Baltian Tie 2010. Ratkaisuja

1. Olkoon $a+b+c+d=x$. Silloin $(x-a)^{2010}=3a$ ja $x=a+(3a)^{1/2010}$. Mutta aivan sama yhtälö saadaan, kun a korvataan b:llä, c:llä tai d:llä. Siis $a=b=c=d$. Koska siis $3a=(3a)^{1/2010}$ on oltava $3a=0$ tai $3a=1$. Yhtälöryhmän ratkaisuja ovat nelikot $(0,0,0,0)$ ja $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

2. Olkoon $t=\tan x$. Silloin

$$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1}{1+t^2}\qquad\text{ja}\qquad \sin^2 x=1-\cos^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

Todistettava epäyhtälö on siten

$$\frac{1}{t(1+t^2)}+\frac{t^3}{1+t^2}\ge 1,\qquad\text{kun}\quad t>0$$

eli $1+t^4\ge t+t^3$ eli $(t-1)(t^3-1)\ge 0$. Tulon molemmat tekijät ovat kaikilla t samanmerkkisiä, joten epäyhtälö on tosi.

3. Todistetaan väite induktiolla. Jos $n=2$, voidaan olettaa, että $1<x_1\le x_2<x_1+1$. Silloin

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<1+\frac{x_1+1}{x_1}=2+\frac{1}{x_1}<3=2\cdot 2-1.$$

Oletetaan, että väite on tosi, kun $n=k$ ja että $x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}$ ovat tehtävän ehdon täyttäviä lukuja. Silloin

$$\frac{x_1}{x_2}+\cdots+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}}{x_1}<2k-1+\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}}{x_1}-\frac{x_k}{x_1},$$

ja induktioaskeleen ottamiseksi riittää, kun osoitetaan, että

$$\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}}{x_1}-\frac{x_k}{x_1}=\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}-x_k}{x_1}\le 2. \tag{1}$$

Jos $x_k\le x_{k+1}$, (1) on selvästi voimassa. Jos $x_k\ge x_{k+1}$, (1):n vasen puoli on pienempi kuin

$$\frac{x_k}{x_{k+1}}<\frac{x_{k+1}+1}{x_{k+1}}=1+\frac{1}{x_{k+1}}<2.$$

Väite on tosi.

4. Huomataan, että $2010=30\cdot 67$. Tehtävän yhtälöstä nähdään, että $P(67)=0$ ja jos $P(k\cdot 67)=0$, $k<30$, niin $(k\cdot 67-2010)P((k+1)\cdot 67)=k\cdot 67P(k\cdot 67)=0$ eli $P((k+1)\cdot 67)=0$. Siis $P(x)=(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67)Q(x)$, missä Q on jokin polynomi. Sijoitetaan saatu P:n lauseke tehtävän yhtälöön. Kaikilla kokonaisluvuilla x on

$$(x-2010)x(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-29\cdot 67)Q(x+67)=x(x-67)\cdots(x-30\cdot 67)Q(x).$$

Siis $Q(x+67)=Q(x)$ kaikilla x, joten aina, kun x ei ole muotoa $k\cdot 67$, $0\le k\le 30$, on $Q(x+67)=Q(x)$. Ainoat polynomit, joilla on tämä ominaisuus, ovat vakiopoplynomit $Q(x)=C$. Polynomi P on siis aina muotoa

$$P(x)=C(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67).$$

Kaikki nämä polynomit myös toteuttavat tehtävän ehdon.

5. Kun funktionaaliyhtälöön sijoitetaan $x = 0$, siitä tulee $2f(0) = f(0)f(y) + yf(0)$. Jos $f(0) \neq 0$, $f(y) = 2 - y$ kaikilla y. Tämä funktio toteuttaa tehtävän ehdon. Olkoon sitten $f(0) = 0$. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $y = 0$, saadaan

$$f(x^2) = xf(x). \tag{1}$$

Kun tehtävän yhtälössä vaihdetaan x ja y, ja näin saadusta yhtälöstä vahennetään puolittain alkuperäinen yhtälö, saadaan

$$f(y^2) - f(x^2) = xf(y) - yf(x) + (y - x)f(x + y),$$

ja kun tässä otetaan huomioon (1), tullaan yhtälöön

$$(y - x)(f(x) + f(y)) = (y - x)f(x + y).$$

Siis kun $y \neq x$, niin $f(x) + f(y) = f(x + y)$. Mutta jos $a \neq x$, $a \neq \frac{x}{2}$, niin $f(2x) = f((x + a) + (x - a)) = f(x + a) + f(x - a) = f(x) + f(a) + f(x - a) = f(x) + f(x)$, joten

