Baltian Tie 2009. Ratkaisuja

1. Jos p:n nollakohdat ovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$, niin

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Luvut $1 - x_i$ ovat ei-negatiivisia ja luvut $2 - x_i$ positiivisia. Jos jokin luvuista $x_i = 1$, niin $p(1) = 0$. Oletetaan, että $x_i < 1$ kaikilla i. Siis

$$p(1) = \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \geq 0.$$

Nyt

$$\frac{p(1)}{3^n} = \frac{p(1)}{p(2)} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1 - x_i}{2 - x_i}\right)$$

ja aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kaksi kertaa soveltaen saadaan

$$\frac{\sqrt[n]{p(1)}}{3} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1 - x_i}{2 - x_i}\right)} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1 - x_i}{2 - x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2 - x_i}\right) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2 - x_i}$$

$$\leq 1 - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2 - x_i}} = 1 - \sqrt[n]{p(2)^{-1}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Siis $p(1) \leq 2^n$. Jos $p(x) = (x + 1)^n$, $p(1) = 2^n$.

On vielä osoitettava, että kaikki arvot väliltä $[0,\, 2^n]$ voivat olla $p(1)$:n arvoja. Arvoon 0 päästään esimerkiksi, kun $p(x) = (x - 1)(x - a)^{n-1}$, missä a määräytyy yhtälöstä $2 - a = 3^{\frac{n}{n-1}}$. Silloin $a = 2 - 3^{\frac{n}{n-1}} < 2 - 3 = -1$. Jos $p(x) = (x - b)(x - a)^{n-1}$, niin ehto $p(2) = 3^n$ määrittää a:n ja b:n välille jatkuvan yhteyden; $a = a(b)$. Kun b kasvaa -1:stä $+1$:een, niin $p(1) = (1 - b)(1 - a(b))^{n+1}$ on jatkuva b:n funktio ja saa siis kaikki arvot väliltä $[0,\, 2^n]$.

2. Sekä tehtävän oletusepäyhtälö että väitetty epäyhtälö pätevät yhtälöinä, jos $a_1 = a_2 = \ldots = a_{100} = 99$. Voidaan olettaa, että $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{100}$. Oletetaan nyt, että $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} > 9900$. Silloin $a_{100} > 99$ ja $a_1 < 99$. Olkoon oletusepäyhtälön vasen puoli S ja olkoon S' luku, joka saadaan, kun a_1 korvataan $a_1 + 1$:llä ja a_{100} $a_{100} - 1$:llä. Nyt

$$S - S'$$

$$= (a_1 - 20 - (a_1 + 1))(a_1(a_1 - 1)\cdots(a_1 - 19) + (a_{100} - (a_{100} - 21))(a_{100} - 1)(a_{100} - 2)\cdots(a_{100} - 20)$$

$$= 21((a_{100}(a_{100} - 1)\cdots(a_{100} - 20) - (a_1(a_1 - 1)\cdots(a_1 - 19)) > 0.$$

Siis $S' < S$. Luvut $a_1 + 1, a_2, \ldots, a_{99}, a_{100} - 1$ toteuttavat tehtävän ehdon ja niiden summa on sama kuin lukujen $a_1, \ldots, a_{100}$ summa. Prosessi voidaa siis toistaa. Tullaan ristiriitaan, koska prosessia ei selvästikään voi toistaa äärettömän monta kertaa.

