Baltian Tie 2013

Tehtävät ja ratkaisut

1. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Oletetaan, että n lukua valitaan taulukosta*

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

niin, että miltään sarakkeelta tai riviltä ei ole valittu kahta lukua. Määritä näiden n:n luvun suurin mahdollinen tulo.

Ratkaisu. Taulukosta eri riveiltä ja sarakkeilta valitun n:n luvun tulo on

$$R(\sigma) = \prod_{i=0}^{n-1}(ni + \sigma(i)),$$

missä $\sigma : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ on jokin permutaatio. Jos $R(\sigma)$ on mahdollisimman suuri, kaikki tulon tekijät ovat positiivisia. Oletetaan, että $R(\sigma)$ on maksimaalinen. Oletaan, että joillain $a > b$ on $\sigma(a) > \sigma(b)$. Olkoon sitten τ permutaatio, jolle $\tau(i) = \sigma(i)$, kun $i \neq a$, b, mutta $\tau(a) = \sigma(b)$ ja $\tau(b) = \sigma(a)$. Silloin

$$\frac{R(\tau)}{R(\sigma)} = \frac{(na + \tau(a))(nb + \tau(b))}{(na + \sigma(a))(nb + \sigma(b))} = \frac{(na + \sigma(b))(nb + \sigma(a))}{(na + \sigma(a))(nb + \sigma(b))}.$$

Mutta $(na + \sigma(b))(nb + \sigma(a)) - (na + \sigma(a))(nb + \sigma(b)) = n(a - b)(\sigma(a) - \sigma(b)) > 0$, joten $R(\tau) > R(\sigma)$. Tämä on ristiriidassa $R(\sigma)$:n maksimaalisuuden kanssa. On siis oltava $\sigma(a) < \sigma(b)$ aina, kun $a > b$. Se merkitsee, että σ on permutaatio, joka kääntää järjestyksen päinvastaiseksi: $\sigma(i) = n - 1 - i$ kaikilla i, ja

$$R(\sigma) = \prod_{i=0}^{n-1}(ni + n - 1 - i) = \prod_{i=0}^{n-1}(i + 1)(n - 1) = (n - 1)^n n!.$$

2. *Olkoot k ja n positiivisia kokonaislukuja ja x_1, x_2, $\ldots$, x_k, y_1, $y2$, $\ldots$, y_n keskenään eri suuria kokonaislukuja. Kokonaislukukertoimiselle polynomille P pätee*

$$P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_k) = 54$$

ja

$$P(y_1) = P(y_2) = \cdots = P(y_n) = 2013.$$

Määritä lausekkeen kn suurin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. Osoitetaan, että kn voi olla enintään 6. Polynomilla $Q(x) = P(x) - 54$ on k nollakohtaa $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Siis

$$Q(x) = \prod j = 1^k(x - x_j)q(x),$$

missä $q(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi. Q saa arvon 1959 pisteissä $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Siis

$$Q(y_i) = \prod_{j=1}^{k}(y_i - x_j)q(y_i) = 1959 = 3 \cdot 653.$$

Luvut $q(x_i)$ ovat kokonaislukuja. Polynomilla $R(x) = P(x) - 2013$ on puolestaan n nollakohtaa $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ja se saa arvon -1959 k:ssa pisteessä $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Siis

$$R(x_j) = \prod_{i=1}^{n}(x_j - y_i)r(x_j) = -3 \cdot 653,$$

ja luvut $r(x_j)$ ovat kokonaislukuja. Merkitään $|y_i - x_j| = a_{ij}$, $|q(y_i)| = b_i$ ja $|r(x_j)| = c_j$. Lyhyt tutkimus osoittaa, että 653 on alkuluku. Kaikki luvut a_{ij}, b_i, c_j kuuluvat joukkoon $\{1, 3, 653, 1959\}$. Luvuista a_{1j} enintään kaksi voi olla > 1 ja enintään kaksi $= 1$. Siis $k \le 4$. Samoin osoitetaan, että $n \le 4$. Oletetaan, että $k = 4$ ja $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{13} = 3$ ja $a_{14} = 653$. Luku y_1 on silloin x_1:n ja x_2:n keskiarvo. Jos nyt $n > 1$, niin luvuista a_{2j} enintään kaksi on > 1 ja siis ainakin kaksi $= 1$. Koska $y_2 \ne y_1$, luvuista a_{21} ja a_{22} ainakin toinen on > 1. Voidaan olettaa, että $a_{21} = 3$ ja $a_{22} = a_{23} = 1$. Silloin $|y_1 - y_2| = 2$ ja $|y_2 - x_4| = |y_1 - x_4| \pm 2$. Ei voi olla $a_{24} = 653$. On oltava $n = 1$. Samoin osoitetaan, että jos $n = 4$, niin $k = 1$. Epäyhtälön $kn \le 6$ todistamiseksi on vielä torjuttava tapaus $k = n = 3$. Oletetaan, että olisi $k = n = 3$. Silloin olisivat voimassa yhtälöt

$$\begin{aligned} a_{11}a_{12}a_{13}b_1 &= 3 \cdot 653 \qquad & a_{11}a_{21}a_{31}c_1 &= 3 \cdot 653 \\ a_{21}a_{22}a_{23}b_2 &= 3 \cdot 653 \qquad & a_{12}a_{22}a_{32}c_2 &= 3 \cdot 653 \\ a_{31}a_{32}a_{33}b_3 &= 3 \cdot 653 \qquad & a_{13}a_{23}a_{33}c_3 &= 3 \cdot 653. \end{aligned}$$