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{2}$$

kaikilla x, y. Kun alkuperäiseen yhtälöön sijoitetaan $x = y$ ja otetaan huomioon (1) ja (2), tullaan yhtälöön $xf(x) = -f(x)^2$. Siis kun $x \in \mathbb{R}$, niin joko $f(x) = 0$ tai $f(x) = -x$. Mielivaltaiselle lukuparille x, y on siis $f(x) + f(y) = f(x + y) = 0$ tai $= -(x + y)$. Jos $f(x) = 0$ on oltava $f(y) = 0$. Jos $f(x) = -x$, on oltava $f(y) = -y$. Siis $f(x) = 0$ kaikilla x tai $f(x) = -x$ kaikilla x. Molemmat funktiot toteuttavat tehtävän yhtälön.

6. Sijoitetaan ruudukko koordinaatistoon, niin että ruudut ovat yksikköneliöitä, joiden keskipisteet ovat $(i,\, j)$, $1 \leq i,\, j \leq n$. Nimetään ruudut keskipisteidensä koordinaattien mukaan. Valitaan koordinaatisto niin, että päälävistäjän ruudut ovat $(i,\, i)$. $1 \leq i \leq n$. (Eli vaihdetaan "pääviistoriviksi" rivi alavasemmalta yläoikealle.) Silloin kullakin suoraparilla $j = i \pm k$, $k = 1,\, 2,\, dots,\, n$, olevilla ruuduilla on sama väri. Torni liikkuu pitkin vaaka- ja pystysuoria ruuturivejä. Koska tornite eivät uhkaa toisiaan, kaikilla on eri i-koordinaatti. Jos tornit ovat ruuduissa $(k,\, f(k))$, $1 \leq k \leq n$, niin kaikki luvut $(f(k) - k)^2$ ovat eri lukuja; toisaalta luvut ovat lukuja 0^2, 1^2, $\ldots$, $(n - 1)^2$. Siis

$$\sum_{k=1}^{n}(f(k) - k)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6}. \tag{1}$$

Koska kaikki luvut $f(k)$ ovat eri lukuja,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}. \tag{2}$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) vähennetään toisistaan ja sievennetään, saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} kf(k) = \frac{n(2n^2 + 9n + 1)}{12}.$$

On helppo tarkistaa, että saatu luku on kokonaisluku aina ja vain, kun n on jaollinen 4:llä tai $n \equiv 1 \bmod 4$.

7. Olkoon pääkaupunki P ja muut kaupungit $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Olkoon $h(X, Y) = h(Y, X)$ kaupunkien X ja Y välisen lennon hinta ja olkoon k kaikissa kaupungeissa kerran käyvän kiertomatkan hinta. tarkastellaan jotakin sellaista kiertomatkaa, jossa käydään kaikissa kaupungeissa K_i tasan kerran, mutta ei käydä pääkaupungissa. Olkoon k' tämän kierron hinta. Jos K_i ja K_j ovat kaksi peräkkäistä kaupunkia tällaisessa kieromatkassa, niin täydentämällä kierros lennoilla $K_i \to P \to K_j$ saadaan eräs kaikki kaupungit käsittävä kierto. Siis $k = k' - h(K_i, K_j) + h(K_i, P) + h(P, K_j)$. Väitteen todistamiseksi riittää, kun osoitetaan, että suure $f(i, j) = -h(K_i, K_j) + h(K_i, P) + h(P, K_j)$ on sama kaikille pareille $i, j, i \neq j$. Osoitetaan ensin, että jos i, j, k ovat kolme eri indeksiä, niin $f(i, j) = f(i, k)$. Tämä on totta, jos $h(K_i, P) + h(K_j, P) - h(K_i, K_j) = h(K_i, P) + h(K_k, P) - h(K_i, K_k)$ eli $h(K_i, P) + h(K_j, P) + h(K_i, K_k) = h(K_i, P) + h(K_k, P) + h(K_i, K_j)$. Mutta viimeisen yhtälön totuus perustuu siihen, että matka K_j:stä K_k:hon kaikkien muiden kaupunkien kuin P:n ja K_i:n kautta voidaan täydentää kaikkien kaupunkien kautta kulkevaksi kiertomatkaksi joko lennoin $K_j \to P \to K_i \to K_k$ tai lennoin $K_j \to K_i \to P \to K_k$. Mutta jos i, j, k, l ovat neljä eri indeksiä, on edellisen mukaan $f(i, j) = f(i, k) = f(l, k)$.

