Baltian Tie, Vilna 8. marraskuuta 2014

Tehtävät ja ratkaisut

1. *Osoita, että*

$$\cos 56^\circ \cdot \cos(2\cdot 56^\circ)\cdot \cos(2^2\cdot 56^\circ)\cdots \cos(2^{23}\cdot 56^\circ) = \frac{1}{2^{24}}.$$

Ratkaisu. Käytetään kaksinkertaisen kulman sinin kaavaa toistuvasti:

$$\begin{aligned}
&\cos 56^\circ \cdot \cos(2\cdot 56^\circ)\cdot \cos(2^2\cdot 56^\circ)\cdot \ldots \cdot \cos(2^{23}\cdot 56^\circ)\\
&= \frac{\sin 56^\circ \cdot \cos 56^\circ \cdot \cos(2\cdot 56^\circ)\cdot \cos(2^2\cdot 56^\circ)\cdot \ldots \cdot \cos(2^{23}\cdot 56^\circ)}{\sin 56^\circ}\\
&= \frac{\sin(2\cdot 56^\circ)\cdot \cos(2\cdot 56^\circ)\cdot \cos(4\cdot 56^\circ)\cdots \cos(2^{23}\cdot 56^\circ)}{2\cdot \sin(56^\circ)} = \ldots = \frac{\sin(2^{24}\cdot 56^\circ)}{2^{24}\sin(56^\circ)}.
\end{aligned}$$

Lasketaan $2^{24}\cdot 56 \bmod 360$: $2^8 = 256 \equiv -104 \bmod 360$, $2^{16} \equiv 104^2 = 10816 \equiv 3616 \equiv 16 \bmod 360$, $2^{24} \equiv -16\cdot 104 = -1664 \equiv 136 \bmod 360$ ja $2^{24}\cdot 56 \equiv 136\cdot 56 = 7616 \equiv 416 \equiv 56 \bmod 360$. Siis $\sin(2^{24}\cdot 56^\circ) = \sin(56^\circ)$. Tehtävän yhtälö pitää paikkansa.

2. *Olkoot $a_0, a_1, \ldots, a_N$ reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdon $a_0 = a_N = 0$, ja joille*

$$a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = a_i^2,$$

kun $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Osoita, että $a_i \le 0$, kun $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Ratkaisu. Oletetaan, että tehtävän väite ei pidä paikkaansa, ts. jonossa (a_j) on positiivisia lukuja. Jokin näistä, a_i, on suurin mahdollinen. Oletusten nojalla $i \ne 0$ ja $i \ne N$. Nyt $a_i - a_{i-1} \ge 0$ ja $a_i - a_{i+1} \ge 0$, mutta $0 < a_i^2 = (a_{i+1} - a_i) + (a_{i-1} - a_i) \le 0$. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi.

3. *Positiiviset reaaliluvut a, b, c toteuttavat ehdon $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Todista epäyhtälö*

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Ratkaisu. Käytetään toistuvasti aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä ja tehtävän ehtoa sekä lavennuksia:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \le \frac{1}{\sqrt{2a\sqrt{ab}}} + \frac{1}{\sqrt{2b\sqrt{bc}}} + \frac{1}{\sqrt{2c\sqrt{ca}}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{a\sqrt{ab}}}{a\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b\sqrt{bc}}}{b\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{c\sqrt{ca}}}{c\sqrt{ca}}\right) \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{a\sqrt{ab}} + \frac{b+\sqrt{bc}}{b\sqrt{bc}} + \frac{c+\sqrt{ca}}{c\sqrt{ca}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3 + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3 + \frac{\sqrt{ab}}{ab} + \frac{\sqrt{bc}}{bc} + \frac{\sqrt{ca}}{ca}\right)\\
&\le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3 + \frac{a+b}{2ab} + \frac{b+c}{2bc} + \frac{c+a}{2ac}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3+3) = \frac{3}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

4. *Etsi kaikki reaaliluvuilla määritellyt ja reaaliarvoiset funktiot f, joilla*

$$f(f(y)) + f(x - y) = f(xf(y) - x) \tag{1}$$

kaikilla reaaliluvuilla x, y.

Ratkaisu. Selvästi funktio f, $f(x) = 0$ kaikilla x, toteuttaa yhtälön. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole.