Jos jokin b_i tai c_j olisi 1959, olisi jonkin y_i pisteen etäisyys kolmesta x_j-pisteestä yksi tai jonkin x_j-pisteen etäisyys kolmesta eri y_i-pisteestä yksi. Tämä ei ole mahdollista. Jos jonkin y_i- ja jonkin x_j-pisteen, esimerkiksi y_1:n ja x_1:n etäisyys on ≥ 653, niin y_1:n ja x_2:n sekä y_1:n ja x_3:n etäisyydet ovat ≤ 3. Samoin x_1:n ja y_2:n sekä x_1:n ja y_3:n. Muttä tällöin $|y_2 - x_2| = |y_2 - x_1 + x_1 - y_1 + y_1 - x_2| \ge |y_1 - x_1| - 6$, ja samoin $|y_3 - x_2| \ge |y_1 - x_1| - 2$. silloin varmasti $a_{12}a_{22}a_{32} \ge 653^2$. kaikki luvut a_{ij} ovat siis enintään 3. Edellä on jo osoitettu, että kiinteällä j:n arvolla kaikki luvut a_{ij} eivät voi olla ykkösiä eivätkä myöskään kiinteällä i;:n arvolla. On siis oltava esimerkiksi $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{13} = 3$. Koska $y_2 \ne y_1$, luvuista a_{21} ja a_{22} toinen on 3 ja toinen on 1. Voidaan olettaa esimerkiksi, että $a_{21} = 3$ ja $a_{22} = 1$. Silloin $a_{23} = 1$ ja pisteet x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 ovat x-akselilla tässä järjestyksessä ja yksikön välein. Siis $|x_3 - x_1| = 4$. Jotta luvuista a_{3j} yksi olisi 3 ja jokin toinen 1, on välttämättä oltava $a_{32} = 3$. Mutta y_3 on nyt etäisyydellä 1 sekä x_1:stä että x_3:sta. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $|x_1 - x_3| = 4$. Oletus $n = k = 3$ johti ristiriitaan, joten $kn \le 6$.

Polynomille $P(x) = 653x^2(x^2 - 4) + 2013$ pätee $P(\pm 1) = 0$ ja $P(0) = P(\pm 2) = 2013$ eli $k = 2$, $n = 3$. 6 on siis todella suurin mahdollinen kn:n arvo.

3. *Merkitään reaalilukujen joukkoa symbolilla* $\mathbb{R}$. *Määritä kaikki funktiot* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *niin, että*

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Olkoon $f(0) = c$. Tehdään tehtävän yhtälöön sijoituksia: 1) $x = 0$ ja $y = 0$. Silloin $f(0) + f(-c) = f(0)$, joten $f(-c) = 0$. 2) $x = 0$ ja $y = -c$. Silloin $f(-c) + f(-c) = f(c - c^2) - c$, joten $f(c - c^2) = c$. 3) $x = -c$ ja $y = -c$. Silloin $f(-c) + f(0) = f(c) - c$, joten $f(c) = 2c$. 4) $x = 0$ ja $y = c$. Silloin $f(c) + f(-c) = f(c^2 - c) + c$, joten $f(c^2 - c) = c$. 5) $x = -c$ ja $y = c^2 - c$). Silloin $f(-c) + f(0) = f(c - c^2) + c^2 - c$, eli $c^2 - c = 0$ eli $c = 0$ tai $c = 1$. Oletetaan nyt, että $c = 0$. Jatketaan sijoituksia: 6) $x = 0$. Silloin $f(y) = f(-y) + y$. 7) $y = 0$. Silloin $f(0) + f(-f(x)) = 0$ eli $f(-f(x)) = 0$. 8) $x = -1$. Silloin $f(y - f(y)) + 0 = f(y(f(-1) - 1)) + y$. Kohdan 6) perusteella $f(y - f(y)) = f(-f(-y))$, joten $f(y(f(-1) - 1)) = -y + f(-f(-y)) = -y$. Kun tässä kirjoitetaan $-y = x$, niin saadaan $f(x) = f(-f(y(f(-1) - 1)) = 0$. Mutta selvästikään nollafunktio $f(x) = 0$ kaikilla x ei toteuta tehtävän yhtälöä. Jäljelle jää vaihtoehto $c = 1$. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $x = 0$, saadaan $f(y) = f(y - y) + y = c + y = y + 1$. Tämä funktio toteuttaa tehtävän ehdon ja on siis ainoa ratkaisu.

2013.4. *Todista, että seuraava epäyhtälö pätee kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla* x, y, z:

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \ge \frac{x + y + z}{2}.$$

Ratkaisu. Todistettava epäyhtälö on symmetrinen kaikkien muuttujien suhteen, joten voidaan olettaa, että $x \le y \le z$. Silloin $x^3 \le y^3 \le z^3$ ja

$$\frac{1}{y^2 + z^2} \le \frac{1}{x^2 + z^2} \le \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Käytetään nyt suuruusjärjestysepäyhtälöä kahdesti:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{x^2 + z^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} &\ge \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{x^2 + z^2} + \frac{x^3}{x^2 + y^2} \\
\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{x^2 + z^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} &\ge \frac{z^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3}{x^2 + z^2} + \frac{y^3}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Kun nämä epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{x^2 + z^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{y^3 + z^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3 + z^3}{x^2 + z^2} + \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right). \tag{1}$$