8. Merkitään joukon A alkioiden lukumäärää $|A|$:lla. Olkoon S tehtävän 30 hengen joukko. S:llä on epätyhjiä osajoukkoja, joiden jäsenet ovat kaikki saaneet hattunsa muilta kuin joukon jäseneltä (esimerkiksi kaikki yksialkioiset osajoukot ovat tällaisia). Olkoon T jokin tällainen osajoukko niin, että $|T|$ on maksimaalinen. Osoitetaan, että $|T| \geq 10$. Olkoon $U = \{x \in S | x \text{ sai hatun joltain } T\text{:n jäseneltä}\}$. Silloin $|U| \leq |T|$. Jos $S = T \cup U$, niin $|T| \geq 15$. Voidaan olettaa, että $T \cup U \neq S$. Olkoon $y \in S \setminus (T \cup U)$. Koska $y \notin U$, y ei saanut hattua keneltäkään T:n jäseneltä. Joukon $T \cup \{y\}$ jäsenet ovat kaikki saaneet hattunsa joukon T ulkopuolelta. Mutta koska $|T \cup \{y\}| > |T|$, joku tämän joukon jäsen on saanut hattunsa samasta joukosta. Siis y on lähettänyt hattunsa jollekin joukon T jäsenelle. Koska $y \in S \setminus (T \cup U)$ on mielivaltainen, joukolla $S \setminus (T \cup U)$ on se ominaisuus, että kukaan sen jäsen ei ole saanut hattuaan joukosta $T \setminus (T \cup U)$. Tämä merkitsee sitä, että $|T \setminus (T \cup U)| \leq |T|$. Siis $|T| \geq |S| - |T| - |U| \geq |S| - 2|T| = 30 - 2|T|$, mistä seuraa $|T| \geq 10$.

9. Jos A aloittaa siirrot, niin hänen vastapelaajallaan B:llä on voittostrategia. Olkoon r kulloinkin jäljellä olevien poikkeussiirtojen lukumäärä. B pyrkii siihen, että aina kun on A:n siirtovuoro, kasassa on $6n + r$ tikkua, jos $n > r$ tai $7n$ tikkua, jos $n \leq r$ (Jos $n = r$, niin $7n = 6n + r$. Alussa tikkujen määrä toteuttaa tämän ehdon, koska $1000 = 6 \cdot 165 + 10$. Tarkastellaan kahta peräkkäistä siirtoa. Oletetaan ensin, että $n > r$. Jos A ottaa k tikkua, $1 \leq k \leq 5$, niin B ottaa $6 - k$ tikkua. Kasassa on nyt $6(n-1) + r$ tikkua. Jos A ottaa 6 tikkua, B ottaa yhden tikun. Kasassa on nyt $6(n-1) + (r-1)$ tikkua, mutta koska r on pienentynyt yhdellä, lukumäärä on edelleen B:n toivomaa tyyppiä. Olkoon sitten $n \leq r$. Jos A ottaa k tikkua, $1 \leq k \leq 6$, niin B voi ottaa $7 - k$ tikkua. Kasassa on nyt $7(n-1)$ tikkua. Esitetyssä struktuurissa B voi aina siirtää A:n jälkeen, joten A ei voi saada viimeistä tikkua.