3. Koska $(x+1)^2-x^2-(x-1)^2+(x-2)^2 = 2x+1-(-2x+1+4x-4) = 4$, voidaan luvut n^2, $(n-1)^2$, $\ldots$ ryhmittää suurimmasta alkaen kahdeksan ryhmiin ja varustaa kertoimin 1 ja -1 niin, että ryhmissä olevien lukujen summa 0. Jos $8|n$, väite on siis tosi. Ellei näin ole, on vielä osoitettava, että pienimmät enintään seitsemän neliötä voidaan varsustaa kertoimin $+1$ ja -1 niin että ehto toteutuu, Jos jäljelle jääneitä lukuja on enemmän kuin 4, varustetaan neljä suurinta kertoimin niin, että summa on 4. Jos jäljelle jää ainakin neljä lukua, ne voidaan varustaa kertoimin niin, että summa on 4. Nyt $4-3^2+2^2+1=0$, $4-2^2-1^2=1$, $4-1^2=3$, joten kertoimet voidaan valita halutulla tavalla. Jos taas jäljellä on enintään kolmen luvun neliöt, niin yhtälöt $3^2-2^2-1^2=4$, $2^2-1^2=1$ ja $1^2=1$ osoittavat, että nämä luvut voidaan varustaa kerpoimin ±1 halutulla tavalla. Kertoimet c_k on siis aina mahdollista valita tehtävässä esiteyllä tavalla.

4. Koska $(x_1+\cdots+x_{n-1})x_n \le (|x_1|+\cdots+|x_{n-1}|)|x_n|$, tehtävän epäyhtälö toteutuu kaikilla x_i, jos se toteutuu kaikilla ei-negatiivisilla x_i. Epäyhtälö toteutuu varmasti, jos $x_n = 0$. Oletetaan siis, että $x_n > 0$. Tehtävän epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\left(\frac{x_1}{x_n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^2+1 \ge \frac{x_1}{x_n}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}$$

kanssa. Voidaan siis tutkia epäyhtälöä $x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+1 \ge x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}$. Tämä epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i-\frac{1}{2}\right)^2+1-(n-1)\frac{1}{4} \ge 0 \tag{1}$$

kanssa. Kun $2 \le n \le 5$, epäyhtälö on tosi kaikilla reaaliluvuilla x_i. Kun $n \ge 6$, epäyhtälön (1) vsen puoli on pienempi kuin

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

ja vasen puoli on negatiivinen, jos esimerkiksi $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}$. Tehtävässä kysytyt n:n arvot ovat siis 2, 3, 4 ja 5.

5. Yhtälön $x^2 = f_1x+f_0 = x+1$ juuret ovat $\dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$. Olkoon t jompikumpi näistä. Osoitetaan induktiolla, että t toteuttaa jokaisen yhtälön $x^n = f_{n-1}x+f_{n-2}$, $n \ge 2$. Näin on, kun $n = 2$. Oletetaan, että $t^k = f_{k-1}t+f_{k-2}$ jollain $k \ge 2$. Silloin $t^{k+1} = t(t^k) = f_{k-1}t^2+f_{k-2}t = f_{k-1}(t+1)+f_{k-2}t = (f_{k-1}+f_{k-2})t+f_{k-1} = f_kt+f_{k-1}$. Koska 2010 on parillinen, käyrän $y = x^{2010}$ muoto on "ylospäin aukeavan paraabelin". Suora voi leikata tällaisen käyrän enintään kahdessa pisteessä. Tehtävän yhtälöllä on siis tasan kaksi reaalilukuratkaisua, ja ne ovat $\dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$.

6. Olkoot yhtälön $x^3 - ax^2 - b = 0$ ratkaisut t_1, t_2 ja t_3. Jos jokin näistä on 0, $b = 0$ ja väite on ilmeinen. Oletetaan, että $b \neq 0$. Vietan kaavojen perusteella $b = t_1t_2t_3$. Tarkastellaan b:n alkulukuhajotelmaa. Väitteen todistamiseksi riittää, kun osoitetaan, että ne alkuluvut p, joiden eksponentti p:n alkulukuhajotelmassa on pariton, ovat a:n tekijöitä. Olkoon p eräs tällainen luku, ja olkoon p:n eksponentti b:n alkulukuhajotelmassa pariton luku α. Olkoot p:n eksponentit t_1:n, t_2:n ja t_3:n alkulukuhajotelmissa $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ ja $\alpha_3 \geq 0$. Silloin $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$. Voidaan olettaa, että $\alpha_1 = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Silloin $3\alpha_1 \geq \alpha$. Koska $t_1^3 = at_1^2 + t_1t_2t_3$, on $t_1^2 = at_1 + t_2t_3$. t_1 ja siis erityisesti p^{α_1} on siis luvun t_2t_3 tekijä, joten $\alpha_1 \leq \alpha_2 + \alpha_2$. Siis $2\alpha_1 \leq \alpha$ ja koska α on pariton, $2\alpha_1 < \alpha$. Tarkastellan nyt yhtälöä $t_1^3 = at_1^2 + b$. p:n eksponentti t_1^3:n alkulukuhajotelmassa on $3\alpha_1 \geq \alpha$, t_1^2:n alkulukuhajotelmassa $2\alpha_1 < \alpha$ ja b:n alkulukuhajotelmassa α. Koska p:n eksponentin luvun at_1^2 alkulukuhajotelmassa on myös oltava α, p:n on oltava a:n tekijä.

