Baltian Tie, Vilna 8. marraskuuta 2014

1. Osoita, että

$$\cos(56^\circ)\cdot\cos(2\cdot 56^\circ)\cdot\cos(2^2\cdot 56^\circ)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56^\circ)=\frac{1}{2^{24}}.$$

2. Olkoot a_0, a_1, $\ldots$, a_N reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdon $a_0 = a_N = 0$, ja joille

$$a_{i+1}-2a_i+a_{i-1}=a_i^2,$$

kun $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Osoita, että $a_i \le 0$, kun $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

3. Positiiviset reaaliluvut a, b, c toteuttavat ehdon $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Todista epäyhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

4. Etsi kaikki reaaliluvuilla määritellyt ja reaaliarvoiset funktiot f, joilla

$$f(f(y))+f(x-y)=f(xf(y)-x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x, y.

5. Jos positiiviset reaaliluvut a, b, c, d toteuttavat yhtälöt

$$a^2+d^2-ad=b^2+c^2+bc \qquad \text{ja} \qquad a^2+b^2=c^2+d^2,$$

niin määritä lausekkeen $\frac{ab+cd}{ad+bc}$ kaikki mahdolliset arvot.

6. Kuinka monella tavalla voidaan maalata rivissä olevat 16 istuinta vihreiksi ja punaisiksi niin, että peräkkäisten yhdellä värillä maalattujen istuinten määrä on aina pariton?

7. Olkoon p_1, p_2, $\ldots$, p_{30} lukujen 1, 2, $\ldots$, 30 permutaatio. Kuinka monelle tällaiselle permutaatiolle pätee yhtälö

$$\sum_{k=1}^{30}|p_k-k|=450?$$

8. Albert ja Betty pelaavat seuraavat peliä. Punaisessa kulhossa on 100 sinistä palloa ja sinisessä kulhossa 100 punaista palloa. Jokaisella vuorolla pelaajan täytyy tehdä yksi seuraavista siirroista:

a) Ottaa kaksi punaista palloa sinisestä kulhosta ja laittaa ne punaiseen kulhoon.

b) Ottaa kaksi sinistä palloa punaisesta kulhosta ja laittaa ne siniseen kulhoon.

c) Ottaa kaksi eriväristä palloa yhdestä kulhosta ja heittää ne pois.

Pelaajat vuorottelevat ja Albert aloittaa. Se pelaaja voittaa, joka ensimmäisenä ottaa viimeisen punaisen pallon sinisestä kulhosta tai viimeisen sinisen pallon punaisesta kulhosta. Selvitä, kummalla pelaajalla on voittostrategia.

9. Mikä on pienin mahdollinen määrä ruutuja, jotka voi merkitä $n \times n$-ruudukolle niin, että kaikilla $m > \frac{n}{2}$ kaikkien $m \times m$-aliruudukkojen molemmat lävistäjät sisältävät jonkin merkityn ruudun?

10. Maassa on 100 lentokenttää. Super-Air operoi suorin lennoin joidenkin lentokenttäparien väliä (molempiin suuntiin). Lentokentän *liikenneindeksi* on niiden lentokenttien määrä, joihin siltä on suora Super-Airin lento. Uusi lentoyhtiö Concur-Air ryhtyy liikennöimään kahden lentokentän väliä jos ja vain jos niiden liikenneindeksien summa on vähintään 100. Havaitaan, että Concur-Airin lennoilla voi tehdä maanympärysmatkan laskeutuen jokaiselle kentälle täsmälleen kerran. Osoita, että myös Super-Airin lennoilla voi tehdä maanympärysmatkan laskeutuen jokaiselle kentälle täsmälleen kerran.

11. Olkoon Γ teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Pisteen C kautta kulkeva sivun AB normaali leikkaa sivun AB pisteessä D ja ympyrän Γ uudelleen pisteessä E. Kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä F ja ympyrän Γ uudelleen pisteessä G. Suora GD leikkaa ympyrän Γ uudelleen pisteessä H, ja suora HF leikkaa ympyrän Γ uudelleen pisteessä I. Osoita, että $AI = EB$.

12. Olkoon annettu kolmio ABC. Olkoon M sivun AB keskipiste ja olkoon T kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän sen kaaren BC keskipiste, joka ei sisällä pistettä A. Olkoon K sellainen kolmion ABC sisäpiste, että $MATK$ on tasakylkinen puolisuunnikas, jossa $AT \parallel MK$. Osoita, että $AK = KC$.

13. Olkoot neliön $ABCD$ kärjet ympyrällä ω ja olkoon P ympyrän ω lyhyemmän kaaren AB jokin piste. Olkoot $CP \cap BD = R$ ja $DP \cap AC = S$. Osoita, että kolmioiden ARB ja DSR alat ovat yhtä suuret.

14. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio, ja puolittakoon BD kulman ABC. Kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä leikkaa sivun AD pisteessä P ja sivun CD pisteessä Q. Pisteen D kautta kulkeva sivun AC suuntainen suora leikkaa suoran BC pisteessä R ja suoran BA pisteessä S. Osoita, että pisteet P, Q, R ja S ovat samalla ympyrällä.

15. Kuperan nelikulmion $ABCD$ kulmien A ja C summa on pienempi kuin $180°$. Osoita, että

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC < AC(AB + AD).$$

16. Selvitä, onko $712! + 1$ alkuluku.

17. Onko olemassa pareittain erisuuria rationaalilukuja x, y ja z, joille

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = 2014?$$

18. Olkoon p alkuluku, ja olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kuinka monta sellaista nelikkoa (a_1, a_2, a_3, a_4) on, missä $a_i \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ kun $i = 1, 2, 3, 4$, ja joille

$$p^n \mid (a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1)?$$

19. Olkoot m ja n keskenään yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Etsi lausekkeen

$$\text{s.y.t.}(2^m - 2^n, 2^{m^2+mn+n^2} - 1)$$

kaikki mahdolliset arvot.

20. Tarkastellaan sellaista positiivisten kokonaislukujen jonoa a_1, a_2, a_3, $\ldots$, jolle kaikilla $k \geq 2$ pätee

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2015^i},$$

missä 2015^i on suurin luvun 2015 potenssi, joka on luvun $a_k + a_{k-1}$ tekijä. Osoita, että jos kyseinen jono on jaksollinen, niin sen jakson pituus on jaollinen kolmella.