10. Olkoon n-kulmion osakolmioiden värityksien pienin mustien kolmioiden määrä $f(n)$. Osoitetaan, että pienin mahdollinen mustien kolmioiden määrä on $f(n) = \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor$. Koska

$f(3) = 0$ ja $f(4) = f(5) = f(6) = 1$ (kuusikulmiossa $ABCDEF$ voidaan kolmio ACE värittää mustaksi ja kolmiot ABC, CDE ja EFA valkeiksi), väite pätee, kun $3 \le n \le 6$. Osoitetaan induktiolla, että $f(n) \le \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor$ kaikilla n. Tämä on jo todettu oikeaksi, kun $3 \le n \le 6$. Olkoon $n > 6$. Induktio-oletuksena voidaan pitää, että väite pätee, $(n-3)$-kulmiolle. n-kulmio voidaan jakaa lävistäjällä $(n-3)$-kulmioksi ja viisikulmioksi. $(n-3)$-kulmio voidaan jakaa kolmioiksi ja värittää niin, että mustia kolmioita on enintään $\left\lfloor \frac{n-6}{3} \right\rfloor$. Riippumatta siitä, minkä värinen kolmio liittyy 5-kulmion ja $(n-3)$-kulmion yhteiseen sivuun, 5-kulmio voidaan jakaa ja värittää niin, että mustia kolmioita on vain yksi ja yhteisen lävistäjän eri puolilla on eriväriset kolmiot. n-kulmio tulee jaetuksi niin, että mustia kolmioita on enintään $\left\lfloor \frac{n-6}{3} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n-6}{3} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor$.

Osoitetaan sitten induktiolla, että

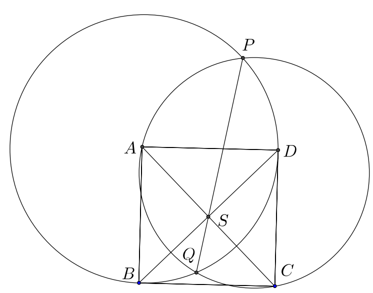
$$f(n) \ge \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor \tag{1}$$

kaikilla n. Tiedämme jo, että näin on, kun $n = 3$, 4, 5. Otetaan (1) induktio-oletukseksi ja tarkastellaan $(n+3)$-kulmiota. Väritetään siinä $f(n+3)$ kolmiota mustaksi ja tarkastellaan näistä kolmiosta yhtä. Se erottaa monikulmiosta enintään kolme monikulmiota; olkoot nämä $(a+1)$-kulmio, $(b+1)$-kulmio ja $(c+1)$-kulmio. Silloin $a + b + c = n + 3$. Olkoon r_m jakojäännös, kun m jaetaan kolmella. Nyt

$$\begin{aligned} f(n+3) \ge f(a+1) + f(b+1) + f(c+1) + 1 &\ge \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor + 1 \\ = \frac{a - r_a}{3} + \frac{b - b_3}{3} + \frac{c - c_r}{3} + 1 &= \frac{n + 3 - 1 - r_n}{3} + \frac{4 + r_n - (r_a + r_b + r_c)}{3} \\ &= \left\lfloor \frac{n+3-1}{3} \right\rfloor + \frac{4 + r_n - (r_a + r_b + r_c)}{3}. \end{aligned}$$

Koska $0 \le r_n$, r_a, r_b, r_c, niin $4 + r_n - (r_a + r_b + r_c) \ge 4 - 0 - 6 = -2$. Mutta koska luku on kolmella jaollinen, se onkin ≥ 0. Induktio on valmis.

11. Kahden ympyrän radikaaliakseli on niiden pisteiden joukko, joilla on sama potenssi molempien ympyröiden suhteen. Jos ympyrät leikkaavat, radikaaliakseli on leikkauspisteiden kautta kulkeva suora. Tehtävän pisteellä S on selvästi sama potenssi molempien tehtävän ympyröiden k ja k' suhteen (neliön lävistäjien puolikkaiden tulo). S on siis ympyröiden radikaaliakselilla eli suoralla PQ.