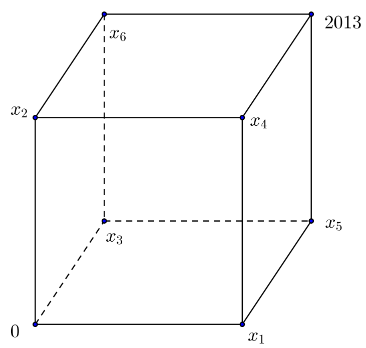
Mutta jos $a > 0$ ja $b > 0$, niin

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} - \frac{a + b}{2} = \frac{2a^3 + 2b^3 - a^3 - a^2 b - b^3 - ab^2}{2(a^2 + b^2)} = \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{2(a^2 + b^2)} \ge 0.$$

Kun tätä sovelletaan epäyhtälöön (1), saadaan heti

$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{x^2+z^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{2}+\frac{x+z}{2}+\frac{x+y}{2}\right)=\frac{x+y+z}{2}.$$

2013.5. *Luvut 0 ja 2013 kirjoitetaan kuution vastakkaisiin kärkiin. Jäljellä oleviin kuuteen kärkeen kirjoitetaan jotkin reaaliluvut. Jokaiseen kuution särmään kirjoitetaan sen päätepisteissä olevien lukujen erotus. Milloin särmille kirjoitettujen lukujen neliöiden summa on pienin mahdollinen?*



Ratkaisu. Jos luvut on sijoitettu kuution kärkiin kuvion mukaisesti, niin minimoitava summa on

$$\begin{aligned}S&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+(x_4-x_1)^2+(x_5-x_1)^2+(x_4-x_2)^2+(x_6-x_2)^2+\\&\quad+(x_5-x_3)^2+(x_6-x_3)^2+(2013-x_4)^2+(2013-x_5)^2+(2+13-x_6)^2\\&=\left(\frac{1}{2}x_1^2+(x_4-x_1)^2+\frac{1}{2}(2013-x_4)^2\right)+\left(\frac{1}{2}x_1^2+(x_5-x_1)^2+\frac{1}{2}(2013-x_5)^2\right)+\\&\quad+\left(\frac{1}{2}x_2^2+(x_4-x_2)^2+\frac{1}{2}(2013-x_4)^2\right)+\left(\frac{1}{2}x_2^2+(x_6-x_2)^2+\frac{1}{2}(2013-x_6)^2\right)+\\&\quad+\left(\frac{1}{2}x_3^2+(x_5-x_3)^2+\frac{1}{2}(2013-x_5)^2\right)+\left(\frac{1}{2}x_3^2+(x_6-x_3)^2+\frac{1}{2}(2013-x_6)^2\right).\end{aligned}$$

Tarkastellaan jälkimmäisen summan ensimmäistä yhteenlaskettavaa. Se voidaan kirjoittaa muotoon

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+(x_4-x_1)^2+\left(\frac{2013-x_4}{2}\right)^2+\left(\frac{2013-x_4}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

Nyt

$$\frac{x_1}{2}+\frac{x_1}{2}+x_4-x_1+\frac{2013-x_4}{2}+\frac{2013-x_4}{2}=2013.$$

Aritmeettisen ja neliöllisen keskiarvon välisen epäyhtälön (tai Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön) nojalla summa (1) on $\geq 5\cdot 2013^2$ ja yhtä suuruus eli neliösumman minimi saadaan, kun yhteenlaskettavat ovat yhtä suuret eli kun

$$\frac{x_1}{2}=x_4-x_1=\frac{2013-x_4}{2}.$$

Tästä ratkaistaan $x_4=\dfrac{3}{5}\cdot 2013$ ja $x_1=\dfrac{2}{5}\cdot 2013$. Vastaavalla tavalla saadaan muut minimiehdot. Yhdistettynä ehdot ovat $x_1=x_2=x_3=\dfrac{2}{5}\cdot 2013$, $x_4=x_5=x_6=\dfrac{3}{5}\cdot 2013$.

2013.6. *Joulupukilla on ainakin n lahjaa n:lle lapselle. Jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i:s lapsi pitää $x_i > 0$ eri lahjasta. Oletetaan, että*

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Todista, että joulupukki voi antaa jokaiselle lapselle lahjan, josta tämä pitää.

Ratkaisu. Ei merkitse rajoitusta, jos oletetaan, että

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n.$$

Aloitetaan lapsesta 1. Hän valitsee lahjan, josta pitää, ja ottaa sen. Sen jälkeen lapsi 2 valitsee jäljelle jääneistä mieluisen lahjan ja tätä jatketaan niin pitkään kuin mahdollista. Oletetaan, että k:s lapsi ei saa mieluista lahjaa. Koska ennen hänen vuoroaan lahjoja on jaettu $k-1$ kappaletta, on oltava $x_k \leq k-1$. Mutta silloin

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} \geq k \cdot \frac{1}{k-1} > 1.$$

Näin ollen ei voi olla $x_k \leq k-1$ millään k. Siis kaikki saavat mieluisen lahjan.

2013.7. *Liitutaululle on kirjoitettu positiivinen kokonaisluku. Pelaajat A ja B pelaavat seuraavaa peliä: vuorollaan pelaaja valitsee taululla olevan luvun n tekijän m, jolle $1 < m < n$, ja korvaa luvun n luvulla $n - m$. Pelaaja A aloittaa ja pelaajat vuorottelevat. Pelaaja, joka ei voi siirtää, häviää. Millä ensimmäisillä luvuilla pelaajalla B on voittostrategia?*

Ratkaisu. Pelissä on jokaisella n jommallakummalla pelaajalla voittostrategia (induktiotodistus). Osoitetaan, että B:llä on voittostrategia, jos ja vain jos n on pariton $n = 2^k$, missä k on pariton.