Olkoon nyt f jokin ratkaisu. Sijoitetaan $x = y = 0$ yhtälöön (1). Saadaan $f(f(0)) = 0$. Sijoitetaan nyt $y = f(0)$ ja $x = \frac{1}{2}f(0)$ yhtälöön (1). Saadaan

$$f(f(f(0))) + f\left(-\frac{1}{2}f(0)\right) = f\left(\frac{1}{2}f(0)f(f(0)) - \frac{1}{2}f(0)\right) = f\left(-\frac{1}{2}f(0)\right),$$

josta $f(f(f(0))) = f(0) = 0$. Kun nyt sijoitetaan $y = 0$ yhtälöön (1), saadaan $f(x) = f(-x)$. f on siis parillinen funktio. Kun nyt sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön (1), saadaan $f(f(y)) + f(y) = 0$ eli $f(f(y)) = -f(y)$, kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Käytetään tätä ominaisuutta ja parillisuutta useamman kerran, ja päädytään yhtälöketjuun $f(y) = -f(f(y)) = f(f(f(y))) = f(-f(y)) = f(f(y)) = -f(y)$. Siis $f(y) = 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$.

5. *Jos positiiviset reaaliluvut a, b, c, d toteuttavat yhtälöt*

$$a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc \qquad \textit{ja} \qquad a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

niin määritä lausekkeen $\dfrac{ab + cd}{ad + bc}$ kaikki mahdolliset arvot.

Ratkaisu. Jos ABD on kolmio, jossa $AB = b$, $AD = a$ ja $\angle BAD = 60°$ ja $B'CD'$ on kolmio, jossa $B'C = c$, $CD' = b$ ja $\angle B'CD' = 120°$, niin tehtävän ensimmäisen yhtälön ja kosinilauseen perusteella $BD = B'D'$. On siis nelikulmio $ABCD$, jossa $AB = d$, $BC = c$, $CD = b$ ja $DA = a$. Lisäksi $\angle BAD$ ja $\angle BCD$ ovat vieruskulmia, joten nelikulmio on jännenelikulmio. Kulmien $\angle ABC$ ja $\angle CDA$ summa on $180°$, joten niiden kosinit ovat nollasta eroavat ja toistensa vastaluvut, sanokaamme x ja $-x$. Koska $c^2 + d^2 - 2cdx = AC^2 = a^2 + b^2 + 2abx$, saadaan $cdx = -abx$. Tämä on mahdollista vain, jos $x = 0$ eli jos $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Nelikulmion $ABCD$ ala voidaan nyt lausua kolmioiden ABD ja BCD alojen summana $\frac{1}{2}ad\sin(60°) + \frac{1}{2}bc\sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{4}(ad + bc)$ tai kolmioiden ABC ja ACD alojen summana $\frac{1}{2}cd + \frac{1}{2}ab$. Siis $\dfrac{ab + cd}{ad + bc} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. *Kuinka monella tavalla voidaan maalata rivissä olevat 16 istuinta vihreiksi ja punaisiksi niin, että peräkkäisten yhdellä värillä maalattujen istuinten määrä on aina pariton?*

Ratkaisu. Tarkastellaan k:n istuimen riviä, missä istuimet on maalattu tehtävän ehdon mukaisesti. Olkoon v_k niiden maalaustapojen lukumäärä, jossa vasemmanpuoleisin istuin on vihreä ja p_k niiden maalaustapojen lukumäärä, jossa vasemmanpuoleisin istuin on punainen. Selvästi $v_1 = p_1 = 1$, $v_2 = p_2 = 1$ ja $v_k = p_k$ kaikilla k. k:n istuimen rivin hyväksyttäviä maalauksia, joissa vasemmapuoleisin istuin on vihreä ja sen vieressä oleva punainen on p_{k-1} kappaletta. Jos kaksi vasemmanpuoleisinta istuinta on vihreitä, on kolmannenkin oltava vihreä. Näin ollen tallaisia hyväksyttäviä maalauksia on v_{k-2} kappaletta. Siis $v_k = p_{k-1} + v_{k-2} = v_{k-1} + v_{k-2}$. Mutta tästä nähdään, että (v_k) ja (p_k) ovat Fibonaccin jonoja (f_k). Kysytty luku on $2 \cdot f_{16}$. Helppo yhteenlaskuketju osoittaa, että $f_{16} = 987$, joten tehtävässä tarkoitettuja värityksiä on 1974 kappaletta.

7. *Olkoon $p_1, p_2, \ldots, p_{30}$ lukujen 1, 2, ..., 30 permutaatio. Kuinka monelle tällaiselle permutaatiolle pätee yhtälö*

$$\sum_{k=1}^{30} |p_k - k| = 450?$$

Ratkaisu. Määritellään pari $(a_k,\, b_k)$ niin, että $\{a_k,\, b_k\} = \{p_k,\, k\}$ ja $a_k \geq b_k$. Silloin

$$\sum_{k=1}^{30} |p_k - k| = \sum_{k=1}^{30} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^{30} b_k. \tag{1}$$

Lukujen a_k joukossa ei mikään luku voi toistua kolmesti, ei myöskään lukujen b_k joukossa. Näin ollen yhtälön (1) oikean puolen erotus on mahdollisimman suuri silloin, kun $\{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{30}\} = \{16,\, 17,\, \ldots,\, 30\}$ ja $\{b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_{30}\} = \{1,\, 2,\, \ldots,\, 15\}$ ja a_k- sekä b_k-luvuissa kukin arvo esiintyy tasan kahdesti. Maksimiarvo on siis $2(16+17+\cdots+30-(1+2+\cdots+15)) = 450$. Koska sama summa saadaan a_k- ja b_k-lukujen kaikilla järjestyksillä, eri permutaatioita on $(15!)^2$.

