Tehtävät

10 November 2012, Tartu, Estonia

–Finnish version–

Aikaa on 4 tuntia 30 minuuttia.
Ensimmäisten 30 minuutin aikana voi esittää kysymyksiä.
Ainoat sallitut työvälineet ovat kirjoitus- ja piirustusvälineet.

Tehtävä 1. Luvut 1, 2, ..., 360 ositetaan 9 osajoukoksi peräkkäisiä kokonaislukuja, ja näissä joukoissa olevien lukujen summat järjestetään 3×3-taulukoksi. Onko mahdollista, että näin syntyvä taulukko on taikaneliö?

Huomautus: Taikaneliö on neliön muotoinen lukutaulukko jossa jokaisen rivin, jokaisen sarakkeen ja kummankin lävistäjän lukujen summat ovat kaikki keskenään yhtä suuria.

Tehtävä 2. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Osoita, että

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Tehtävä 3. a) Todista, että yhtälöllä

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

missä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka ei ole suurempi kuin x, on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu jokaisella kahden peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun määräämällä välillä.

b) Osoita, ettei mikään tämän yhtälön positiivisista reaaliratkaisuista ole rationaalinen.

Tehtävä 4. Osoita, että äärettömän monella kokonaislukuparilla (a, b) yhtälön

$$x^{2012} = ax + b$$

ratkaisuiden joukosta löytyy kaksi eri reaalilukua, joiden tulo on 1.

Tehtävä 5. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Tehtävä 6. Pöydällä on 2012 lamppua. Kaksi henkilöä pelaavat seuraavanlaista peliä. Vuorossa oleva pelaaja painaa jonkin lampun katkaisijaa, mutta näin syntyvä asetelma ei saa olla esiintynyt aiemmin pelin aikana. Pelaaja, joka ei voi enää tehdä laillista siirtoa, häviää. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

Tehtävä 7. 2012×2012-ruudukon oikeasta ylänurkasta vasempaan alanurkkaan kulkevan lävistäjän jotkin ruudut on merkitty. Nurkkaruutuja ei ole merkitty. Ruudukon jokaiseen ruutuun kirjoitetaan kokonaisluku seuraavalla tavalla. Ruudukon ylimmän rivin ja vasemman puoleisimman sarakkeen ruutuihin kirjoitetaan luku yksi. Merkittyihin ruutuihin kirjoitetaan kuhunkin nolla. Jokaiseen muuhun ruutuun kirjoitetaan sen yläpuolella ja vasemmalla olevien naapuriruutujen lukujen summa. Osoita, ettei oikeasta alanurkasta voi löytyä luvulla 2011 jaollista lukua.

Tehtävä 8. On annettu suunnistettu verkko, joka ei sisällä suunnistettuja syklejä, ja jossa jokaisen polun särmien lukumäärä on enintään 99. Osoita, että on mahdollista värittää verkon särmät kahdella värillä siten, että jokaisessa yksivärisessä polussa on enintään 9 särmää.

Tehtävä 9. Kaikkiin 5×5-ruudukon ruutuihin on kirjoitettu luku nolla. Voimme yksi kerrallaan ottaa jonkin ruudun ja sen naapuriruudut (joilla on yhteinen sivu sen kanssa), ja kasvattaa kaikkien niiden sisältämiä lukuja yhdellä. Onko mahdollista saada aikaan ruudukko, jonka jokaisessa ruudussa on luku 2012?

Tehtävä 10. Henkilöt A ja B pelaavat seuraavaa peliä. Ennen kuin peli alkaa, A valitsee 1000 paritonta alkulukua (joiden ei tarvitse olla erisuuria), ja sitten B valitsee niistä puolet ja kirjoittaa ne tyhjälle liitutaululle. Vuorossa oleva pelaaja valitsee positiivisen kokonaisluvun n, pyyhkii taululta jotkin alkuluvut p_1, p_2, ..., p_n ja kirjoittaa niiden tilalle luvun $p_1 p_2 \cdots p_n - 2$ alkulukutekijät. (Jos jokin alkuluku esiintyy alkutekijähajotelmassa useamman kerran, niin se myös kirjoitetaan taululle yhtä monta kertaa kuin se tekijähajotelmassa esiintyy.) Pelaaja A aloittaa, ja se pelaaja, jonka siirto jättää jäljelle vain tyhjän liitutaulun, häviää. Osoita, että toisella pelaajista on voittostrategia, ja selvitä kummalla.

Huomautus: Koska luvulla 1 ei ole alkulukutekijöitä, on yksittäisen luvun 3 poistaminen sallittua.

Tehtävä 11. Olkoon ABC kolmio, jossa $\angle A = 60°$. Piste T sijaitsee kolmion sisällä siten, että $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Olkoon M janan BC keskipiste. Osoita, että $TA + TB + TC = 2AM$.

Tehtävä 12. Olkoot P_0, P_1, ..., $P_8 = P_0$ ympyrän kehän peräkkäisiä pisteitä, ja olkoon piste Q monikulmion $P_0 P_1 \dots P_7$ sisällä siten, että $\angle P_{i-1} Q P_i = 45°$ kun $i = 1, \dots, 8$. Osoita, että summa

$$\sum_{i=1}^{8} {P_{i-1}P_i}^2$$

on pienimmillään täsmälleen silloin kun piste Q on ympyrän keskipiste.

Tehtävä 13. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, ja olkoon H sen ortokeskus. Kärjistä A, B ja C piirretyt korkeusjanat leikkaavat ympäripiirretyn ympyrän pisteiden A, B ja C ohella myös pisteissä H_A, H_B ja H_C, tässä järjestyksessä. Osoita, ettei kolmion $\triangle H_A H_B H_C$ ala voi olla suurempi kuin kolmion $\triangle ABC$ ala.

Tehtävä 14. Kolmion ABC sisäänpiirretty ympyrä sivuaa sivuja BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F, tässä järjestyksessä. Olkoon G janan DE keskipiste. Osoita, että $\angle EFC = \angle GFD$.

Tehtävä 15. Jännenelikulmion $ABCD$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O sijaitsee kyseisen nelikulmion sisällä, mutta ei sen lävistäjällä AC. Nelikulmion lävistäjät leikkaavat pisteessä I. Kolmion AOI ympäripiirretty ympyrä leikkaa sivua AD pisteessä P ja sivua AB pisteessä Q; kolmion COI ympäripiirretty ympyrä leikkaa sivua CB pisteessä R ja sivua CD pisteessä S. Osoita, että $PQRS$ on suunnikas.

Tehtävät

10 November 2012, Tartu, Estonia

–Finnish version–

Tehtävä 16. Olkoot n, m ja k positiivisia kokonaislukuja, joille $(n-1)n(n+1) = m^k$. Osoita, että $k = 1$.

Tehtävä 17. Merkitköön $d(n)$ luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärää. Etsi kaikki kolmikot (n, k, p), joissa n ja k ovat positiivisia kokonaislukuja ja p on alkuluku, ja joille

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Tehtävä 18. Etsi kaikki kokonaislukukolmikot (a, b, c), joille $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Tehtävä 19. Osoita, että luku $n^n + (n+1)^{n+1}$ on yhdistetty äärettömän monella positiivisella kokonaisluvulla n.

Tehtävä 20. Etsi kaikki yhtälön $2x^6 + y^7 = 11$ kokonaislukuratkaisut.