Baltian Tie 2011. Ratkaisuja

2011.1. Olkoon $x_1 = x_{2012}$. Korotetaan kaikki yhtälöt $x_k + x_{k+1} = 2x'_k$ toiseen potenssiin, lasketaan yhteen ja käytetään summan vaihdantalakia:

$$4\sum_{k=1}^{2011} x_k = 4\sum_{k=1}^{2011} x'_k = \sum_{k=1}^{2011}(x_k + x_{k+1})^2 = 2\sum_{k=1}^{2011} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{2011} x_k x_{k+1}.$$

Koska alussa tehdyn merkintäsopimuksen mukaan

$$\sum_{k=1}^{2011} x_k^2 = \sum_{k=1}^{2011} x_{k+1}^2,$$

Saadaan

$$\sum_{k=1}^{2011}(x_k - x_{k+1})^2 = \sum_{k=1}^{2011}(x_k^2 - 2x_k x_{k+1} + x_{k+1}^2) = 0,$$

joten kaikki erotukset $x_k - x_{k+1}$ ovat nollia ja kaikki luvut x_k yhtä suuria.

2011.2. Jos funktionaaliyhtälöön sijoitetaan $y = f(x)$, nähdään, että $f(0) = 0$. Jos yhtälöön sijoitetaan $y = 0$, saadaan $f(f(x)) = -f(f(x))$, joten $f(f(x)) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Siis $f(f(x) - y) = f(y)$ kaikilla y. Kun edelliseen yhtälöön sijoitetaan $y = 0$, saadaan $f(-y) = f(y)$ kaikilla $y \in \mathbb{Z}$. Siis

$$f(f(x) - y) = f(y) = f(-y). \tag{1}$$

Jos $f(x) = 0$ kaikilla x, tehtävän ehto toteutuu varmasti. Oletetaan, että jollain t on $f(t) \neq 0$. Yhtälöstä (1) seuraa, että kaikilla $z \in \mathbb{Z}$ on $f(z) = f(z + f(t))$. f on siis jaksollinen funktio, ja sen arvot ovat kaikilla $z \in \mathbb{Z}$ välissä, jonka alaraja on $\min\{f(0),\, f(1),\, \ldots,\, f(|f(t)| - 1)\}$ ja yläraja $\max\{f(0),\, f(1),\, \ldots,\, f(|f(t)| - 1)\}$.

2011.3. Positiiviset kokonaisluvut x ja x^5 päättyvät aina samaan numeroon eli $x^5 - x \equiv 0 \bmod 10$. Tämän näkee ehkä helpoimmin tarkastelemalla lauseketta $x^5 - x = x(x-1)(x+1)(x^2+1)$ arvoilla $x = 0,\, 1,\, \ldots,\, 9$. Tästä seuraa helposti induktiolla, että x ja x^{1+4k} päättyvät samaan numeroon. Oletetaan nyt, että joillain n ja k olisi $a_{n+4k} = a_n$ ja $a_{n+4k+1} = a_{n+1}$. Silloin olisi a_{n+4k+2} eli luvun $a_{n+4k+1}^{n+4k+1} + a_{n+4k}$ viimeinen numero sama kuin luvun $a_{n+1}^{n+1+4k} + a_n$ viimeinen numero, joka edellä sanotun perusteella on sama kuin luvun $a_{n+1}^{n+1} + a_n$ viimeinen numero, eli a_{n+2}. Päättelyä jatkamalla nähtäisiin, että $a_{n+p} = a_{n+4k+p}$ kaikilla $p = 1,\, 2,\, \ldots$, joten jono olisi jaksollinen indeksin arvosta $n_0 = n$ alkaen. On siis vielä näytettävä, että sellaiset k ja n, joilla $a_{n+4k} = a_n$ ja $a_{n+4k+1} = a_{n+1}$, ovat olemassa. Tarkastetaan kaikkia pareja $(a_{2+4j},\, a_{3+4j})$, $j = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$. Parin kumpikin jäsen on jokin luvuista $0,\, 1,\, \ldots,\, 9$, joten erilaisia pareja on enintään 100. Koska parien jono on ääretön, ainakin jokin pari esiintyy ainakin kahdesti: $(a_{2+4j_1},\, a_{3+4j_1}) = (a_{2+4j_2},\, a_{3+4j_2})$, $j_1 < j_2$. Voidaan valita $n = n_0 = 2 + 4j_1$ ja $k = j_2 - j_1$.