8. *Albert ja Betty pelaavat seuraavat peliä. Punaisessa kulhossa on 100 sinistä palloa ja sinisessä kulhossa 100 punaista palloa. Jokaisella vuorolla pelaajan täytyy tehdä yksi seuraavista siirroista:*

a) Ottaa kaksi punaista palloa sinisestä kulhosta ja laittaa ne punaiseen kulhoon.

b) Ottaa kaksi sinistä palloa punaisesta kulhosta ja laittaa ne siniseen kulhoon.

c) Ottaa kaksi eriväristä palloa yhdestä kulhosta ja heittää ne pois.

Pelaajat vuorottelevat ja Albert aloittaa. Se pelaaja voittaa, joka ensimmäisenä ottaa viimeisen punaisen pallon sinisestä kulhosta tai viimeisen sinisen pallon punaisesta kulhosta. Selvitä, kummalla pelaajalla on voittostrategia.

Ratkaisu. Betty voittaa seuraavalla strategialla: Jos Albert tekee siirron a), Betty tekee siirron b) ja päinvastoin. Jos Albert tekee siirron c) jommastakummasta maljasta, niin Betty tekee siirron c) toisesta maljasta. Ainoa poikkeus on tilanne, jossa Betty voi tehdä pelin päättävän siirron eli ottaa viimeisen sinisen pallon punaisesta maljasta tai viimeisen punaisen pallon sinisestä maljasta.

Osoitetaan ensin, että Betty voi noudattaa tätä strategiaa. Olkoot P_s ja P_p sinisessä ja punaisessa maljassa olevien punaisten pallojen määrät ja S_s ja S_p sinisessä ja punaisessa maljassa olevien sinisten pallojen määrät. Merkitään vielä $b = (P_s,\, S_s)$ ja $r = (B_p,\, P_p)$. Pelin alussa $b = r = (100,\, 0)$. Jos $b = r$ ja Albert tekee siirron a), niin Betty voi tehdä siirron b), jonka jälkeen tilanne on taas $b = r$. Sama tilanne on, jos Albert tekee siirron b). Jos $b = r$ ja Albert tekee siirron c), niin Betty voi tehdä siirron c) toisesta maljasta, jolloin tilanne on taas $b = r$. Siten Betty voi aina pitää tilanteen $b = r$, paitsi jos hän tekee voittosiirron. Tilanteessa $b = r = (1, 0)$ ei laillista siirtoa voi tehdä, mutta tähän tilanteeseen ei milloinkaan tulla, koska kummassakin maljassa on aina parillinen määrä palloja.

Osoitetaan sitten, että tällä strategialla Betty aina voittaa. Tehdään vastaoletus: Albert voi tehdä voittosiirron. Koska Albertin siirtoa ennen on aina $b = r$, niin Albert tekee voittosiirron joko tilanteessa $b = r = (1, s)$, $s \geq 1$, tai $b = r = (2, t)$, $t \geq 0$. Mutta tällöin ennen Bettyn viimeistä siirtoa joko b tai r on ollut joko $(1, s')$, $s' \geq 1$, tai $(2, t')$, $t' \geq 0$. Strategiansa mukaisesti Betty olisi näistä tilanteista tehnyt voittosiirron.

9. *Mikä on pienin mahdollinen määrä ruutuja, jotka voi merkitä $n \times n$-ruudukolle niin, että kaikilla $m > \dfrac{n}{2}$ kaikkien $m \times m$-aliruudukkojen molemmat lävistäjät sisältävät jonkin merkityn ruudun?*

Ratkaisu. Osoitetaan, että kysytty määrä on n. n merkittyä ruutua riittää: Jos n on pariton, merkitään kaikki keskimmäisen ruudun kautta kulkevan rivin tai sarakkeen ruudut, jos n on parillinen, kaikki ruudut jommassakummassa ruudukon kahdesta keskimmäisestä rivistä tai sarakkeesta. Kun $m > \dfrac{n}{2}$, niin $m \times m$ aliruudukko osuu aina merkittyyn riviin ja merkitty rivi osuu aina aliruudukon molempiin lävistäjiin.