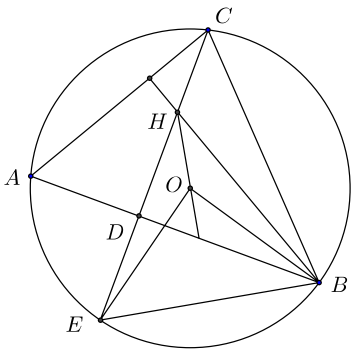


12. Ensimmäisen väitteen todistamiseksi tehdään vastaoletus, jonka mukaan puolisuunnikkaan sivujen pituudet muodostavat aritmeettisen jonon, jonka erotus on $d > 0$. Olkoot

AB ja CD puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut. Voidaan olettaa, että $AB > CD$. Olkoon E sellainen AB:n piste, että $AE = DC$. Silloin $AECD$ on suunnikas, ja $EC = AD$. Kolmiossa EBC on nyt sivu $EB = 2d$, ja sivujen EC ja CB pituudet ovat aritmeettisen jonon ei-peräkkäisiä termejä. Siis $|EC| - BC| = 2d = |EB|$. Tämä on ristiidassa kolmioepäyhtälön kanssa, joten vastaoletus on väärä.

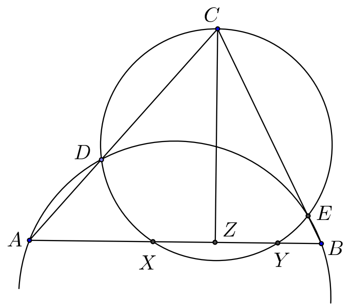
Jälkimmäisen väitteen todistamiseksi riittää, että piirretään kolmio, jonka sivut ovat 3, 3, ja 2, ja liitetään 2-pituiseen sivuun suunnikas, jonka lyhempi sivu on 1 ja jonka lyhempi sivu asettuu toisen 3-pituisen kolmion sivun jatkeelle. Syntyy puolisuunnikas, jonka sivujen pituudet ovat järjestyksessä 1, 2, 4 ja 3.

13. Oletetaan, että ABC:n ympärysympyrän keskipiste O on kulman $\angle DHB$ puolittajalla. Osoitetaan, että tällöin välttämättä $\angle CAB = 60°$. Leikatkoon puolisuora CD ABC:n ympärysympyrän myös pisteessä E. Kolmioissa HOE ja HOB on yhteinen jana HO, $OE = OB$ ja $\angle OHE = \angle OHB$. Koska O ja H ovat ympyrän halkaisijan ja E ja D sen kehän pisteitä, $\angle HEO$ ja $\angle HBO$ ovat teräviä. Kolmiot HOE ja HOB ovat siis yhteneviä (ssk). Siis $HE = HB$. Kehäkulmina kulmat $\angle ABE$ ja $\angle ACE$ ovat yhtä suuret. Koska $BH \perp AC$ ja $BA \perp CD$, niin $\angle DBH = \angle ACE$. BD on kolmiossa BHE sekä korkeusjana että kulmanpuolittaja, joten kolmio on tasakylkinen. Siis $HB = EB$. Kolmio BHE onkin siis tasasivuinen, joten $\angle HEB = 60°$. Mutta kehäkulmalauseen perusteella myös $\angle CAB = 60°$



14. Olkoon Z janan XY keskipiste ja C' pisteestä C sivulle AB piirretyn korkeusjanan kantapiste. Suorakulmaisista kolmioista $AC'C$ ja $CC'B$ saadaan Pythagoraan lauseen perusteella heti

$$AC^2 - AC'^2 = CC'^2 = BC^2 - BC'^2. \qquad (1)$$



Kun lasketaan A:n ja B:n potenssit ympyrän CDE suhteen saadaan $AX \cdot AY = AD \cdot AC$ eli $(AZ - ZX) \cdot (AZ + ZY) = AC \cdot (AC - CD)$ eli

$$AZ^2 - ZX^2 = AC^2 - AC \cdot CD. \qquad (2)$$

Vastaavasti johdetaan

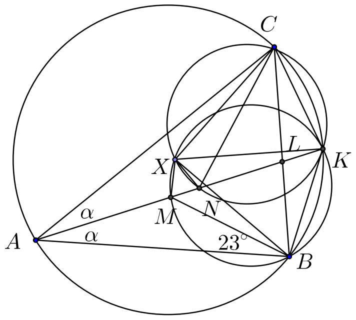
$$BZ^2 - ZX^2 = BC^2 - BC \cdot CE. \qquad (3)$$