Osoitetaan ensin induktiolla, että B:llä on voittostrategia, kun n on pariton. Jos $n = 3$, A ei voi siirtää. Oletetaan, että B:llä on voittostrategia kaikilla parittomilla $k < n$. Jos n on pariton alkuluku, A ei voi tehdä siirtoa, ja B voittaa. Muussa tapauksessa A valitsee jonkin n:n aidon tekijän m. Silloin $\frac{n}{m} \geq 3$, joten $m \leq \frac{n}{3}$. Koska $n - m \geq \frac{2}{3}n$ on jaollinen m:llä, B voi valita myös luvun m. Seuraavaksi A:n edessä on pariton luku $n - 2m$, ja induktio-oletuksen mukaan B voittaa. Oletetaan sitten, että n on parillinen, mutta sillä on ykköstä suurempi pariton tekijä. Jos A nyt valitsee jonkin n:n parittoman tekijän m, niin B saa eteensä parittoman luvun $n - m$. Nyt A:lla on voittostrategia.

Olkoon sitten $n = 2^k$ jollain positiivisella kokonaisluvulla k. Osoitetaan induktiolla, että jos k on pariton, B:llä on voittostrategia, mutta jos k on parillinen, voittostrategia on A:lla. Induktion perustaksi todetaan, että jos $k = 1$, B voittaa (2 on alkuluku) ja jos $k = 2$, A voittaa. A valitsee $m = 2$, jolloin $n - m = 2$, eikä B voi siirtää. Induktioaskel tehdään kahdessa vaiheessa. Osoitetaan ensin, että jos A:lla on voittostrategia, kun $n = 2^k$, niin B:llä on voittostrategia, kun $n = 2^{k+1}$. Olkoon $n = 2^{k+1}$. Jos A valitsee $m = 2^k$, B saa luvun 2^k. Induktio-oletuksen mukaan B:llä on voittostrategia. Jos A valitsee $m = 2^p$, missä $1 \leq p < k$, niin $n - m = 2^{k+1} - 2^p$ on parillinen, muttei 2:n potenssi. Edellä todistetun mukaan B:llä on voittostrategia. Oletetaan sitten, että B:llä on voittostrategia, kun $n = 2^k$. Olkoon sitten $n = 2^{k+1}$. Kun A valitsee $m = 2^k$, B:llä on edessään 2^k. Induktio-oletuksen mukaan A:lla on nyt voittostrategia.

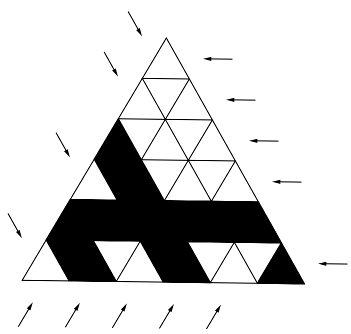
2013.8. *Saunassa on n huonetta, joissa on rajattomasti tilaa. Yhdessäkään huoneessa ei voi olla samanaikaisesti miestä ja naista. Lisäksi miehet haluavat saunoa samassa huoneessa vain sellaisten miesten kanssa, joita eivät tunne, ja naiset haluavat saunoa samassa huoneessa vain sellaisten naisten kanssa, joita tuntevat. Etsi suurin luku k, jolle k aviopa-ria voi käydä saunassa yhtä aikaa olettaen, että kaksi miestä tuntee toisensa, jos ja vain jos heidän vaimonsa tuntevat toisensa.*

Ratkaisu. Suurin k on varmasti $< n$; jos on n toisilleen tuntematonta pariskuntaa, niin miehet tarvitsevat kaikki n huonetta. Jos $n = 2$, suurin k on selvästi 1. Osoitetaan että kaikilla $n \geq 2$ on suurin k on $n-1$. Osoitetaan ensin induktiolla, että $n-1$ pariskuntaa voi saunoa. Väite pätee, kun $n = 2$. Oletetaan, että $n-2$ pariskuntaa voidaan sijoittaa esitettyjen sääntöjen mukaisesti $n-2$:een huoneeseen, ja että on käytössä n huonetta. Olkoon sitten tarkasteltavana $n-1$. pariskunta Pekka ja Pirkko, ja n huonetta, josta yksi on tyhjä. Oletetaan, että he tuntevat k kappaletta muista pariskunnista ja että m:ssä huoneessa on miehiä. Jos $m > k$, niin jossain huoneessa on vain Pekalle outoja miehiä. Pekka menee siihen ja Pirkko tyhjään huoneeseen. Jos taas $m \leq k$, niin $n-2-k < n-1-m$. Nyt $n-2-k$ on niiden naisten lukumäärä, joita Pirkko ei tunne, ja $n-1-m$ sellaisten huoneiden lukumäärä, joissa ei ole miehiä. Jossain huoneessa on siis vain Pirkolle tuttuja naisia, ja hän voi mennä siihen. Pekka voi mennä n:nteen, vielä tyhjään huoneeseen.