Osoitetaan sitten, että tarvitaan ainakin n merkittyä ruutua. Olkoon n pariton. On helposti pääteltävissä, että sellaisia lävistäjien suuntaisia ruuturivejä, joiden molemmat päät ovat ruudukon reunaruutuja ja joiden pituus on $> \dfrac{n}{2}$, on $2n$ kappaletta. (Esimerkiksi vasemmalta ylhäältä oikealle alas suuntautuvat tällaiset lävistäjät ovat vasemmasta yläkulmasta lähtevä päälävistäjä, $\dfrac{1}{2}(n-1)$:stä vasemman reunan ruudusta lähtevät ja samoin $\dfrac{1}{2}(n-1)$:stä ylärivin ruudusta lähtevät, yhteensä n kappaletta.) Jokaisella tällaisella pitää olla merkitty ruutu, ja yksi merkitty ruutu voi olla enintään kahdella näistä lävistäjistä. Ruutuja tarvitaan siis ainakin n kappaletta. Jos n on parillinen, lävistäjiä, jotka alkavat ja päättyvät ruudukon reunoihin ja joiden pituus on $> \dfrac{n}{2}$ on $2n - 2$. Jos ruudukon rivit ja sarakkeet varustetaan järjestysnumeroin, niin kullakin lävistäjällä jokaisen ruudun rivin ja sarakkeen järjestysnumeroiden summan parillisuus on sama. Kutsumme lävistäjää parittomaksi tai parilliseksi sen mukaan, kummanlainen kyseisen lävistäjän ruutujen järjestysnumeroiden summa on. Jos rivien numerointi aletaan ylhäältä ja sarakkeiden vasemmalta, niin vasemmalta ylhäältä oikealle alas suuntautuvissa lävistäjissä on parillisia yksi enemmän kuin parittomia, ja oikealta ylhäältä vasemmalle alas suuntautuvissa lävistäjissä tilanne on päinvastainen. Kaikkiaan siis parillisia ja parittomia lävistäjiä on molempia $n - 1$ kappaletta. Jokainen merkitty ruutu voi olla vain kahdella näistä lävistäjistä ja näiden kahden tulee olla molempien parillisia tai molempien parittomia. Koska $n-1$ on pariton, parittomille lävistäjille tarvitaan ainakin $\dfrac{n}{2}$ merkkiä ja samoin parillisille. Merkkejä on oltava ainakin n:ssä ruudussa.

10. *Maassa on 100 lentokenttää. Super-Air operoi suorin lennoin joidenkin lentokenttäparien väliä (molempiin suuntiin). Lentokentän* liikenneindeksi *on niiden lentokenttien määrä, joihin siltä on suora Super-Airin lento. Uusi lentoyhtiö Concur-Air ryhtyy liikennöimään kahden lentokentän väliä jos ja vain jos niiden liikenneindeksien summa on vähintään 100. Havaitaan, että Concur-Airin lennoilla voi tehdä maanympärysmatkan laskeutuen jokaiselle kentälle täsmälleen kerran. Osoita, että myös Super-Airin lennoilla voi tehdä maanympärysmatkan laskeutuen jokaiselle kentälle täsmälleen kerran.*

Siirrytään käyttämään verkkoteorian kieltä. Olkoon G verkko, jonka muodostavat lentokentät ja Super-Airin lennot, ja G' verkko, jonka muodostavat lentokentät ja Concur-Airin lennot. Verkon G solmun aste on sama kuin sen liikenneindeksi. Hamiltonin ketju on sellainen verkon peräkkäisistä särmistä muodostuva ketju, joka käy tasan kerran joka solmussa, ja Hamiltonin sykli on umpinainen Hamiltonin ketju, ts. Hamiltonin ketju, jonka ensimmäinen solmu on sama kuin sen viimeinen solmu. Todistetaan ensin seuraava aputulos.

Olkoon verkossa H k solmua ja solmut A ja B, $A \neq B$, yhdistävä Hamiltonin ketju. Jos solmujen A ja B asteiden summa on $> k$, niin verkossa on myös Hamiltonin sykli.