2011.4. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella positiiviselle luvulle x pätee $x^3+2=x^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{x^3\cdot 1\cdot 1}=3x$. Tehtävän epäyhtälön todistamiseksi riittää, että osoitetaan todeksi

$$\frac{a}{3a+6}+\frac{b}{3b+6}+\frac{c}{3c+6}+\frac{d}{3d+6}\leq\frac{4}{9}.$$

Kun epäyhtälö kerrotaan puolittain 3:lla ja otetaan huomioon

$$1-\frac{x}{x+2}=\frac{2}{x+2},$$

saadaan todistettava epäyhtälö yhtäpitävään muotoon

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\geq\frac{4}{3}.$$

Mutta aritmeettisen ja harmonisen keskiarvon välinen yhtälö antaa nyt heti

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\right)&\geq\frac{4}{(a+2)+(b+2)+(c+2)+(d+2)}\\&=\frac{4}{4+4\cdot 2}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2011.5. Merkitään $a=f(0)$ ja $b=f(1)$. Silloin $f(a)=f(f(0))=0^2-0+1=1$ ja $f(b)=f(f(1))=1^1-1+1=1$. Edelleen $f(f(b))=f(1)=b$, joten $b^2-b+1=b$ ja $b=1$. Mutta $f(f(a))=f(1)=b=1$, joten $a^2-a+1=1$ ja $a=1$ tai $a=0$. Jos olisi $a=0$, saataisiin ristiriita $0=a=f(0)=f(a)=1$. Koska tehtävän oletuksien mukaan ehdon täyttävä f tiedetään olemassa olevaksi, on oltava $a=1$.

2011.6. Olkoon n' suurin kokonaisluku, joka on $\leq\dfrac{n}{2}$. Osoitetaan, että tehtävässä mainittuja suoria on ainakin $n^2-3n'^2\geq\dfrac{1}{4}n^2$. Kutsumme pistettä *relevantiksi*, jos sen molemmat koordinaatit ovat välin $[1,\,n]$ kokonaislukuja. Relevantti piste on *pieni*, jos se molemmat koordinaatit ovat enintään n'. Muussa tapauksessa piste on *iso*. Sanomme origon kautta kulkevaa suoraa *ikäväksi*, jos se kulkee ainakin kahden relevantin pisteen kautta.

Tarkastellaan jotain ikävää suoraa ℓ. Oletetaan, että suoralla ℓ on k relevanttia pistettä ja että $P=(x,\,y)$ on niistä lähinnä origoa. Jos $P_j=(jx,\,jy)$, niin suoralla ℓ olevat relevantit pisteet ovat $P_1,\,P_2,\,\ldots,\,P_k$. Koska $k\geq 2$, niin piste $P=P_1$ on pieni. Olkoon nyt k' sellainen positiivinen luku, että pisteet $P_1,\,\ldots,\,P_{k'}$ ovat pieniä, mutta $P_{k'+1},\,\ldots,\,P_k$ ovat isoja. Koska $P_{k'+1}$ ei ole pieni, $P_{2(k'+1)}$ ei ole relevantti. Siis $k\leq 2k'+1\leq 3k'$. Kun nämä epäyhtälöt muodostetaan kaikkien ikävien suorien kohdalla ja lasketaan yhteen, nähdään, että ikävillä suorilla olevien relevanttien pisteiden määrä on enintään 3 kertaa pienien pisteiden lukumäärä. Siten ainakin $n^2-3n'^2$ pisteistä ei kuulu mihinkään ikävään suoraan. Todistus on valmis.

2011.7. Tarkastellaan niitä T:n lukuja, joissa esiintyy 1 tai 2. Tällaisia on yhdeksän: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 26. Jos näistä valitaan jotkin kolme, niin joko 1 tai 2 esiintyy kahdesti, ja näin ollen kaikki kuusi numeroa eivät voi olla kolmikossa mukana. Tehtävässä kysytty n on siis ainakin 9. Jaetaan T viideksi osajoukoksi seuraavasti: $T_1 = \{12, 36, 45\}$, $T_2 = \{13, 24, 56\}$, $T_3 = \{14, 26, 35\}$, $T_4 = \{15, 23, 46\}$ ja $T_5 = \{16, 25, 34\}$. Jokaisen osajoukon T_j luvuissa ovat kaikki numerot. Siis jokaisesta näistä enintään kaksi lukua voi kuulua joukkoon S, joten $n \leq 10$.