7. Tehtävän oletuksista seuraa, että p on luvun $a^4 + b^4 + (-(a+b))^4 = 2a^2 + 2b^2 + 4a^3b + 6a^ab^2 + 4ab^3 = 2(a^4 + b^4 + (ab)^2 + 2a^3b + 2ab^3 + 2a^2b^2) = 2(a^2 + b^2 + ab)^2$ tekijä. Koska p on pariton, se on luvun $a^2 + ab + b^2$ ja siis myös luvun $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ tekijä. Olkoon $p = 6n - 1$. Fermat'n pientä lausetta soveltaen saadaan $a \equiv a^p =\equiv a^pa^{p-1} = a^{3(4n-1)} \equiv b^{3(4n-1)} \equiv b^pb^{p-1} \equiv b^p \equiv b \bmod p$. Samoin saadaan $a \equiv c \bmod p$. Mutta siis $3a \equiv a + b + c \equiv 0 \bmod p$. Koska $p \neq 3$, $a \equiv 0 \bmod p$. Samoin tietysti b ja c:kin ovat p:llä jaollisia.

8. Jos jokin joukon luvuista olisi jaollinen alkuluvulla p, joka on > 9, niin p voisi olla tekijänä vain yhdessä joukon luvuista. Joukon lukujen alkutekijöinä voi siis esiintyä vain lukuja 2, 3, 5 tai 7. Minkään luvun tekijä ei voi olla 5^2 eikä 7^2, koska joukkoon ei voi kuulua kuin yksi luku, joka on jaollinen näillä luvuilla. Jos joukkoon kuuluu luku, joka on jaollinen 3^3:lla, siinä on tasan kaksi muuta kolmella jaollista lukua, ja kumpikaan näistä ei ole jaolllinen 3^2:lla. Joukossa on siis yksi 3^2:lla jaollinen ja kaksi kolmella jaollista lukua. Joukossa voi olla viisi parillista lukua. Jos siinä on kaksi 2^3:lla jaollista, ne ovat ensimmäinen ja viimeinen; muista parillisista yksi on jaollinen 2^2:lla, mutta muut kaksio vai 2^1:llä. Jos joukossa on 2^5:llä jaollinen luku, muista parillisista enintään kaksi on 2^2:lla jaollisia. Joukossa eo voi olla 2^6:lla jaollista lukua. Kaikkiaan lukujen tulo voi olla jaollinen 2^{11}:llä. Kun edelliset tarkastelut kootaan yhteen, nähdään, että joukon lukujen tulo voi olla enintään $2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 < 2{,}5 \cdot 10^7$. Mutta on ilmeistä, että ehdon täyttävän joukon pienin luku on suurempi kuin 10, ja joukon lukujen tulo siis ainakin 10^9. – Tehtävässä kysyttyjä kokonaislukuja ei ole olemassa.