Todistetaan tämä. Numeroidaan A:n ja B:n yhdistävän ketjun solmut: $A = C_1, C_2, \ldots, C_k = B$. Olkoon A:n aste n; silloin B:n aste on $> k - n$. Olkoot $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_n}$ ne n solmua, jotka yhdistyvät särmällä A:han. Tarkastellaan kutakin näistä edeltävää solmua $C_{i_1-1}, C_{i_2-1}, \ldots, C_{i_n-1}$. Koska B:n aste on $> k - n$ ja edellä lueteltujen solmujen lukumäärä on n, ei voi olla niin, että B olisi yhdistynyt särmällä vain muihin kuin edellä lueteltuihin solmuihin. Solmujen joukossa $C_{i_j} - 1$ joukossa on ainakin yksi, sanokaamme C_{r-1}, joka on yhdistetty B:hen särmällä. Mutta nyt

$$A = C_1 \to C_2 \to \cdots \to C_{r-1} \to B = C_k \to C_{k-1} \to \cdots to C_r \to A$$

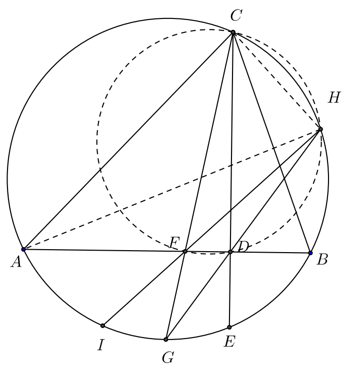
on Hamiltonin sykli.

Siirrytään nyt varsinaisen tehtävän ratkaisuun. Oletetaan, että verkossa G ei ole Hamiltonin sykliä. Olkoot A ja B jotkin G:n solmut, joiden välillä ei ole G:n särmää, mutta jotka liittyvät toisiinsa särmällä G':ssa. Oletuksen mukaan solmujen A ja B asteiden summa verkossa G on silloin yli 100. Jos A ja B yhdistyisivät Hamiltonin ketjulla verkossa G, niin aputuloksen mukaan verkossa G olisi Hamiltonin sykli. Koska siinä vastaoletuksen mukaan ei kuitenkaan ole tällaista sykliä, ei siinä myöskään ole A:n ja B:n yhdistävää Hamiltonin ketjua. Näin ollen verkkoon G ei synny Hamiltonin sykliä, vaikka siihen lisättäisiin särmä (A, B). Operaatio voidaan toistaa jokaisen sellaisen solmuparin kohdalla, joka yhdistyy särmällä G':ssa, mutta ei G:ssä. Näin G voidaan täydentää verkoksi, jossa on kaikki ne yhteydet jotka ovat G':ssa, mutta G:stä edelleen puuttuu Hamiltonin sykli. Kun G':ssa kuitenkin oletuksen mukaan on Hamiltonin sykli, on tultu ristiriitaan. Vastaoletus on siis väärä, ja G:ssä on Hamiltonin sykli.

11. *Olkoon Γ teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Pisteen C kautta kulkeva sivun AB normaali leikkaa sivun AB pisteessä D ja ympyrän Γ uudelleen pisteessä E. Kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä F ja ympyrän Γ uudelleen pisteessä*

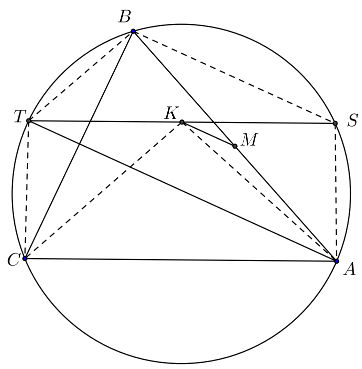
G. Suora GD leikkaa ympyrän Γ uudelleen pisteessä H, ja suora HF leikkaa ympyrän Γ uudelleen pisteessä I. Osoita, että $AI = EB$.

Ratkaisu. Koska CG on kulman $\angle ACB$ puolittaja, kaaret $\overset{\frown}{AG}$ ja $\overset{\frown}{GB}$ ovat yhtä pitkät. Väitteen todistamiseksi riittää, että näytetään kaaret $\overset{\frown}{IG}$ ja $\overset{\frown}{GE}$ yhtä pitkiksi. Toisin sanoen on todistettava, että $\angle IHG = \angle GCE$. Jos voidaan osoittaa, että $CFDH$ on jännenelikulmio, niin mainitut kulmat ovat kaarta $\overset{\frown}{FD}$ vastaavia kehäkulmia ja siis yhtä suuria. Mutta kolmion ADH perusteella $\angle HDB = \angle HAD + \angle AHD$. Kehäkulmina $\angle HAD = \angle HAB = \angle HCB$ ja $\angle AHD = \angle AHG = \angle GCB$. Siis $\angle HDB = \angle GCB + \angle BCH = \angle FCH$. Nelikulmion $CFDH$ kulma $\angle FCH$ on kulman $\angle FDH$ vieruskulma, joten $CFDH$ todellakin on jännenelikulmio, ja väite on todistettu.