Osoitetaan nyt, että $n = 9$. Tehdään vastaoletus $n = 10$. Silloin joka joukosta T_j on tasan kahden alkion kuluttava joukkoon S. Katsotaan sitä, kuinka monesti jokin numero puuttuu S:ään kuuluvista luvuista. Jos kaikki numerot puuttuisivat enintään kerran, S:ssä olisi ainakin 12 alkiota. Mikään numero ei voi puuttua kuin enintään neljä kertaa, muutenhan se ei esiintyisi S:n luvuissa ollenkaan. Voidaan nyt olettaa, että luvut 12 ja 13 eivät kuulu S:ään ja vaikkapa 16 kuuluu. Nyt 45 kuuluu S:ään, ja koska 16 myös kuuluu, luku 23 ei voi kuulua S:ään. Koska 36 ja 24 kuuluvat S:ään, 15 ei kuulu. Mutta silloin joukosta T_4 enintään yksi alkio kuuluu S:ään. Ristiriita, siis vastaoletus on väärin ja väite todistettu.

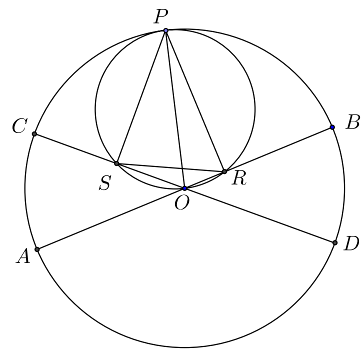
2011.8. Oletetaan, että tehtävän väite ei pidä paikkaansa. Koulussa A on jokin oppilas a, joka tuntee mahdollisimman monta koulun B oppilasta. Koulussa B on kuitenkin jokin oppilas b, jota a ei tunne. Koska b ei tunne kaikkia koulun C oppilaita, C:ssä on oppilas c, jota b ei tunne. Nyt a:n on tunnettava c, muuten joukossa $\{a, b, c\}$ ketkään kaksi eivät tuntisi toisiaan. Lisäksi A:ssa on oppilas a', jota c ei tunne. Jos olisi $a = a'$, niin joukossa $\{a, b, c\}$ ketkään kaksi eivät tuntisi toisiaan. Siis $a \neq a'$. Joukossa $\{a', b, c\}$ b ei tunne c:tä eikä c a':a, joten a' ja b tuntevat toisensa. Jos a' tuntisi kaikki ne B:n oppilaat, jotka a tuntee, niin a' tuntisi useampia B:n oppilaita kuin a. On siis jokin B:n oppilas b', jonka a tuntee, mutta a' ei tunne. Jos nyt b' ja c olisivat tuttavia, niin joukossa $\{a, b', c\}$ kaikki kolme tuntisivat toisensa. b' ja c eivät siis tunne toisiaan. Katsotaan nyt joukkoa $\{a', b', c\}$. Siinä ei ole yhtään tuttavaa. Oletus että tehtävän väite ei olisi totta, johti ristiriitaan tehtävän oletusten kanssa. Väite on siis totta.

2011.9. Osoitetaan, että väite on pätevä, jos ja vain jos n tai m on parillinen. Oletetaan esimerkiksi, että n, pystyrivien lukumäärä, on pariton. Silloin pätevä väritys voidaan tehdä värittämällä kaikki ruudukon reunojen ruudut ja joka toinen pystyrivi mustaksi. On yksinkertaista todeta, että tämä väritys toteuttaa tehtävän ehdot.