9. Jos n on parillinen, $2^{n+1} - n^2$ on jaollinen kahdella. Jos n on pariton, $n = 2k - 1$, $k > 0$, niin $2^{n+1} - n^2 = 2^{2k} - (2k-1)^2 = (2^k - 2k + 1)(2^k + 2k - 1)$. Kun $k = 1$ tai $k = 2$, ensimmäinen tekijä on 1 ja jälkimmäinen tekijä 3 tai 7. Tällöin $2^{n+1} - n^2$ on alkuluku. Kun $k > 2$, niin $2^k - 2k + 1 = 2(2^{k-1} - k) + 1$. Alaspäin kupera käyrä $y = 2^{x-1}$ ja suora $y = x$ eivät voi leikata kuin kahdessa pisteessä. Siis $2^{k-1} \neq k$, kun $k \neq 1, 2$, ja luvulla $2^{n+1} - n^2$ on ainakin kaksi tekijää, jotka ovat > 1.

10. Osoitetaan, että aina, kun M on parittoman kokonaisluvun neliö, niin tehtävässä tarjottu esitys on mahdoton. Olkoon siis $M = k^2$ ja k pariton kokonaisluku. Oletetaan, että jollain n on

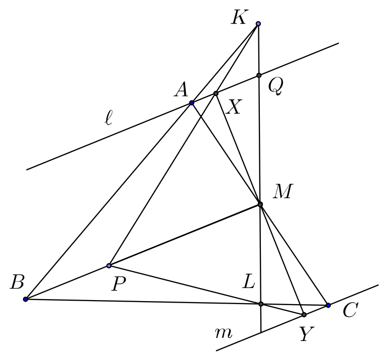
$$k^2 = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2.$$

Silloin

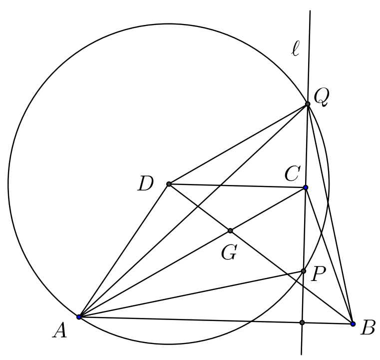
$$\sqrt{n} = \frac{kd(n)}{2}$$

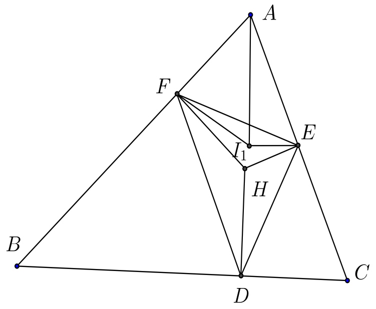
, ja koska $\sqrt{n}$ on rationaaliluku, on oltava $n = m^2$ jollain kokonaisluvulla. Mutta neliöluvulla m^2 $d(m^2)$ on pariton (jokaista m^2:n tekijää q, joka on $< m$, vastaa yksikäsitteinen tekijä $\frac{m^2}{q} > m$, paitsi tekijää m). Näin ollen parillinen luku $2m$ olisi parittomien lukujen k ja $d(m^2)$ tulo. Ristiriita osoittaa väitteen oikeaksi.

11. Piirretään myös C:n kautta BP:n suuntainen suora m. Leikatkoon PK ℓ:n pisteessä X ja PL m:n pisteessä Y. Leikatkoon vielä KL ℓ:n pisteessä Q. Peilataan kuvio suorassa BM. Silloin A kuvautuu pisteeseen C, suora PK suoraksi PL ja leikkauspiste X leikkauspisteeksi Y. Peilaus säilyttää kulmat, joten $\angle MXQ = \angle MYC$. Mutta $MX = MY$, $MA = MC$ ja $AX = CY$. Kolmkiot AMX ja CMY ovat yhteneviä (sss). Siis $\angle AXM = \angle MYC = \angle MXQ$. Kulman $\angle MXA$ on vieruskulmansa suuruinen, joten se on suora kulma. Pisteestä M suoralle ℓ piirretty normaali kulkee siis pisteen X kautta, ja väite on todistettu.