2013.9. *Maassa on 2014 lentokenttää, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Kahden lentokentän välillä on suora lento, jos ja vain jos näiden lentokenttien välinen suora jakaa maan kahteen osaan, joissa kummassakin on 1006 lentokenttää. Osoita, ettei ole olemassa kahta lentokenttää niin, että toisesta pääsee toiseen lentoreittiä, joka kulkee jokaisen 2014 lentokentän kautta täsmälleen kerran.*

Ratkaisu. Esitetään lentokentät tason pistejoukkona E. Tarkastellaan joukon *konveksia verhoa* E' eli pienintä monikulmiota, jonka sisällä tai reunalla kaikki pisteet ovat. Tämän monikulmion kärjet kuuluvat joukkoon E. Jos jonkin kärkipisteen kautta kulkevaa suoraa kierretään kärkipisteen ympäri alkaen asemasta, jossa suora yhtyy kärkipisteen kautta kulkevaan monikulmion sivuun, niin suoran toisella puolella olevien pisteiden määrä muuttuu monotonisesti hyppäyksin. Toisella puolella olevien pisteiden määrä on vain kerran 1006. Tämä merkitsee, että jokaisesta E':n kärkipisteestä on suora yhteys vain yhteen E:n pisteeseen. Monikulmiolla E' on ainakin kolme kärkeä, joten on mahdotonta muodostaa reittiä, joka kävisi kaikissa näissä.

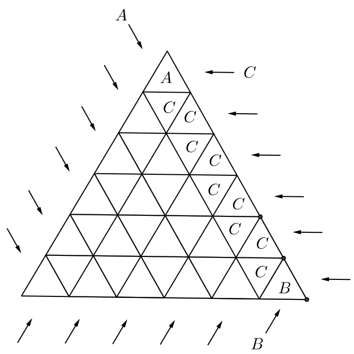
2013.10. *Valkoinen tasasivuinen kolmio jaetaan n^2 yhtä suureen pienempään kolmioon suorilla, jotka ovat yhdensuuntaisia kolmion sivujen kanssa. Kutsutaan kolmiojonoksi kaikkia kolmioita, jotka ovat kahden vierekkäisen yhdensuuntaisen suoran välissä. Erityisesti alkuperäisen kolmion kärjessä oleva kolmio on myös kolmiojono. Väritetään kaikki kolmiot mustiksi käyttämällä seuraavanlaisia operaatioita: valitaan kolmiojono, jossa on ainakin yksi valkoinen kolmio ja väritetään se mustaksi (mahdollinen tilanne tapauksessa $n = 6$ neljän operaation jälkeen on esitetty oheisessa*



kuvassa; nuolet kuvaavat mahdollisia seuraavia operaatioita tässä tilanteessa). Määritä väritykseen tarvittavien operaatioiden pienin ja suurin mahdollinen määrä.

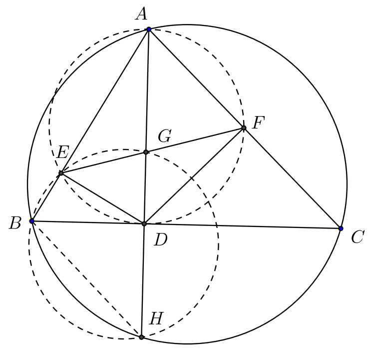
Ratkaisu. Osoitetaan, että operaatioita tarvitaan ainakin n, ja niitä voi olla enintään $3n-2$. Jos kaikki operaatiot tehdään yhden kolmion sivun suuntaisiin jonoihin, operaatioita tarvitaan n kappaletta. Osoitetaan induktiolla, että vähemmällä määrällä ei selvitä. Näin on varmasti, kun $n = 1$. Oletetaan, että kun $n = k$, tarvitaan ainakin k operaatiota. Olkoon $n = k + 1$. Jokin operaatio värittää kolmion vasemman alakulman. Voidaan olettaa, että tämä operaatio värittää koko alarivin, koska silloin enintään lisätään mustien kolmioiden määrää. Operatioiden järjestyksellä ei ole merkitystä, joten voidaan olettaa, että ensimmäinen operaatio värittää alarivin. Silloin jäljelle jää tapaus $n = k$; ylimpien k:n rivin kolmiot voidaan induktio-oletuksen mukaan värittää k:lla operaatiolla.

Osoitetaan sitten, että voidaan käyttää $3n-2$ operaatiota. Asia on selvä, jos $n = 1$. Oletetaan, että väite pätee, kun $n = k$. Kun $n = k+1$, aloitetaan kolmella operaatiolla A, B ja C, joilla väritetään yksi kolmiojono, kuvan mukaisesti. Jäljelle jää tapaus $n = k$, johon voidaan käyttää $3k + 2$ operaatiota induktio-oletuksen mukaisesti. Silloin voidaan käyttää kaikkiaan $3 + 3k + 2 = 3(k + 1) + 2$ operaatiota. On vielä osoitettava, että operaatioita ei voi olla enempää kuin $3n - 2$ kappaletta. Jos kaikki yhden kolmion sivun suuntaiset n janaa on väritetty mustiksi, koko kolmio on musta. Ennen viimeistä väritystä enintään $3(n - 1)$ janaa voi olla mustia, joten operaatioita voi olla enintään $3(n - 1) + 1 = 3n - 2$.