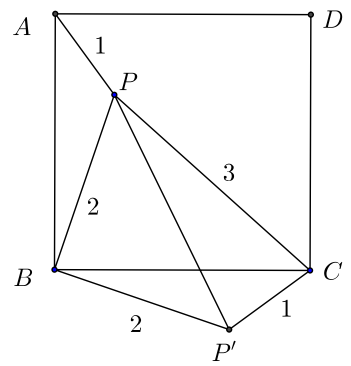
Osoitetaan, että jos m ja n ovat molemmat parillisia, pätevä väritys ei ole mahdollinen. Todistus perustuu muutamiin yksinkertaisiin verkkojen ominaisuuksiin. Verkon solmun aste on siitä lähtevien särmien lukumäärä. Verkon jokaisen yhtenäisen osan solmujen asteiden summa on parillinen, koska se on kaksi kertaa osassa olevien särmien lukumäärä. Muodostetaan verkko, jonka solmut ovat ruudukon ruudut. Verkon särmät yhdistävät kahta ruutua täsmälleen silloin, kun ruudut koskettavat toisiaan tasan yhdessä kärkipisteessä ja ne kaksi ruutua, joilla on kaksi yhteistä sivua edellisten kahden kanssa, ovat samanvärisiä. Nyt havaitaan, että niiden verkon solmujen, jotka vastaavat ruudukon neljää kärkeä, aste on 1. Muiden ruudukon reunaruutujen aste on 0 tai 2. Keskellä ruudukkoa olevia ruutuja vastaavien solmujen aste on 0, 2 tai 4. Tehtävässä kielletyt väritysyhdistelmät merkitsevät, että mitkään verkon särmät eivät leikkaa toisiaan. Koska kaikki särmät yhdistävät kulmittain toisiinsa nähden olevia ruutuja, niin jos ruudukkoon asetettaisiin šakkilautakuvio, niin kaikki särmät yhdistäisivät samanvärisiä ruutuja. Näin ollen mikään ketju ei voisi yhdistää kahta sellaista kärkiruutua, jotka ovat samalla reunalla. Koska kulmaruudut ovat ainoat ruudut, joiden aste on pariton, on vastakkaisten kärkien kuuluttava pareittain yhtenäiseen verkon osaan, mutta nämä osat ovat erillisiä. On siis olemassa kaksi ketjua, jotka yhdistävät vastakkaisia kärkipareja. Muta näiden on leikattava jossain. Leikkaaminen ei ole mahdollista, joten kun m ja n ovat parillisia, väritystä pätevää väritystä ei ole.

2011.10. Olkoon pelin aloittaja A ja toinen pelaaja B. Osoitetaan, että B voittaa aina. Ajatellaan luvut esitetyksi lukujärjestelmässä, jonka kantaluku on 2011. Aloittajan ensimmäinen siirto kohdistuu lukuun, jossa on 1 ja pariton määrä (2011) nollia. Siirron jälkeen luku on joko 2011^{2010}, siis 1 ja parillinen määrä nollia, tai luku, joka on välillä $]2011^{2011} - 2011,\ 2011^{2011} - 1]$ ja päättyy muuhun numeroon kuin nollaan. Edellisestä luvusta B saa luvun 2011^{2009}, joka on parittomaan määrään nollia päättyvä luku, jälkimmäisestä viimeisen numeron vähentämällä yhteen nollaan päättyvän luvun. A:n seuraava siirto johtaa taas välttämättä lukuun, joka päättyy parilliseen määrään nollia. Koska luvut joka siirrossa pienenevät, tullaan väistämättä lopulta tilanteeseen, jossa A:n siirron jälkeen syntyy (2011-järjestelmässä siis) yksinumeroinen positiivinen luku. Siitä B pääsee nollaan tai sen alle, ja voittaa.

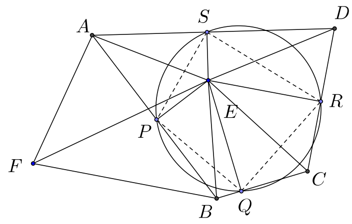
2011.11. Olkoon O ympyrän $\mathcal{C}$ keskipiste. Koska kulmat $\angle PRO$ ja $\angle PSO$ ovat suoria, S ja R ovat ympyrällä, jonka halkaisija on OP eli $\mathcal{C}$:n säde. Halkaisijan pituus ei siis riipu P:n sijainnista. Jos S ja R ovat eripuolilla halkaisijaa OP, niin SR on kehäkulmaa $\angle SPR = 180^\circ - \angle AOC$ vastaava jänne, jos taas S ja R ovat halkaisijan OP samalla puolella, $\angle SPR = \angle SOR = \angle AOC$ ja SR on edelleen samaa kehäkulmaa vastaava jänne. Jos S tai R yhtyy pisteeseen O, sama johtopäätös on helppo tehdä. SR:n pituus ei siis riipu pisteen P sijainnista.