Mutta kun lasketaan pisteen C potenssi ympyrän $ADEB$ suhteen, saadaan $AC \cdot CD = BC \cdot CE$. Yhtälöistä (2) ja (3) seuraa nyt

$$AC^2 - AZ^2 = BC^2 - BZ^2.$$

Tästä ja yhtälöstä (1) seuraa, että $Z = C'$.

15. Osoitetaan kolmio XMN tasakylkiseksi laskemalla sen kantakulmat. Olkoon $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$. Kolmiosta ABM nähdään, että $\alpha + 23^\circ = \angle LMB$. Leikatkoon suora AL kolmion ABC ympärysympyrän myös pisteessä K. Koska $\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{KC}$, piste K on janan BC keskinormaalilla samoin kuin piste X. Siis XK puolittaa kulman $\angle BXC$, joten $\angle BXC = \angle BML = \angle BMK$. Tästä seuraa, että $MBKX$ on jännenelikulmio, ja $\angle XMN = \angle XMK = \angle XBK = \angle XBC + \angle CBK = 90^\circ - \angle KXB + \angle CAK = 90^\circ - \angle KMB + \alpha = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$. Toisaalta myös (kolmio ANC) $\angle CNK = \alpha + 23^\circ = \angle KMB = \angle KXB = \angle KXC$. Siis myös $XNKC$ on jännenelikulmio. Siis $\angle XNM = \angle XCK = \angle XCB + \angle BCK = 90^\circ - \angle CXK + \alpha = 90^\circ - \angle CNK + \alpha = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$. Kolmio XMN on siis tasakylkinen ja sen huippukulma on $\angle MXN = 180^\circ - 2 \cdot 67^\circ = 46^\circ$.



16. Käytetään hyväksi tietoa $s(k) \equiv k \bmod 9$. Jos $d(k) = 3$, luvun k on oltava alkuluvun p neliö. Olisi oltava $p^2 \equiv s(p^2) \equiv 3 \bmod 9$. Mutta neliöjäännökset modulo 9 ovat 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1, 0, joten 3 eli viihdyttävä. Jos $d(k) = 5$, on oltava $k = p^4$ (jos k on kahden eri alkuluvun tulo tai alkuluvun kolmas potenssi, $d(k) = 4$, jos k on ainakin kolmen alkuluvun tulo, $d(k) \geq 8$). Mutta edellä esitetistä neliönjäännöksistä nähdään, p^4 ei ole 5 mod 9 ei ole mahdollinen. 5 ei ole viihdyttävä. Jos $d(k) = 7$, on oltava $k = p^6$. Jotta olisi $p^6 \equiv 7 \bmod 9$, on oltava $p^3 \equiv 4$ tai $p^3 \equiv 5 \bmod 9$. Mutta kuutiojäännökset mod 9 ovat 1, 8, 0, 1, 8, 0, 1, 8, 0. Luku 7 ei ole viihdyttävä. Mutta 9 on viihdyttävä: $s(36) = 9$ ja luvulla 36 on yhdekssän tekijää 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 ja 36.

17. On selvää, että tehtävän ehdon toteuttava n ei voi olla parillinen. Jos n on jaollinen 5:llä, niin $n^2 = (10k + 5) = 100k^2 + 2 \cdot 50k + 25$, joten n^2:n toiseksi viimeinen numero on 2. Muut parittomat luvut ovat muotoa $n = 10k \pm t$, missä $t = 1$ tai $t = 3$. Näille $n^2 = 100k^2 \pm 20tk + t^2 = 10 \cdot 2k(5k \pm t) + t^2$. Luvun viimeinen numero on $t^2 = 1$ tai 9, ja toiseksi viimeinen numero on parillinen, ellei ole $2k(5k \pm t) = 0$ eli $k = 0$, jolloin $n^2 = t^2$. Tehtävän ehdon toteuttavat luvut ovat siis vain 1 ja 3.