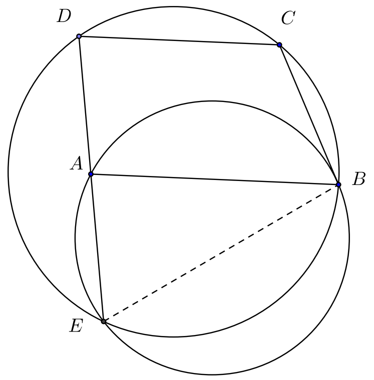
2013.11. *Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC, jossa $AC > AB$, D on pisteen A projektio sivulla BC. Olkoot E ja F pisteen D projektiot sivuilla AB ja AC. Olkoon G suorien AD ja EF leikkauspiste. Olkoon H suoran AD ja kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän toinen leikkauspiste. Todista, että*

$$AG \cdot AH = AD^2.$$



Ratkaisu. Koska kulmat $\angle AED$ ja $\angle DFA$ ovat suoria, $AEDF$ on jännenelikulmio. Siis $\angle AEF = \angle ADF$ $= \angle BCA$ (viimeinen yhtälö johtuu siitä, että kulmien kyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan). Toisaalta kolmion ABC ympärysympyrän kehäkulmista nähdään, että $\angle BHG = \angle BHA = \angle BCA$. Nelikulmiossa $BHGE$ on kärjessä H kulma, joka on kärjessä E olevan kulman vieruskulma. Tästä seuraa, että $BHGE$ on jännenelikulmio. Pisteen A potenssi tämän nelikulmion ympärysympyrän suhteen on $AG \cdot AH = AE \cdot AB$. Mutta yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista ABD ja ADE nähdään, että $AE \cdot AB = AD^2$, ja väite on todistettu.

2013.12. *Olkoon $ABCD$ puolisuunnikas, jossa $AB \| CD$. Oletetaan, että kolmion BCD ympäri piirretty ympyrä leikkaa suoran AD pisteessä E, $E \neq A$, D. Todista, että suora BC sivuaa kolmion ABE ympäri piirrettyä ympyrää.*

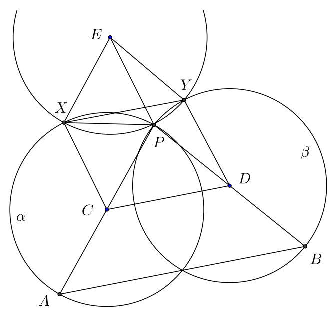


Ratkaisu. Kehäkulman ja jänteen ja tangentin välisen kulman yhtäsuuruutta koskevan tuloksen perusteella väite tulee todistetuksi, jos näytetään, että $\angle ABC = \angle AEB$. Mutta näin todella on, sillä suorien BA ja CD yhdensuuntaisuuden perusteella $\angle ABC$ ja $\angle BCD$ ovat vieruskulmia, ja koska $EBCD$ on jännenelikulmio, myös $\angle AEB = \angle DEB$ ja $\angle BCD$ ovat vieruskulmia.

2013.13. *Tetraedrin kaikki tahkot ovat suorakulmaisia kolmioita. Tiedetään, että kolmella sen särmistä on sama pituus s. Määritä tetraedrin tilavuus.*

Ratkaisu. Olkoon tetraedri $ABCD$ ja olkoon $AB = s$. Kaksi muuta s:n pituista särmää eivät molemmat voi olla CD; voidaan valita merkinnät niin, että $BC = s$. Silloin $AC \neq s$, koska muuten ABC olisi tasasivuinen, eikä suorakulmainen. Kumpikaan sivuista AB ja AC ei voi olla kolmion ABC hypotenuusa, joten hypotenuusa on BC ja siis $BC = s\sqrt{2}$. Jos olisi $BD = s$, olisivat ABD, CBD ja ABC yhteneviä suorakulmaisia kolmioita, ja ACD olisi tasasivuinen. Siis joko $AD = s$ tai CD=s. Kärjet voidaan tarvittaessa nimetä uudelleen niin, että $CD = s$. Kolmio ACD on suorakulmainen. Jos olisi $\angle ADC = 90°$, olisi $AD = s$. Kolmiosta ABD nähtäisiin, että $\angle BAD$ olisi suora. Umpinaisen murtoviivan $ABCD$ kaikki kulmat olisivat suoria ja kaikki sivut yhtä pitkiä. Tämä on mahdollista vain, jos $ABCD$ on tasoneliö. Samalla perusteella $\angle DAC \neq 90°$. Siis $\angle ACD =\neq 90°$. Siis DC on kohtisuorassa tasoa ABC vastaan, Tetraedrin $ABCD$ korkeus on siis $DC = s$ ja pohja ABC; tilavuudeksi lasketaan helposti $V = \dfrac{1}{6}s^3$.

2013.14. *Samasäteiset ympyrät α ja β leikkaavat kahdessa pisteessä, joista toinen on P. Olkoot A ja B pisteestä P piirrettyjen halkaisijoiden toiset päätepisteet ympyröillä α ja β, tässä järjestyksessä. Kolmas samasäteinen ympyrä kulkee pisteen P kautta ja leikkaa ympyrät α ja β pisteissä X ja Y, tässä järjestyksessä. Osoita, että suorat XY ja AB ovat yhdensuuntaiset.*



Ratkaisu. Olkoon C α:n ja D β:n keskipiste. Silloin CD kulkee on kolmion PAB sivujen PA ja PB keskipisteiden kautta, joten $AB \| CD$. Nelikulmiot $EXCP$ ja $EPDY$ ovat vinoneliöitä. Täten $CX \| PE \| DY$. Toisaalta $CX = DY$, joten $CDYX$ on suunnikas. Siis $XY \| CD$, joten väite on tosi.