12. Olkoon G nelikulmion $ABCD$ lävistäjien leikkauspiste. Kolmiot ABG ja CDG ovat ydenmuotoisia ja yhdenmuotoisuussuhde on $2:1$. Tarkastellaan kolmiota APQ. Koska $QP \perp DC$ ja $DQ = DP$, niin C on PQ:n keskipiste ja AC kolmion APQ keskijana. Koska G jakaa AC:n suhteessa $2:1$, G on kolmion APQ keskijanojen leikkauspiste. Konstruktion mukaan D on kolmion APQ ympärysympyrän keskipiste. Suora DG on siis kolmion APQ Eulerin suora. Eulerin suoralla on myös kolmion ortokeskus, ja keskijanojen leikkauspiste jakaa ortokeskuksen ja ympärysympyrän keskipisteen välisen janan suhteessa $2:1$. Mutta B on Eulerin suoralla ja G jakaa janan BD suhteessa $2:1$. B on siis kolmion APB ortokeskus. QB on kolmion korkeussuora, ja $QB \perp AP$.





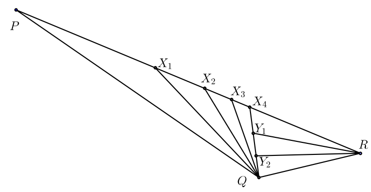
13. Sovelletaan Cevan lauseen trigonometrista versiota ensin kolmioihin AFE, BDF ja CED ja sitten kolmioon ABC. Tarkastellaan ensin kolmiota AFE. Jännenelikulmiosta $AFHE$ saadaan heti $\angle FEA = \angle FHA$; koska $HA \perp BC$ ja $HF \perp BA$, $\angle FHA = \angle ABC = \beta$. Vastaavasti $\angle AFE = \angle BCA = \gamma$. Mainitusta jännenelikulmiosta nähdään myös, että $\angle HFE = \angle HAE = 90^\circ - \gamma$ ja vastaavasti $\angle HEF = 90^\circ - \beta$. Koska I_1 on kolmion HEF sisäkeskipiste, $\angle EFI_1 = 45^\circ - \dfrac{1}{2}\gamma$ ja $\angle FEI_1 = 45^\circ - \dfrac{1}{2}\beta$. Nyt $\angle AFI_1 = \gamma + 45^\circ - \dfrac{1}{2}\gamma = 45^\circ + \dfrac{1}{2}\gamma$ ja $\angle AEI_1 = 45^\circ + \dfrac{1}{2}\beta$. Janat AI_1, FI_1 ja EI_1 kulkevat saman pisteen kautta, joten Cevan lauseen trigonometrinen versio sovellettuna kolmioon AFE antaa

$$\frac{\sin\angle BAI_1}{\sin\angle I_1AC}\cdot\frac{\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma\right)}{\sin\left(45^\circ + \frac{1}{2}\gamma\right)}\cdot\frac{\sin\left(45^\circ + \frac{1}{2}\beta\right)}{\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\beta\right)} = 1.$$

Kolmiosta BDF sekä pisteestä I_2 ja kolmiosta CED ja pisteestä I_3 saadaan analogiset yhtälöt. Kun ne kerrotaan keskenään, saadaan

$$\frac{\sin\angle BAI_1}{\sin\angle I_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBI_2}{\sin\angle I_2BA}\cdot\frac{\sin\angle ACI_3}{\sin\angle I_3CB} = 1.$$

Kun nyt sovelletaan Cevan lauseen trigonometrista versiota kolmioon ABC, saadaan haluttu tulos: suorat AI_1, BI_2 ja CI_3 leikkaavat toisensa samassa pisteessä.