18. Jos $p = 2$, jonossa on vain yksi termi, ja väite on tosi. Olkoon sitten alkuluku $p = 2m + 1$. Koska $(p - k)k^{-1} \equiv -kk^{-1} = -1$, niin $(p - k)^{-1} = -k^{-1}$. Siis

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} = \sum_{k=1}^{m} k^{-1} + \sum_{k=1}^{m} (m + k)^{-1} = \sum_{k=1}^{m} k^{-1} + \sum_{k=1}^{m} (p - k)^{-1} = 0.$$

Olkoon nyt $m < n < p - 1$. Nyt

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1} = \sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} = -\sum_{k=n+1}^{p-1} k^{-1} = -\sum_{k=1}^{p-n-1} (p - k)^{-1} = \sum_{k=1}^{p-n-} k^{-1}.$$

Tehtävän jonon jäsenet järjestyluvuin $m+1$, $m+2$, $\dots, p-2$ esiintyvät siis jo m:n ensimmäisen luvun joukossa. Jonon viimeinen jäsen ei välttämättä ole tässä joukossa. Jonossa on siis korkeintaan $m+1 = \dfrac{p+1}{2}$ eri jäsentä.

19. Ensimmäiset alkuluvut ja ainoat, joiden neliöt ovat < 2010, ovat 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Näiden lukujen neliöt ovat 4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961, 1369, 1681 ja 1849. Kaikki parittomat luvut ov $\equiv 1 \bmod 8$. Koska $2010 \equiv 2 \bmod 8$, parittomien alkulukujen summa voi olla 2010 vain, jos lukuja on 2 tai 10. Kymmenen pienimän alkuluvun neliöiden summa on suurempi kuin $961 + 841 + 529 = 2331$. Kolmella jaottomien alkulukujen neliöt ovat $\equiv 1 \bmod 3$. Koska $3|2010$, 2010 voi olla kahden alkuluvun neliön summa vain, jos molemmat ovat jaollisia 3:lla. Tämä ei ole mahdollista. (Myös edellisestä neliöluettelosta voi helposti tarkistaa, että kahden alkuluvun neliön summa ei voi olla 2010.) Jos neliösummassa on mukana $2^2 = 4$, siinä olevien parittomien alkulukujen summa on $2006 \equiv 6 \bmod 8$. Parittomia neliöitä voi siis olla 6. Kokeilemalla ja muutamia yksinkertaistavia tarkasteluja tekemällä voi todeta, että 2010 on jopa neljällä eri tavalla sitsemän alkuluvun neliön summa: $2010 = 4+9+49+169+289+529+961 = 4+9+49+121+169+289+1369 = 4+9+25+121+361+529+961 = 4+9+25+49+121+841+961$.

20. Jos $n = 1$, vaadittua joukkoa ei selvästikään ole. Osoitetaan, että sellainen on kaikilla $n > 1$. Määritellään jono (x_k) asettamalla $x_0 = n$ ja $x_{k+1} = (x_0 + x_1 + \cdots + x_k)! + 1$, kun $k = 0, 1, \dots$. Väitetään, että joukko $A = \{x_k | k \geq 1\}$ toteuttaa tehtävän ehdon. Ellei näin olisi, olisi olemassa n indeksiä $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ niin, että luvuilla $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_n}$ ja $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ olisi yhteinen alkutekijä p. Jollain j, $1 \leq j \leq n$ olisi silloin $p|x_{i_j}$. Jonon (x_k) määritelmästä seuraa, että $x_k \equiv 1 \bmod p$ kaikilla $k > i_j$. Tästä seuraa, että p on tekijänä luvussa $S = x_{i_1} + \cdots + x_{i_{j-1}} + n - j > 0$. Koska $x_0 = n$, $S \leq x_0 + x_1 + \cdots + x_{i_j - 1}$. Siis $p|(x_0 + x_1 + \cdots + x_{i_j - 1})!$ eli $p|(x_{i_j} - 1)$. Ristiriita!