2013.15. *Tasoon on piirretty neljä samankeskistä ympyrää, joiden säteet muodostavat* *aidosti kasvavan aritmeettisen jonon. Todista, että ei ole olemassa sellaista neliötä, että kukin näistä ympyröistä sisältäisi tasan yhden neliön kärjen.*

Ratkaisu. Olkoon $ABCD$ neliö ja O mielivaltainen piste neliön sisällä. Pythagoraan lauseesta saadaan helposti, että $OA^2+OC^2 = OB^2+OD^2$. Voidaan olettaa, että tehtävän ympyröiden säteet ovat 1, $1 + d$, $1 + 2d$ ja $1 + 3d$, $d > 0$. Jos $ABCD$ on nelikulmio, $OA = 1+3d$ ja B, C, D ovat kukin muilla ympyröillä, niin olisi $OA^2+OB^2-OC^2-OD^2 \geq (1 + 3d)^2 + 1 - (1 + d)^2 - (1 + 2d^2) = 4d^2 > 0$. $ABCD$ ei siis ole neliö. Ristiriita osoittaa, että $ABCD$ ei voi olla neliö.

2013.16. *Kutsutaan positiivista kokonaislukua n miellyttäväksi, jos on olemassa kokonaisluku k, $1 < k < n$, siten että*

$$1 + 2 + \cdots + (k - 1) = (k + 1) + (k + 2) + \cdots + n.$$

Onko olemassa miellyttävää lukua N, jolle pätee

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4?$$

Ratkaisu. Olkoon n jokin miellyttävä luku. Jollain k on silloin

$$\sum_{i=1}^{k-1} i = \sum_{i=k+1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{k} i.$$

Luvulle k pätee

$$k^2 = k + 2 \cdot \frac{(k-1)k}{2} = k + 2\sum_{i=1}^{k-1} i = \sum_{i=1}^{k-1} + \sum_{i=1}^{k} i = \sum_{i=k+1}^{n} i + \sum_{i=1}^{k} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Luvuilla n ja $n + 1$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Toinen luvuista on parillinen, joten toisen on oltava pariton neliöluku, koska yhtälöketjun vasemmalla puolella on neliöluku k^2. Jos n toteuttaisi tehtävän ehdon, olisi

$$\left(2013^{2013}\right)^2 < n < \left(2013^{2013}\right)^2 + 4 \cdot 2013^{2013} = \left(2013^{2013} + 2\right)^2 - 4$$

Epäyhtälön parin vasemman ja oikean jäsenen välissä voi olla vain neliöluku $\left(2013^{2013} + 1\right)^2$. Se on kuitenkin parillinen. Kumpikaan luvuista n, $n + 1$ ei voi olla pariton neliöluku. Kysytynlaista miellyttävää lukua ei ole olemassa.

2013.17. *Olkoot c ja $n > c$ positiivisia kokonaislukuja. Maryn opettaja kirjoittaa taululle n positiivista kokonaislukua. Pitääkö paikkansa kaikilla n ja c, että Mary voi aina valita opettajan kirjoittamille luvuille järjestyksen $a_1, , \ldots, a_n$ niin, että syklinen tulo $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdots (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$ on kongruentti toisen luvuista 0 tai c kanssa modulo n?*

Mary pystyy tekemään halutulla tavalla. Jos luvuissa on jotkin kaksi, joilla on sama jakojäännös modulo n, Mary laittaa nämä luvut peräkkäin; niiden lukujen erotus ja siis koko tulo on silloin jaollinen n:llä. Oletetaan sitten, että millään kahdella luvuista ei ole samaa jakojäännöstä modulo n. Jakojäännöksinä ovat silloin kaikki luvut $0, 1, \ldots, n-1$. Jos n on yhdistetty, on olemassa $k \geq 2$ ja $k \leq l \leq n-2$ niin, että $n = kl$. Mary valitsee nyt niin, että $a_1 \equiv k$, $a_2 \equiv 0$, $a_3 \equiv l+1$ ja $a_4 \equiv 1 \bmod n$. Luvut a_1, a_2, a_3 ja a_4 ovat eri lukuja ja $(a_1 - a_2)(a_3 - a_4) \equiv k((l+1)-1) = n$. Tulo on siis jaollinen n:llä. Olkoon sitten n alkuluku. Luvut ci ja cj, $1 \leq i < j \leq n$ eivät ole kongruentteja modulo n, eivätkä siis myöskään luvut $cn - ci$ ja $cn - cj$. Jos Mary valitsee niin, että $a_i \equiv cn - ci \bmod n$, niin $a_i - a_{i+1} \equiv c \bmod n$, ja edelleen Maryn tulo on $\equiv c^n \bmod n$. Mutta Fermat'n pienen lauseen perusteella $c^n \equiv c \bmod n$, joten todistus on valmis.