14. Tällaiset kolmiot voidaan muodostaa kaikilla n. Olkoon $t = \dfrac{1}{2n+1}\cdot 180^\circ$. Konstruoidaan kolmio A_i niin, että sen kulmat ovat t, it ja $(2n-i)t$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mitkään kaksi kolmiota A_i ja A_j eivät ole yhdenmuotoisia, koska niiden suurimmat kulmat ovat eri suuria. Osoitetaan sitten, että jokaisella k, $1 \le k \le n$, sellainen kolmio PQR, jossa $\angle RPQ = t$, $\angle PQR = (2n-k)t$ ja $\angle QRP = kt$, voidaan jakaa n:ksi kolmioksi, joista kukin on yhdenmuotoinen yhden kolmion A_i kanssa. Tätä varten valitaan ensin janalta PR pisteet $X_0 = P$, $X_1, \ldots, X_{n-k}$ niin, että $\angle X_jQX_{j+1} = t$. Silloin jokainen kulma $QX_jX_j+1 = (j+1)t$, joten $n-k$ kolmiota $X_{j-1}QX_j$ ovat yhdenmuotoisia kukin kolmion A_j kanssa. Kolmiossa QRX_{n-k} on $\angle RX_{n-k}Q = (n-k+1)t$. Valitaan nyt janalta $X_{n-k}Q$ pisteet $Y_0 = X_{n-k}$, $Y_1, \ldots, Y_k = Q$ niin, että $\angle Y_jRY_{j+1} = t$. Samoin kuin edellä saadaan $\angle RY_{j-1}Y_j = (n-k+j)t$. Kolmiot $RY_{j-1}Y_j$ ovat siis yhdenmuotoisia kolmioiden A_{n-k+j} kanssa, $j = 1, \ldots, k$. Kuvassa tilanne, kun $n = 7$ ja $k = 3$.

15. Olkoon T_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, nelikulmion Q_i ala. Silloin $T_1 + T_2 + \cdots + T_m = 1$. Jos nelikulmion Q_i sivut ovat a_i, b_i, c_i ja d_i ja sivujen a_i, b_i välinen kulma α_i sekä sivujen c_i, d_i välinen kulma γ_i, niin $4T_i = 2a_ib_i \sin\alpha_i + 2c_id_i \sin\gamma_i \le 2a_ib_i + 2c_id_i \le a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2$. Väite seuraa.

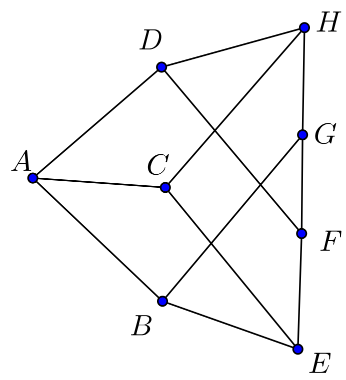
16. Jos hoipertelussa on a kappaletta askelia $(1, 1)$, b kappaletta askelia $(1, -1)$ ja c kappaletta askelia $(-1, 1)$, niin x-akselin suuntan otettujen askelien määrä on $a+b-c = 2n$ ja y-akselin suuntaan otettujen askelien määrä on $a - b + c = 0$. Näistä ratkaistaan $a = n$. Olkoot nyt (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ ne pisteet, joihin n $(1, 1)$-muotoista askelta päättyvät. Koska askeleet $(1, -1)$ ja $(-1, 1)$ tapahtuvat suorien $x+y = k$ suuntaisesti, jokainen piste (x_i, y_i) on suoralla $x + y = 2i$. Pisteet (x_i, y_i) määrittävät hoipertelun yksikäsitteisesti: pisteen (x_i, y_i) ja (x_{i+1}, y_{i+1}) välissä voi olla vain tarvittava määrä askelia $(1, -1)$ tai $(-1, 1)$ pitkin suoraa $x + y = 2i$. Piste ei voi olla $(2n, 0)$ eikä $(0, 2n)$ (koska askel tällöin alkaisi muualta kuin tason ensimmäisestä neljänneksestä). Suoralla $x+y = 2i$ on siis $2i-1$ mahdollista pistettä (x_i, y_i) ja hoiperteluja voi olla enintään $1 \cdot 3 \cdots (2n - 1)$ kappaletta. Jokaiseen jonoon (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) voidaan liittää hoipertelu. Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis $1 \cdot 3 \cdots (2n - 1)$.

17. Voidaan löytää ainakin 8 tehtävän ehdon täyttävää lukua. On olemassa 8 erilaista kolmikkoa (a, b, c), missä $a, b, c = \pm 1$. Jokaista kolmikkoa kohden löytyy kokonaisluku k, jolle $k \equiv a \bmod 7$, $k \equiv b \bmod 11$ ja $k \equiv c \bmod 13$. Jos k_1 ja k_2 ovat kaksi näistä luvuista, niin $k_1 + k_2$ on $\equiv 0$ modulo 7, 11 tai 13.