2011.12. Kierretään kolmiota ABP 90° myötäpäivään pisteen B ympäri. Silloin A kuvautuu pisteeksi C ja P pisteeksi P' niin, että $BP' = BP$ ja $\angle PBP'$ on suora kulma. Kolmio PBP' on siis tasakylkinen suorakulmainen kolmio, joten $\angle BP'P = 45^\circ$ ja $PP'^2 = 2 \cdot BP^2 = 8$. Mutta $P'C = 1$, joten $PP'^2 + P'C^2 = 9 = PC^2$. Kolmio $PP'C$ on siten (Pythagoraan lauseen käänteislauseen perusteella) suorakulmainen. Siis $\angle APB = \angle CP'B = \angle CP'P + \angle PP'B = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.



2011.13. Osoitetaan, että $AFBE$ on jännenelikulmio. Koska $\angle AFB = \angle DEC$, on osoitettava, että $\angle AEB + \angle DEC = 180°$. Mutta jännenelikulmioista $APES$ ja $BQEP$ saadaan $\angle AEB = \angle AEP + \angle PEB = \angle ASP + \angle PQB$ ja jännenelikulmioista $CREQ$ ja $DSER$ vastaavasti $\angle DEC = \angle DER + \angle REC = \angle DSR + \angle RQC$. Siis $\angle AEB + \angle DEC = \angle ASP + \angle DSR + \angle PQB + \angle RQC = (180° - \angle PSR)$



$+(180° - \angle PQR)$. Mutta koska $PQRS$ on jännenelikulmio, $\angle PSR + \angle PQR = 180°$, ja väite seuraa. Koska nyt $AFBE$ on jännenelikulmio, voidaan soveltaa Ptolemaioksen lausetta. Sen mukaan

$$EF \cdot AB = AE \cdot BF + BE \cdot AF. \tag{1}$$

Kolmioiden ABF ja DCE yhdenmuotoisuudesta seuraa $AB : BF : AF = DC : CE : DE$. Näin ollen (1) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$EF \cdot CD = AE \cdot CE + BE \cdot DE. \tag{2}$$

Täsmälleen sama päättely sovellettuna muihin nelikulmion $ABCD$ sivuihin johtaa yhtälöihin

$$EG \cdot DA = BE \cdot \cdot DE + CE \cdot AE, \tag{3}$$

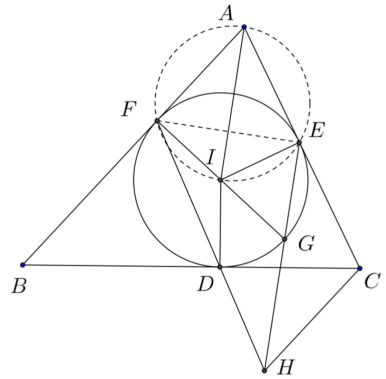
$$EH \cdot AB = EC \cdot AE + DE \cdot BE \tag{4}$$

ja

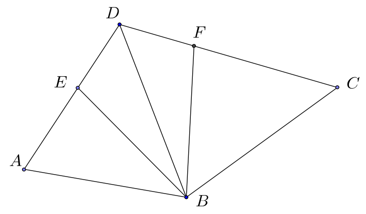
$$EI \cdot BC = DE \cdot BE + AE \cdot CE. \tag{5}$$

Yhtälöiden (2) – (5) oikeat puolet ovat laskujärjestystä vaille samat, joten yhtälöiden vasemmat puolet ovat samoja.

2011.14. Olkoon I kolmion ABC sisäympyrän keskipiste. Silloin $\angle DIE = 2 \cdot \angle DFE$. Koska FG on tämän ympyrän halkaisija, $\angle FEG = 90°$. Nyt $\angle DHE = 90° - \angle DFE = \frac{1}{2}(180° - \angle DIF) = \frac{1}{2} \cdot \angle DCE$. Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $DCEI$ on jännenelikulmio. Janat CD ja CE ovat yhtä pitkät, joten on olemassa C-keskinen ympyrä, joka kulkee pisteiden D ja E kautta. Mutta edellä tehty kulmien suuruuden tarkastelu osoittaa, että $\angle DHE$ on tämän ympyrän kehäkulma, ts. $CH = CE$. Koska CEF on tasakylkinen kolmio, on $\angle HCE = 180° - 2 \cdot \angle GEC$. Mutta $FE \perp EG$ ja $IE \perp EC$, joten $\angle GEC = \angle FEI = \angle FAI$.



