oltava $abc \leq m$. Tunnetusti $ab + bc + ca < a^2 + b^2 + c^2$ (a, b, c ovat eri lukuja). Siis $m < ab + bc + ca$. Voidaan olettaa, että $c < b < a$. Tällöin $abc < m < 3ab$. Tämä on mahdollista vain, jos $c = 1$ tai $c = 2$. Jos olisi $c = 1$, niin kolmioepäyhtälön mukaan $a < b + 1$. Koska $b < a$, tämä ei ole mahdollista. Jos olisi $c = 2$, niin olisi $b < a < b + 2$. Olisi siis $a = b + 1$ ja $a - b = 1$. Mutta silloin $(a-b)^2$ ei ole jaollinen c:llä.

20. *Jos n on kokonaisluku, asetetaan A_n sellaisten positiivisten kokonaislukujen m lukumääräksi, joiden jonkin ei-negatiivisen monikerran etäisyys luvusta n on sama kuin luvun n^3 etäisyys lähimpään luvun m ei-negatiiviseen monikertaan. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla A_n on pariton. (Lukujen a ja b etäisyys on $|a-b|$.)*

Ratkaisu. Olkoon d n:n etäisyys lähimmästä m:n monikerrasta. Silloin $m = n \pm d$ ja $n \equiv \pm d \mod m$. Jos siis luvun n etäisyys lähimmästä m:n monikerrasta on sama kuin luvun n^3 etäisyys lähimmästä m:n monikerrasta, niin $n \mod \pm n^3 \mod m$. Toisaalta, jos $n \equiv \pm n^3 \mod m$, on olemassa luku d, $0 \le d \le \frac{1}{2}m$, jolle $n \equiv \pm d \mod m$ ja $n^3 \equiv \pm d \mod m$. Siis luvun n etäisyys lähimmästä luvun m monikerrasta on sama kuin luvun n^3 etäisyys lähimmästä m:n monikerrasta. Luvun A_n määrittämiseksi on siis laskettava niiden lukujen m määrä, joille $n \equiv \pm n^3 \mod m$ eli niiden lukujen m lukumäärä, joille $m \mid n^3 - n$ tai $m \mid n^3 + n$. Siis (jos $|E|$ on joukon E alkioiden lukumäärä), inkluusion ja ekskluusion periaatteen mukaisesti

$$
\begin{aligned}
A_n &= |\{m \in \mathbb{Z}^+ | m \mid n^3 - n \text{ tai } m \mid n^3 + n\}| \\
&= |\{m \in \mathbb{Z}^+ \mid n^3 - n\}| + |\{m \in \mathbb{Z}^+ \mid n^3 + n\}| - |\{m \in \mathbb{Z}^+ \mid n^3 - n \text{ ja } m | n^3 + n\}| \\
&= |\{m \in \mathbb{Z}^+ \mid n^3 - n\}| + |\{m \in \mathbb{Z}^+ \mid n^3 + n\}| - |\{m \in \mathbb{Z}^{|}\text{s.y.t.}(n^3 - n,\, n^3 + n)\}| \\
&= \tau(n^3 - n) + \tau(n^3 + n) - \tau(\text{s.y.t.}(n^3 - n,\, n^3 + n),
\end{aligned}
$$

missä $\tau(k)$ tarkoittaa positiivisen kokonaisluvun k positiivisten tekijöiden lukumäärää. Nyt $\tau(k)$ on pariton, jos ja vain jos k on neliöluku. (Jokaista k:n tekijää $a < \sqrt{k}$ vastaa tekijä $\frac{k}{a} > \sqrt{k}$, mutta jos k on neliöluku, tekijää $\sqrt{k}$ ei voi tällä tavoin parittaa toisen tekijän kanssa.) Koska s.y.t.$(n,\, n^2 \pm 1) = 1$, luvut $n^3 \pm n$ ovat neliöitä vain, jos n ja $n^2 \pm 1$ ovat molemmat neliölukuja. Koska $n \ge 2$, $n^2 \pm 1$ eo kuitenkaan ole neliöluku. Siis luvut $\tau(n^3 \pm n)$ ovat parillisia. Tehtävän ehdot täyttäviä lukuja n ovat siis ne luvut, joille s.y.t.$(n^2 - n,\, n^3 + n)$ on neliöluku. Koska s.y.t.$(a,\, b) =$ s.y.t.$(a,\, b - a)$, niin

$$
\text{s.y.t.}(n^2 - 1,\, n^2 + 1) = \text{s.y.t.}(n^2 - 1,\, 2) = \begin{cases} 1, & \text{jos } n \text{ parillinen,} \\ 2, & \text{jos } n \text{ pariton.} \end{cases}
$$

Näin ollen

$$
\text{s.y.t.}(n^3 - n,\, n^3 + n) = \begin{cases} n, & \text{jos } n \text{ parillinen,} \\ 2n & \text{jos } n \text{ pariton.} \end{cases}
$$

Mutta jos n on pariton, $2n$ ei voi olla neliöluku. Tehtävän ehdon toteuttavia lukuja ovat siis kaikki parilliset neliöluvut n.