Olkoon sitten S lukujoukko, jossa on $n > 8$ tehtävän ehdon mukaista lukua. Olkoon $S_7 = \{x \in S \mid \exists y \in S : 7|(x+y)\}$. Määritellään vastaavasti S_{11} ja S_{13}. Selvästi $S = S_7 \cup S_{11} \cup S_{13}$. Tarkastellaan joukkoa S_7. Jos siinä olisi parillinen määrä eri lukuja $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ niin, että modulo 7 olisi $x_1 + x_2 \equiv x_2 + x_3 \equiv \ldots \equiv x_{2n} + x_{2n+1} \equiv x_{2n+1} + x_1 \equiv 0$, olisi $x_1 \equiv -x_2 \equiv \ldots \equiv x_{2n+1} \equiv -x_1$. Tällöin $2x_1$ olisi jaollinen 7:llä ja siis x_1 olisi jaollinen 7:llä, vastoin oletusta. Osoitetaan, että S voidaan jakaa kahdeksi sellaiseksi osajoukoksi S_7' ja S_7'', että jos x ja y kuuluvat samaan osajoukkoon, niin $x + y$ ei ole jaollinen 7:llä. Jos $S_7 = \emptyset$, mikä tahansa S:n ositus kelpaa. Muussa tapauksessa olkoon x_1 jokin S_7:n luku. Olkoon se joukossa S_7'. Sijoitetaan kaikki ne luvut y, joille $7|(x_1 + y)$ joukkoon S_7''. Jos y on jokin edellisistä luvuista, sijoitetaan kaikki luvut z, joille $7|(y + z)$ joukkoon S_7' jne. Jos jokin luku olisi sekä S_7':ssa että S_7'':ssa, syntyisi aikaisemmin mahdottomaksi osoitettu paritonterminen jono. Jos kaikki S_7:n alkiot eivät ole tulleet käsitellyiksi, valitaan lopuista jokin, x_2 ja sijoitetaan se jompaankumpaan joukoista S_7', S_7'' ja jatketaan kuten edellä. Lopuksi sijoitetaan kaikki ne luvut x, joille kaikki luvut $x+y$, $y \in S$ ovat jaottomia 7:llä joukkoon S_7'. Konstruktion mukaan on selvää, että minkään kahden S_7' luvun summa ei ole jaollinen 7:llä eikä minkään kahden S_7'' luvun summa ole jaollinen 7:llä. Samalla tavalla voidaan joukko S osittaa joukoiksi osittaa osajoukoiksi S_{11}' ja S_{11}'' sekä S_{13}' ja S_{13}''. Koska S:ssä on ainakin 9 alkiota, jotkin kaksi niistä kuuluvat yhtä aikaa samaan joukkoon kaikissa kolmessa osituksessa. Näiden lukujen summa ei ole jaollinen 7:llä, 11:llä eikä 13:lla. Ristiriita osoittaa, että suurin tehtävässä kysytty n voi olla enintään 8.