Viimeinen yhtälö johtuu siitä, että $AFIE$ on jännenelikulmio. Mutta AI on kulman BAC puolittaja. Siis $\angle HCE = 180° - \angle BAC$. Tästä seuraa, että $AB \| CH$.



2011.15. Koska $\angle ADB = \angle BDC$, pisteen E peilikuvapiste suoran BD suhteen on suoralla DC. Olkoon F tämä piste. Koska $AE \cdot ED < CD \cdot AE$, niin $DF = ED < CD$, joten F on janalla DC. Kolmiot DEB ja DFB ovat yhteneviä, koska ne ovat symmetrisiä suoran BC suhteen. Siis $\angle AEB = \angle BFC$. Tehtävän ehdon mukaan $BE \cdot BF = BE^2 = AE \cdot (CD - ED) = AE \cdot (CD - DF) = AE \cdot FC$. Siis
$$\frac{BE}{AE} = \frac{FC}{BF}.$$
Mutta tämä merkitsee sitä, että kolmiot BEA ja CFB ovat yhdenmuotoisia (sks). Siis $\angle EBA = \angle FCB = \angle DCB$.

2011.16 Olkoon $y_n = x_n - 1$. Silloin $y_1 = 2$. Jonon (x_n) määrittelevä palautuskaava on $y_n = x_n - 1 = 2(y_{n-1} + 1) - 4(y_{n-2} + 1) + 2 = 2y_{n-1} - 4y_{n-2} = 2(2y_{n-2} - 4y_{n-3}) - 4y_{n-2} = -8y_{n-3}$. Siis $x_{2011} - 1 = y_{2011} = y_{3\cdot 670+1} = (-8)^{670}y_1 = 2^{2011}$. Tehtävässä kysytty k on siis 2011.

2011.17 Tunnetusti luvuilla 1, 3 ja 9 on tehtävän ominaisuus. Osoitetaan, että muita ei ole. Olkoon siis d jokin luku, jolla on tehtävän ominaisuus. Voidaan olettaa, että $10^{k-1} \leq d \leq 10^k$ Olkoon $10^{k+1} = qd + r$, missä $r < d \leq 10^k$. Nyt d on tekijänä luvussa $a = 10^{k+1} + r$. r on enintään k-numeroinen luku, joten $(k+2)$-numeroinen luku a alkaa numeroilla 10. d:n ominaisuuden perusteella d on tekijänä luvussa, joka alkaa a:n numeroilla ja jonka viimeiset numerot ovat 10 ja myös luvussa, joka alkaa a:n numeroilla ja jonka viimeiset numerot ovat 01. Mutta kahden viimeksi mainitun luvun erotus on 9. d on siis tekijänä luvussa 9, joten $d = 1$, $d = 3$ tai $d = 9$.

2011.18. Selvästi $3^2 + 3^3 = 36$, joten pari $(p, q) = (3, 3)$ täyttää tehtävän ehdon. Osoitetaan, että muita ehdon täyttäviä pareja ei ole. Osoitetaan ensin, että $p \neq 2$. Oletetaan, että on olemassa alkuluku q, jolle $q^2 + 8$ ja $q^3 + 4$ ovat neliölukuja. Koska $q^2 < q^2 + 8$, ei voi olla $(q+1)^2 > q^2 + 8$. Siis $(q+1)^2 \leq q^2 + 8$ eli $2q < 7$. Siis $q \leq 3$. Mutta $2^3 + 4 = 12$ ja $3^3 + 4 = 31$, joten $q^3 + p^2$ ei ole neliöluku. Siis p on pariton; symmetrian vuoksi myös q on pariton.

Tarkastetaan sitten tapaus $p = q$. Nyt $p^2(p+1)$ on neliöluku. Koska p on alkuluku, $p+1$ on neliöluku; $p = n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$, Koska p on alkuluku, on oltava $n - 1 = 1$, $n = 2$, $p = 3$.