12. *Olkoon annettu kolmio ABC. Olkoon M sivun AB keskipiste ja olkoon T kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän sen kaaren BC keskipiste, joka ei sisällä pistettä A. Olkoon K sellainen kolmion ABC sisäpiste, että $MATK$ on tasakylkinen puolisuunnikas, jossa $AT \parallel MK$. Osoita, että $AK = KC$.*

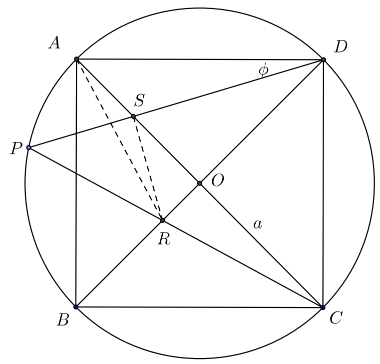
Ratkaisu. Leikatkoon suora TK kolmion ABC:n ympärysympyrän myös pisteessä S. Koska puolisuunnikas $AMKT$ on tasakylkinen, $\angle STA = \angle KTA = \angle MAT = \angle BAT = \angle BST$. Tästä seuraa, että $SB \| AT \| MK$ ja $BT = SA$. Koska suora MK kulkee janan AB keskipisteen kautta, se kulkee myös janan ST keskipisteen kautta. Siis $SK = KT$. Koska T on kaaren $\overset{\frown}{BC}$ keskipiste, $CT = TB = AS$. Mutta tästä puolestaan seuraa, että $ST \| AC$ ja $\angle STC = \angle TSA$. Esimerkiksi yhtenevistä (sks) kolmioista KTC ja KSA saadaan $KC = KA$.



13. *Olkoot neliön $ABCD$ kärjet ympyrällä ω ja olkoon P ympyrän ω lyhyemmän kaaren AB jokin piste. Olkoot $CP \cap BD = R$ ja $DP \cap AC = S$. Osoita, että kolmioiden ARB ja DSR alat ovat yhtä suuret.*

Ratkaisu. Olkoon O neliön keskipiste ja $\angle ADP = \phi$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle OCR = \angle ACP = \angle ADP = \phi$ ja $\angle SDO = 45° - \phi$. Kolmion ABR kaksinkertainen ala on $BR \cdot OA = (a - OR) \cdot a$ ja kolmion DSR kaksinkertainen ala on $DR \cdot OS = (a + OR) \cdot OS$. Mutta suorakulmaisista kolmioista RCO ja DSO saadaan $OR = a \tan \phi$ ja

$$OS = a\tan(45^\circ - \phi) = a\frac{1-\tan\phi}{1+\tan\phi}.$$

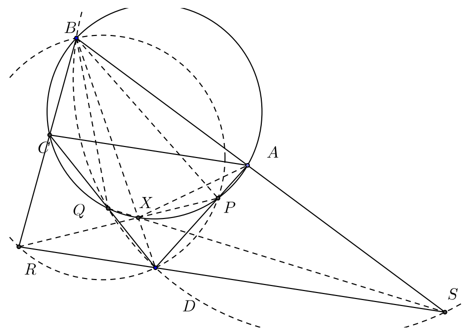


Kolmion ABR kaksinkertainen ala on $(1-\tan\phi)a^2$ ja kolmion DSR kaksinkertainen ala on

$$(a + a\tan\phi)\cdot a\frac{1-\tan\phi}{1+\tan\phi} = (1-\tan\phi)a^2.$$

Kolmioiden alat ovat yhtä suuret.

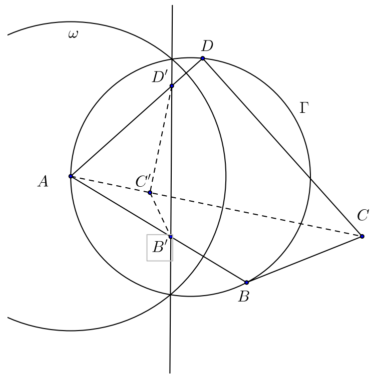
14. *Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio, ja puolittakoon BD kulman ABC. Kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä leikkaa sivun AD pisteessä P ja sivun CD pisteessä Q. Pisteen D kautta kulkeva sivun AC suuntainen suora leikkaa suoran BC pisteessä R ja suoran BA pisteessä S. Osoita, että pisteet P, Q, R ja S ovat samalla ympyrällä.*



