Baltic Way ´11
Greifswald, Germany

Tehtävät –Finnish version–

1. Reaaliluvut $x_1, \ldots, x_{2011}$ toteuttavat yhtälöt

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \ldots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011},$$

missä $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2011}$ on jonon $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ permutaatio. Todista, että $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2011}$.

2. Funktio $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ toteuttaa kaikilla kokonaisluvuilla x ja y yhtälön

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Osoita, että f on rajoitettu, ts. että on olemassa sellainen vakio C, että $-C < f(x) < C$ kaikilla kokonaisluvuilla x.

3. Epänegatiivisten kokonaislukujen jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on sellainen, että a_{n+1} on luvun $a_n^n + a_{n-1}$ viimeinen numero kaikilla $n > 2$. Pitääkö aina paikkansa, että jollakin n_0 jono $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ on jaksollinen?

4. Olkoot a, b, c ja d epänegatiivisia reaalilukuja ja $a + b + c + d = 4$. Todista, että

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}.$$

5. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka toteuttaa ehdon

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

kaikilla reaaliluvuilla x. Määritä $f(0)$.

6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että niiden suorien lukumäärä, jotka kulkevat origon ja täsmälleen yhden toisen pisteen (x, y) kautta, missä x ja y ovat kokonaislukuja, $0 \leq x \leq n$ ja $0 \leq y \leq n$, on vähintään $n^2/4$.

7. Tarkastellaan 15-alkioista joukkoa $T = \{10a + b \,|\, a, b \in \mathbb{Z},\ 1 \leq a < b \leq 6\}$. Olkoon S joukon T osajoukko, jossa kaikki kuusi numeroa $1, 2, \ldots, 6$ esiintyvät mutta joka ei sisällä kolmikkoa, jossa esiintyisivät kaikki nämä 6 numeroa. Määritä joukon S suurin mahdollinen koko.

8. Greifswaldissa on koulut A, B ja C, joista kutakin käy ainakin yksi oppilas. Kustakin oppilaskolmikosta, joista yksi käy koulua A, toinen koulua B ja kolmas koulua C, jotkin kaksi tuntevat toisensa ja jotkin kaksi eivät tunne toisiaan. Todista, että ainakin yksi seuraavista pätee:

- Jokin koulun A oppilas tuntee kaikki koulun B oppilaat.
- Jokin koulun B oppilas tuntee kaikki koulun C oppilaat.
- Jokin koulun C oppilas tuntee kaikki koulun A oppilaat.

9. Väritetään $m \times n$-ruudukon ruudut mustiksi ja valkoisiksi. Värityksen sanotaan olevan *pätevä*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

- Kaikki reunaruudut ovat mustia.
- Mitkään neljä 2×2-ruudukon muodostavaa ruutua eivät ole samanvärisiä.
- Mitkään neljä 2×2-ruudukon muodostavaa ruutua eivät ole niin väritetyt, että vain kulmittain toisiaan koskettavat ruudut ovat samanvärisiä.

Millä $m \times n$-ruudukoilla, jossa $m, n \geq 3$, on olemassa pätevä väritys?

10. Kaksi pelaajaa pelaa seuraavaa kokonaislukupeliä. Aluksi luku on 2011^{2011}, ja pelaajat siirtävät vuorotellen. Jokaisella siirrolla lukua voi vähentää kokonaisluvulla, joka on vähintään 1 ja korkeintaan 2010, tai luvun voi jakaa 2011:llä ja pyöristää alaspäin lähimpään kokonaislukuun. Pelaaja, joka ensimmäisenä päätyy epäpositiiviseen kokonaislukuun, voittaa. Kummalla pelaajista on voittostrategia?

11. Olkoot AB ja CD ympyrän $\mathcal{C}$ kaksi halkaisijaa ja P $\mathcal{C}$:n mielivaltainen piste. Olkoot R ja S pisteestä P AB:lle ja CD:lle piirrettyjen kohtisuorien kantapisteet. Osoita, että janan RS pituus ei riipu pisteen P valinnasta.

12. Olkoon P sellainen neliön $ABCD$ sisäpiste, että $PA : PB : PC$ on $1 : 2 : 3$. Määritä $\measuredangle BPA$.

13. Olkoon E kuperan nelikulmion $ABCD$ sisäpiste. Piirretään nelikulmion ulkopuolelle kolmiot ABF, BCG, CDH ja DAI siten, että $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ ja $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Olkoot P, Q, R ja S pisteen E projektiot suorilla AB, BC, CD ja DA, tässä järjestyksessä. Todista, että jos $PQRS$ on jännenelikulmio, niin

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC\,.$$

14. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F, tässä järjestyksessä. Olkoon G se sisään piirretyn ympyrän piste, jolle FG on ympyrän halkaisija. Suorat EG ja FD leikkaavat pisteessä H. Todista, että $CH \parallel AB$.

15. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio, jossa $\measuredangle ADB = \measuredangle BDC$. Oletetaan, että sivun AD piste E toteuttaa yhtälön

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Osoita, että $\measuredangle EBA = \measuredangle DCB$.

16. Olkoon a kokonaisluku. Määritellään jono $x_0, x_1, \ldots$ asettamalla $x_0 = a$, $x_1 = 3$ ja

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3,$$

kun $n > 1$. Määritä suurin kokonaisluku k_a, jolla on olemassa sellainen alkuluku p, että p^{k_a} jakaa luvun $x_{2011} - 1$.

17. Määritä kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut d, että jos d jakaa kokonaisluvun n, niin d jakaa myös jokaisen kokonaisluvun m, jonka numerot ovat jossain järjestyksessä samat kuin luvun n numerot.

18. Määritä kaikki alkulukuparit (p, q), joille sekä $p^2 + q^3$ että $q^2 + p^3$ ovat kokonaisluvun neliöitä.

19. Olkoon $p \neq 3$ alkuluku. Osoita, että on olemassa toistoton positiivisten kokonaislukujen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ aritmeettinen jono, jonka jäsenten tulo on kokonaisluvun kuutio.

20. Kokonaislukua $n \geq 1$ kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos sillä on parillinen määrä eri alkutekijöitä. Todista, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua n, että täsmälleen kaksi luvuista n, $n+1$, $n+2$ ja $n+3$ on tasapainoisia.