Oletetaan sitten, että p ja q ovat keskenään erisuuria parittomia alkulukuja. Jos nyt $p^2 + q^3 = a^2$, niin $q^3 = (a-p)(a+p)$. Jos $a - p$ ja $a + p$ ovat jaollisia q:lla, niin $2p = (a+p) - (a-p)$ on jaollinen q:lla. Tämä ei ole mahdollista, koska p ja q ovat eri suuria parittomia alkulukuja. Siis on oltava $a - p = 1$ ja $a + p = q^3$. Kun nämä yhtälöt vähennetään toisistaan, saadaan $q^3 = 2p + 1$. Symmetrian perusteella on samoin $p^3 = 2q + 1$. Mutta tämä on mahdotonta: jos on $p < q$, niin $q^3 < p^3$. Ei ole mahdollista, että p ja q olisivat eri suuria parittomia alkulukuja.

2011.19. Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_p$ mielivaltainen aritmeettinen positiivisten kokonaislukujen jono ja olkoon $P = a_1a_2\cdots a_p$. Jos n on mielivaltainen kokonaisluku, niin

$P^n a_1$, $P^n a_2$, $\ldots$, $P^n a_p$ on aritmeettinen jono, ja tämän jonon alkioiden tulo on P^{np+1}. Koska $p > 3$ ja p on alkuluku, niin joko $p = 3q + 1$ eli $2p + 1 = 3(q + 1)$ jollain q tai $p = 3q - 1$ eli $p + 1 = 3q$ jollain q. Siis joko $P^2 a_1$, $P^2 a_2$, $\ldots$, $P^2 a_p$ tai Pa_1, Pa_2, $\ldots$, Pa_p kelpaa kysytyksi jonoksi.

2011.20. Oletetaan, että tehtävän väite ei pidä paikkaansa. Silloin on olemassa N siten, että millään $n \geq N$ ei ole niin, että luvuista n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ tasan kaksi olisi tasapainoisia. Jaetaan kaikki luvut, jotka ovat $\geq N$ jaksoihin, joiden kaikki luvut ovat joko tasapainoisia tai eivät ole tasapainoisia. Jätetään ensimmäinen jakso huomiotta; tarkastellaan siis lukuja, jotka ovat $\geq N' > N$. Tällöin ei voi olla kahta peräkkäistä jaksoa, joiden molempien pituus olisi ≥ 2. Ei myöskään ole mahdollista, että peräkkäin olisi kaksi jaksoa, joiden molempien pituus olisi 1. Tästä seuraa, että joko kaikki tasapainoiset jaksot ovat yhden pituisia ja kaikki epätasapainoiset jaksot ainakin 3:n pituisia tai kaikki kasapainoiset jaksot ovat ainakin 3:n pituisia ja kaikki tasapainottomat jaksot 1:n pituisia. Tarkastellaan kumpaakin mahdollisuutta.

Olkoot ensin kaikki tasapainottomat jaksot yhden pituisia. Valitaan alkuluku p niin, että $p^2 > 2N' + 3$. p^2 on tasapainoton. Siis $p^2 - 3$ ja $p^2 - 1$ sekä $p^2 + 1$ ovat tasapainoisia. Luvut $p^2 - 3$ ja $p^2 + 1$ ovat parillisia, mutta eivät jaollisia 4:llä. Koska niillä on parillinen määrä alkutekijöitä, niiden puolikkailla on pariton määrä tekijöitä, joten ne ovat tasapainottomia. Luku $p^2 - 1$ on jaollinen 4:llä. Siten sen puolikkaalla on edelleen alkutekijänä myös 2, joten $\dfrac{1}{2}(p^2 - 1)$ on edelleen tasapainoinen. Se muodostaa siis yhden pituisen tasapainoisen jakson, mikä on vastoin oletusta.

Olkoot sitten kaikki tasapainoiset jaksot yhden pituisia. Olkoot p ja q eri suuria parittomia alkulukuja niin, että $(pq)^2 > 2N' + 3$. Silloin p^2q^2 on tasapainoinen. Samoin kuin edellä voidaan päätellä, että $\dfrac{1}{2}((pq)^2 - 3)$ ja $\dfrac{1}{2}((pq) + 1)$ ovat tasapainoisia ja $\dfrac{1}{2}((pq)^2 - 1)$ on tasapainoton. Löytyi siis tasapainoton jakso, jonka pituus on 1, vastoin oletusta.

Oletus, että tehtävän mukaisia neljän positiivisen peräkkäisen luvun jaksoja olisi vain äärellinen määrä, johti siis ristiriitaan, joten se ei ole totta.