Ratkaisu. Olkoon X ympyrän ABC ja suoran BD toinen leikkauspiste. Väitteen todistamiseksi osoitetaan, että pisteet R, X, P ovat samalla suoralla ja pisteet Q, X, S ovat samalla suoralla ja että $RX\cdot XP = QX\cdot XS$. Silloin pisteen potenssia ympyrän suhteen koskevan tuloksen perusteella R, P, Q ja S ovat samalla ympyrällä. Osoitetaan ensin, että $BRDP$ ja $BQDS$ ovat jännenelikulmioita. Koska $AC\|DS$, $\angle ADS = \angle CAC = \angle PAC = \angle PBC$. Nelikulmion $BRDP$ kärjen B kulma ja kärjen D kulman vieruskulma ovat yhtä suuret, joten $BRDP$ todella on jännenelikulmio. Aivan samoin todistetaan, että $BQDS$ on jännenelikulmio. Kehäkulmista ja yhdensuuntaisuudesta $AC\|DR$ saadaan $\angle AXB = \angle ACB = \angle DRB$. Koska BD on kulman $\angle ABC$ puolittaja, on $\angle ABX = \angle DBR$. Tämä merkitsee sitä, että kolmiot ABX ja DBR ovat yhdenmuotoiset, joten $\angle RPB = \angle RDB = \angle XAB = \angle XPB$. R, P ja X ovat siis samalla suoralla. Aivan samoin todistetaan, että S, Q ja X ovat samalla suoralla. Ympyrästä $BRDP$ saadaan pisteen X potenssiksi $RX\cdot XP = XB\cdot XD$. Ympyrästä $BQDS$ puolestaan saadaan $BX\cdot XD = QX\cdot XS$. Näin ollen $RX\cdot XP = QX\cdot XS$, mikä osoittaa, että R, Q, P ja S ovat samalla ympyrällä.

15. *Kuperan nelikulmion $ABCD$ kulmien A ja C summa on pienempi kuin* 180°. *Osoita, että*

$$AB\cdot CD + AD\cdot BC < AC(AB + AD).$$



Ratkaisu. Ratkaistaan tehtävä inversiota käyttäen. Olkoon Γ kolmion ABD ympärysympyrä. Silloin C on Γ:n ulkopuolella. Suoritetaan inversio A-keskisessä ympyrässä ω. Voidaan olettaa, että ω:n säde on 1 ja että $AB > 1$, $AD > 1$. Silloin Γ kuvautuu pisteiden B ja C inversiopisteiden B' ja D' kautta kulkevaksi suoraksi ja pisteet, jotka ovat Γ:n ulkopuolella kuvautuvat siihen puolitasoon, jossa A on. Pisteen C inversiopiste C' on siis kolmion $AB'D'$ sisäpiste, joten $B'C' + C'D' < B'A + C'A$. Mutta $AB \cdot AB' = AC \cdot AC' = AD \cdot AD' = 1$ ja yhdenmuotoisista kolmioista ABC, $AC'B'$ sekä ACD, $AD'C'$ saadaan

$$B'C' = \frac{AC' \cdot CB}{AB} = \frac{CB}{AB \cdot AC}, \quad C'D' = \frac{AC' \cdot CD}{AD} = \frac{CD}{AD \cdot AC}.$$

Siis

$$\frac{CB}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AD \cdot AC} < \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}.$$

Kun tämä epäyhtälö kerrotaan puolittain $AB \cdot AC \cdot AD$:llä, saadaan väite.

16. *Selvitä, onko* $712! + 1$ *alkuluku.*

Ratkaisu. Osoitetaan, että $712! + 1$ on jaollinen alkuluvulla 719. Wilsonin lauseen nojalla $718! + 1$ on jaollinen 719:llä. Nyt, modulo 719, on

$$713 \cdot 714 \cdot 715 \cdot 716 \cdot 717 \cdot 718 \equiv (-6)(-5)(-4)(-3)(-2)(-1) = 720 \equiv 1.$$

Siis $-1 \equiv 718! \equiv 712! \cdot 1$, joten $712! + 1 \equiv 0 \bmod 719$.

17. *Onko olemassa pareittain erisuuria rationaalilukuja* x, y *ja* z, *joille*

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = 2014?$$

Ratkaisu. Tällaisia lukuja ei ole. Jos sellaisia olisi, niin voitaisiin merkitä $a = x - y$, $b = y - z$, jolloin $a + b = x - z$. Silloin olisi

$$\begin{aligned} 2014 &= \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{b^2(a+b)^2 + a^2(a+b)^2 + a^2b^2}{(ab(a+b))^2}. \end{aligned}$$

Yhtälön oikean puolen murtolausekkeen osoittaja on $a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + a^2b^2 = (a^2 + b^2 + ab)^2$. Koska 2014 ei ole neliöluku, se ei myöskään ole rationaaliluvun neliö.