2013.18. *Määritä kaikki kokonaislukuparit (x, y), joille $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.*

Ratkaisu. Selvästi $(x, y) = (0, 1)$ on ratkaisu ja ainoa sellainen ratkasu, jossa $x = 0$. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Oletetaan että (x, y) olisi ratkaisu. Silloin myös $(-x, y)$ olisi ratkaisu. Voidaan siis olettaa, että $x > 0$. Nyt on, niin kuin helposti nähdään, $y^3 = x^4 + x^2 + 1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Osoitetaan, että luvuilla x^2+x+1 ja x^2-x+1 olisi yhteinen tekijä p. Se olisi silloin lukujen erotuksen $2x$ tekijä. Mutta x^2+x+1 on pariton, joten p on pariton. Silloin p on x:n tekijä ja myös (x^2+x):n, muttei (x^2+x+1):n tekijä. Siis s.y.t.$(x^2+x+1,\, x^2-x+1) = 1$. Tämä merkitsee, että sekä x^2+x+1 että x^2-x+1 ovat kuutiolukuja, $x^2+x+1 = a^3$, $x^2-x+1 = b^3$, $b < a$. Koska $x \geq 1$, $a > x^{2/3}$. Jos $a \geq 3$, niin $a^2 \geq 3a$ ja $2a^2 \leq 3a^2 - 3a$. Tällöin

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 = b^3 \leq (a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 < a^3 - 3a^2 + 3a \leq a^3 - 2a^2 \\ = x^2 + x + 1 - 2a^2 < x^2 + x + 1 - 2x^{4/3} \end{aligned}$$

ja $0 \leq 2x - 2x^{4/3}$. Tämä ei ole mahdollista. Siis $a = 1$ tai $a = 2$. Mutta a on pariton, joten $a \neq 2$, ja jos $a = 1$, niin $x = 0$. Ratkaisua, jossa $x \neq 0$, ei siis löydy.

2103.19. *Olkoon $a_0 = a > 0$ kokonaisluku ja $a_n = 5a_{n-1} + 4$ kaikilla $n \geq 1$. Voidaanko a valita niin, että a_{54} on luvun 2013 monikerta?*

Ratkaisu. Voidaan. Olkoon nimittäin $x_n = \dfrac{a_n}{5^n}$. Silloin $x_0 = a_0$ ja $5^n x_n = a_n = 5a_{n-1} + 4 = 5^n a_{n-1} + 4$, joten $x_n = x_{n-1} + \dfrac{4}{5^n}$. Täten, kun $n \geq 1$, on

$$x_n = x_0 + \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^{n-1}}\right) = a_0 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{5^n}}{1 - \dfrac{1}{5}} = a_0 + 1 - \frac{1}{5^n}.$$

Edelleen $a_n = 5^n x_n = 5^n(a_0 + 1) - 1$. Olkoon nyt b luvun 5^{54} jakojäännös modulo 2013. Koska luvuilla 5 ja 2013 ei ole yhteisiä tekijöitä, $b \neq 0$, ja b:llä ja 2013:lla ei ole yhteisiä tekijöitä. Silloin $a_{54} \equiv (a_0 + 1)b - 1 \bmod 2013$ ja tehtävä palautuu lineaariseksi Diofantoksen yhtälöksi $bx + 2013y = 1$. Sillä on äärettömän monta ratkaisua, ja niiden joukossa on sellaisa, joissa $x \geq 2$. Jokainen tällainen voi olla $a_0 + 1$.

2013.20. *Määritä kaikki polynomit f, joiden kertoimet ovat epänegatiivisia kokonaislukuja siten, että kaikilla alkuluvuilla p ja positiivisilla kokonaisluvuilla n on olemassa alkuluku q ja positiivinen kokonaisluku m siten, että $f(p^n) = q^m$.*

Ratkaisu. Jos f on vakiopolynomi, vakion on oltava muotoa q^m, missä q on alkuluku ja m positiivinen kokonaisluku. Kaikki tällaiset vakiopolynomit ovat tietysti ratkaisuja. Oletetaan sitten, että $f(t) = a_k t^k + \cdots + a_0$ on jokin ehdon toteuttava polynomi, $k \geq 1$, $a_k > 0$. Tarkastetaan ensin tilannetta, jossa $a_0 \neq 1$. Olkoon p jokin a_0:n alkutekijä (jos $a_0 = 0$, p voi olla mikä hyvänsä alkuluku). Nyt $p \| f(p^n)$ kaikilla n. Koska toisaalta $f(p^n) = q^m$, on kaikilla n oltava $f(p^n) = p^m$ jollain m. Oletetaan nyt, että $a_s \neq 0$ jollain $s < k$. Kun n on riittävän suuri, $p^{nk} > a_{k-1}p^{n(k-1)} + \cdots + a_0 > 0$. Silloin $f(p^n) \not\equiv 0 \bmod p^{nk}$. Mutta toisaalta $f(p^n) = p^m$ jollain m ja $p^m = f(p^n) > p^{nk}$, joten $f(p^n)$ on jaollinen p^{nk}:lla. Ristiriita osoittaa, että $a_s = 0$ kaikilla $s < k$, joten $f(t) = a_k p^k$. Helposti huomataan, että on oltava $a_k = 1$. Kaikki polynomit f, $f(t) = t^m$ jollain kokonaisluvulla m ovat ratkaisuja. Jäljellä on vielä mahdollisuus $a_0 = 1$. Olkoon nyt $g(t) = f(f(t))$. Myös polynomi g toteuttaa tehtävän ehdon. Nyt $g(0) = p(p(0)) = p(1) > 1$. Aikaisemman perusteella on oltava $g(t) = t^k$ jollain k. Siis $g(0) = 0$. Ristiriita osoittaa, että $a_0 = 1$ ei ole mahdollinen. Tehtävän ratkaisuja ovat siis vain vakiopolynomit $f(t) = q^m$, missä q on alkuluku ja m positiivinen kokonaisluku sekä monomit $f(t) = t^m$, missä m on positiivinen kokonaisluku.