18. Osoitetaan, että pienin m on 3 kaikilla n. Jos $m = 1$, kaikkien kaupunkien tärkeysindeksi on sama, $n - 1$. Siis $m \ge 2$. Oletetaan, että $m = 2$. Silloin mahdollisia tärkeysindeksejä ovat $n-1$, n, $n+1$, $\ldots$, $2(n-1)$. Näitä on n kappaletta, joten jos kaikki tärkeysindeksit ovat eri suuria, jokainen jonon luku on jonkin kaupungin tärkeysindeksi. Mutta silloin jostakin kaupungista lähteviin kaikkiin teihin liittyy luku 1 ja jostakin kaupungista lähteviin teihin luku 2. Koska nitä kaupunkeja yhdistää tie, syntyy ristiriita. Olkoon sitten $m = 3$. Oletetaan, että kaupunkeja on pariton määrä, $n = 2k-1$. Numeroidaan kaupungit 1:stä $2k$:hon. Liitetään kaikkiin kaupungista 1 lähteviin teihin luku 1. Liitetään sitten kaupungista 2 kaupunkiin $2k-1$ johtavaan tiehen luku 2 ja luku 1 kaikkiin muihin kaupungista 2 lähteviin teihin luku 1. Kaupungista 3 lähteviin teihin liitetään luku 1, paitsi kaupunkeihin $2k-2$ ja $2k-3$ vieviin. Jatketaan näin, kunnes tullaan k:nteen kaupunkiin. Sen kaupunkeihin $k+1$, $\ldots$, $2k-1$ liittävät tiet saavat luvun 2. Nyt kaupunkien 1, 2, $\ldots$, k tärkeysindeksit ovat $2k-2$, $2k-1$, $\ldots$, $3k-3$. Jo tehdyt numeroinnit ovat kerryttäneet kaupungeille $k+1$, $\ldots$, $2k-1$ tärkeysindeksiä keskenään eri suuret määrät $k+1$, $k+2$, $\ldots$, $2k-1$. Liitetään nyt jokaiseen kaupunkeja $k+1$, $\ldots$, $2k-1$ yhdistävään tiehen numero 3. Silloin kaikkien kaupunkien tärkeysindeksi on eri suuri. – Jos kaupunkien määrä on parillinen, numerointi voidaan tehdä analogisella tavalla.

19. Osoitetaan, että ehdot voivat toteutua. Koska jokainen juhlija tuntee kolme muuta, tuttavuussuhteita on kaikkiaan $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$. Olkoon A yksi juhlijoista. Hän tuntee juhlijat B, C ja D. Tehtävän ensimmäisen ehdon vuoksi ketkään kaksi joukon $\{B, C, D\}$ jäsentä eivät tunne toisiaan. Jokaisen heistä on siis tunnettava kaksi lopuista juhlijoista E, F, G ja H. Viimemainituissa on oltava kaksi sellaista, jotka tuntevat kaksi joukon $\{B, C, D\}$ jäsentä, ja kaksi sellaista, jotka tuntevat yhden. Nyt on käytetty 9 tuttavuussuhdetta. Loppujen kolmen on vallittava joukon $\{E, F, G, H\}$



jäsenten kesken. Jos yksi tämän joukon jäsenistä, esimerkiksi E, tuntisi kaikki muut, niin nelikko A, F, G, H ei toteuttaisi jälkimmäistä ehtoa. Ainoa mahdollisuus on, että joukossa $\{E, F, G, H\}$ kolme tuntemisrelaatiota järjestävät joukon lineaarisesti. Voidaan olettaa, että E tuntee F:n, F G:n ja G H:n. Jos E tuntee B:n ja C:n ja jos F on sellainen johlija, joka tuntee vain yhden joukon $\{B, C, D\}$ jäsenen, niin tämän jäsenen on oltava D. Nyt G ei voi tuntea D:tä, joten G tuntee esimerkiksi B:n. Silloin C ja D voivat olla H:n tuttavia. Suoritettu konstruktio täyttää tehtävän ensimmäisen ehdon. Jälkimmäisen ehdon toteutumisen tarkistamiseksi riittää, että jokaisen juhlijan X kohdalla tarkastetaan niitä neljää juhlijaa, jotka eivät tunne X:ää. Näiden joukossa on aina kaksi paria tuttuja, ja pareista yksi tulee sellaiseen nelikkoon, jossa on X ja kolme X:ää tuntematonta.

20. Seuraava kaavio osoittaa, että järjestely on mahdollinen. Sairaalat on numeroitu 1:stä 16:een ja samalla rivillä olevat päivystävät yhtä aikaa.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	5	9	13
2	8	10	15
3	6	11	16
4	7	12	14

1	6	10	14
2	7	9	16
3	5	12	15
4	8	11	13

1	7	11	15
2	6	12	13
3	8	9	14
4	5	10	16

1	8	12	16
2	5	11	14
3	7	10	13
4	6	9	15