18. *Olkoon p alkuluku, ja olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kuinka monta sellaista nelikkoa (a_1, a_2, a_3, a_4) on, missä $a_i \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ kun $i = 1, 2, 3, 4$, ja joille*

$$p^n \mid (a_1a_2 + a_3a_4 + 1)?$$

Ratkaisu. Tarkastellaan ensin tapaukset, joissa $p \not| a_1$. Koska p on alkuluku, vain p:n potenssit ovat jaollisia p:llä, joten a_1 voidaan valita tarkasteltavasta joukosta $(p^n - p^{n-1})$:llä tavalla. Jos a_3 ja a_4 on valittu mielivaltaisesti (tapoja kaikkiaan $p^n \cdot p^n$), on luvun a_1a_2 oltava kongruentti luvun $-1 - a_3a_4$ kanssa $\mod p^n$, joten a_2 on yksikäsitteisesti luku välin $[0, p^n - 1]$ luku $a_1^{-1}(-1 - a_3a_4) \mod p^n$ (käänteisluku $\mod p^n$). Eri mahdollisuuksia on siis $p^{2n}(p^n - p^{n-1} = p^{3n} - p^{3n-1}$ kappaletta. Jos $p|a_1$, niin $p \not| a_3$. Jos $p \| a_1$, $p \not| a_3$, niin jokaisella a_2:n valinnalla a_4 on yksikäsitteisesti $a_4 \equiv a_3^{-1}(-1 - a_1a_2) \mod p^n$. Näissä tilanteissa a_1 voidaan valita p^{n-1}:llä tavalla, a_3 $(p^n - p^{n-1})$:llä tavalla ja a_2 p^n:llä tavalla. Eri tapoja on $p^{n-1}(p^n - p^{n-1})p^n = p^{3n-1} - p^{3n-2}$. Kun yhdistetään molemmat tapaukset, nähdään, että eri nelikoita on kaikkiaan $p^{3n} - p^{3n-2}$ kappaletta.

19. *Olkoot m ja n keskenään yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Etsi lausekkeen*

$$\text{s.y.t.}(2^m - 2^n,\, 2^{m^2+mn+n^2} - 1)$$

kaikki mahdolliset arvot.

Ratkaisu. Tunnetusti pätee $\text{s.y.t.}(2^a - 1,\, 2^b - 1) = 2^{\text{s.y.t.}(a,b)} - 1$. (Eukleideen algoritmi sovellettuina lukuihin $2^a - 1$, $2^b - 1$ palautuu Eukleideen algoritmiksi eksponenteille.) Siis

$$\begin{aligned} \text{s.y.t.}(2^m - 2^n,\, 2^{m^2+mn+n^2} - 1) &= \text{s.y.t.}(2^{m-n} - 1,\, 2^{m^2+mn+n^2} - 1) \\ &= 2^{\text{s.y.t.}(m-n, m^2+mn+n^2)} - 1. \end{aligned}$$

Olkoon nyt d jokin luvun $m - n$ tekijä. Koska $\text{s.y.t.}(m, n) = 1$, on oltava $\text{s.y.t.}(m, d) = 1$.Mutta jos d on myös luvun $m^2 + mn + n^2$ tekijä, se on tekijänä luvussa $(m - n)(2m + n) + m^2 + mn + n^2 = 3m^3$. Siis d voi olla vain 1 tai 3, joten $\text{s.y.t.}(2^m - 2^n,\, 2^{m^2+mn+n^2} - 1)$ voi olla enintään $2^3 - 1 = 7$ tai $2^1 - 1 = 1$. Molemmat arvot voidaan saada, 7, kun $m = 1$ ja $n = 1$, ja 1, kun $m = 2$, $n = 1$.

20. *Tarkastellaan sellaista positiivisten kokonaislukujen jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jolle kaikilla $k \geq 2$ pätee*

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2015^i},$$

missä 2015^i on suurin luvun 2015 potenssi, joka on luvun $a_k + a_{k-1}$ tekijä. Osoita, että jos kyseinen jono on jaksollinen, niin sen jakson pituus on jaollinen kolmella.

Ratkaisu. Jos jonon kaikki jäsenet ovat parillisia, jaetaan jokainen suurimmalla mahdollisella 2:n potenssilla. Saadaan jono, joka tottelee samaa palautuskaavaa ja on samalla tavalla jaksollinen kuin alkuperäinen jono, mutta sisältää ainakin yhden parittoman luvun. Tarkastellaan tätä jonoa $\mod 2$. Koska jakaja 2015 on pariton, se ei vaikuta jonon jäsenten parillisuuteen tai parittomuuteen. Jono käyttäytyy kuten sellainen Fibonaccin palautuskaavaa $a_{k+1} \equiv a_k + a_{k-1}$ noudattava jono, jossa on ainakin yksi pariton jäsen. Tällainen jono on muotoa $\ldots, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots$, Jonon jakson pituus on 3, joten, jos alkuperäinen jono on jaksollinen, jakson pituuden on oltava kolmella jaollinen. [Ei tiedetä, onko tällaisia jaksollisia jonoja olemassa.]