Baltian Tie 2007. Ratkaisuja

1. Tehtävän summa S_n on suurin, kun $P_1 = \{1, 2\}$, $P_2 = \{3, 4\}$ jne.: jos pareissa olisi $\{1, k\}$, $k > 2$ ja $\{2, m\}$, $m > 2$, olisi

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{km} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) > 0,$$

joten suuurimmassa summassa yhden parin on oltava $\{1, 2\}$; samoin nähdään, että suurimmassa summassa on pari $\{3, 4\}$ jne. Siis

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \le \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Osoitetaan induktiolla, että $S_n < 1 + \dfrac{1}{2n+1}$ kaikilla n. Ensinnäkin $S_1 < 1 - \dfrac{1}{3}$. Ja jos $S_n < 1 - \dfrac{1}{2n+1}$, niin

$$S_{n+1} = S_n + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) < 1 - \frac{1}{2n+3}.$$

2. Olkoon (a_n) tehtävän mukainen eksakti lukujono. Silloin $a_{2n}^2 = a_{2n-2}^2 + a_{4n-2}a_2 = a_{2n-2}^2$. Koska $a_2 = 0$, saadaan induktiolla, että $a_{2n} = 0$ kaikilla $n > 0$. Osoitetaan, että $a_{2n+1} = (-1)^n$; tällöin $a_{2007} = a_{2\cdot 1003+1} = -1$. Selvästi $-1 = a_2^2 - a_1^2 = a_3a_1 = a_3$. Koska $0 = a_{2n}^2 - a_1^2 = a_{2n+1}a_{2n-1}$, on $a_{2n+1}a_{2n-1} = -1$. Jonon peräkkäiset paritonindeksiset termit ovat siten vuorotellen $+1$ ja -1. On vielä todistettava, että jono (a_n), jossa $a_{2k} = 0$ ja $a_n = 1$, kun $n \equiv 1 \bmod 4$, $a_n = -1$, kun $n \equiv -1 \bmod 4$ todella on eksakti. Jos m ja n ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia, niin $a_n^2 - a_m^2 = 0$ ja $m - n$ ja $m + n$ ovat molemmat parillisia, joten myös $a_{m+n}a_{m-n} = 0$. Jos n on pariton ja m parillinen, niin $a_n^2 - a_m^2 = 1$ ja toisaalta $n - m \equiv n + m \bmod 4$. Silloin $n - m$ ja $n + m$ ovat parittomia ja a_{n-m} ja a_{n+m} ovat samanmerkkisiä, joten $a_{n+m}a_{n-m} = 1$. Jos viimein n on parillinen ja m pariton, niin $(n + m) - (n - m) \equiv 2 \bmod 4$; luvuista a_{n+m} ja a_{n-m} toinen on $+1$ ja toinen -1. Siis $a_n^2 - a_m^2 = -1$ ja $a_{n+m}a_{n-m} = -1$. Määritelty jono toteuttaa siis kaikilla indeksien yhdistelmillä eksaktisuusehdon.

3. Olkoon $P(x) = G(x) - F(x)$. Silloin $P(x) \ge 0$ kaikilla x ja P:n aste on $\le 2n+1$. Lisäksi $P(x) = 0$, kun $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Koska $P(x) \ge 0$, sen jokaisen nollakohdan kertaluku on parillinen. Kun tämä yhdistetään tietoon P:n asteesta ja nollakohtien lukumäärästä, nähdään, että

$$P(x) = G(x) - F(x) = a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \cdots (x - x_n)^2,$$

missä a on ei-negatiivinen vakio. Aivan samoin päätellään, että

$$H(x) - F(x) = b(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \cdots (x - x_n)^2,$$

missä b on ei-negatiivinen vakio. Mutta $F(x) + H(x) - 2G(x) = H(x) - F(x) + 2(F(x) - G(x)) = (b - 2a)(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \cdots (x - x_n)^2$. Kun tähän sijoitetaan $x = x_0$, saadaan $b - 2a = 0$. Siis $F(x) + H(x) - 2G(x) = 0$ kaikilla x, ja väite on todistettu.

4. Todistettavan epäyhtälön vasemman puolen tekijät voidaan kirjoittaa näin:

$$2S + n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1) + 1 + 1 + \cdots + 1,$$
$$2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$$
$$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1.$$

Tarkastellaan $3n$-vektoreita

$$\mathbf{v} = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \ldots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_1}, 1, \ldots, 1)$$

ja

$$\mathbf{w} = (\sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \ldots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_1}, \sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_1a_2}, \sqrt{a_2a_3}, \ldots, \sqrt{a_na_1}).$$

Aikaisemman perusteella nähdään, että $|\mathbf{v}|^2 = 2S+n$ ja $|\mathbf{w}|^2 = 2S+a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$. Lisäksi skalaaritulo

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 3\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_ia_{i+1}}$$

(kun $a_{n+1} = a_1$). Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö perusteella

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 \le |\mathbf{v}|^2|\mathbf{w}|^2.$$

Tämä on yhtäpitävää väitteen kanssa.

5. Sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön $y = 1$. Saadaan $f(x) = f(x)f(-1) - f(x) + f(1)$ eli $(2 - f(-1))f(x) = f(1)$. Koska f ei ole vakiofunktio, on oltava $f(-1) = 2$ ja $f(1) = 0$. Sijoiteaan nyt ensimmäiseen yhtälöön $x = -t$ ja $y = -1$. Saadaan $f(t) = f(-t)f(1) - f(-t) + f(-1) = -f(-t) + 2$. Siis $f(t) - 1 = -(f(-t) - 1)$. Jos funktio g, $g(x) = f(x) - 1$ on siis pariton funktio. Kun ensimmäinen yhtälö kirjoitetaan funktion g avulla, saadaan $g(xy) = 1 - f(xy) = 1 - ((1 - g(x))(1 - g(-y)) - (1 - g(x)) + (1 - g(y))) = -g(x)g(-y) + g(-y) + g(y) = g(x)g(y)$. Tehtävän jälkimmäisen yhtälön perusteella saadaan

$$1 - g(1 - g(x)) = f(f(x)) = \frac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1 - g\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{g(x) - 1}.$$

Siis

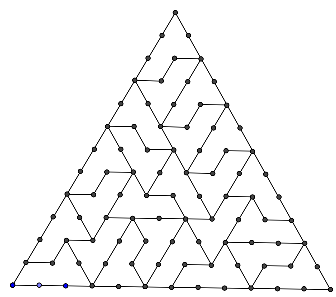
$$g(1 - g(x)) = \frac{1}{1 - g(x)}.$$

Koska funktio f saa kaikki reaaliarvot paitsi arvoa 1, g saa kaikki reaaliarvot paitsi arvoa 0. Jos $y \ne 1$, niin jollain x on $y = 1 - g(x)$ ja $g(y) = \dfrac{1}{y}$. Silloin myös $f(x) = 1 - g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Helposti nähdään, että $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ toteuttaa tehtävän yhtälöt.

6. Osoitetaan ensin, että jos luvut 1, 2, …, n on kirjoitettu muuhun kuin aidosti nousevaan järjestykseen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, niin joillain $1 \le i < j \le n$ on $a_i = a_j + 1$. Tämän todistamiseksi tarkastellaan pienintä indeksiä i, jolle $a_i \ne i$. Silloin $a_i = k > i$. Jos nyt $k-1 = a_j$, niin $a_j \ge i$. Kaikilla $j' < i$ on $a_{j'} = j' < i$. Siis $j > i$. i ja j kelpaavat väitetyksi indeksipariksi. Nyt Freddy valitsee ensimmäiseksi listaltaan tällaisen parin (i, j). Lukujen i ja j vaihtaminen keskenään ei muuta muiden lukujen keskinäistä suuruusjärjestystä. Se ei myöskään muuta i:nnen ja j:nnen luvun suuruusjärjestystä muihin lukuihin nähden, koska verrattuna mihinkä tahansa muuhun listan lukuun a_i ja a_j ovat joko molemmat pienempiä tai molemmat suurempia. Kun Freddy on poistanut parin (i, j) listaltaan, tilanne on muiden lukujen suhteen säilynyt ennallaan, ja Freddy voi toistaa prosessin. Kun Freddy on käynyt listansa kokonaan läpi ja poistanut kaikki sillä olleet parit, luvut ovat suuruusjärjestyksessä.

7. Jos tasasivuisen kolmion sivun pituus on n, se voidaan jakaa sivujen suuntaisilla suorilla n^2:ksi tasasivuiseksi kolmioksi, joiden sivun pituus on 1. Koska virityksessä on 6 pikkukolmiota, välttämätön ehto tehtävässä vaaditun jaon onnistumiselle on, että n^2 on jaollinen 6:lla. Tällöin myös luvun n on oltava kuudella jaollinen. Jos pikkukolmiot väritetään "šakkilaudan tapaan", niin että kolmiot ovat valkoisia ja mustia, ja kolmiot, joilla on yhteinen sivu, ovat erivärisiä, niin virityksessä on joko 2 tai 4 mustaa pikkukolmiota. Jos iso kolmio väritetään niin, että ne pikkukolmiot, joiden yksi sivu on osa ison kolmion reunaa, niin mustia kolmioita on

$$n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$



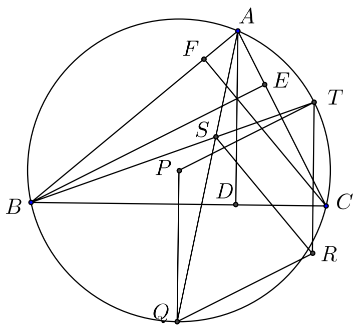
kappaletta. Jos n on jaollinen kuudella, mutta ei 12:lla, siis jos $n = 12k + 6$, niin mustia pikkukolmioita on $(6k + 3)(12k + 7)$ kappaletta, eli pariton määrä. Välttämätön ehto jaon onnistumiselle on siis $12|n$. Tämä on myös riittävä ehto. Jos $12|n$, n-sivuinen kolmio voidaan jakaa tasasivuisiksi kolmioiksi, joiden sivu on 12, ja tällainen voidaan aina jakaa virityksiin, kuten oheinen kuva osoittaa.

8. Liitetään jokaiseen joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ viisialkioiseen osajoukkoon ilmeisellä tavalla jono $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jonka viisi jäsentä on ykkösiä ja muut nollia. Eristämättömiä viisialkioisia osajoukkoja tulevat vastamaan sellaiset jonot, joissa kaksi ykköstä on peräkkäin ja loput kolme ykköstä ovat peräkkäin. Tällaisten jonojen lukumäärä on sama, kuin sellaisten jonojen $b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$, missä yksi b_i on kaksi ja yksi b_i on kolme, ja muut alkiot ovat nollia. Tällaisten jonojen lukumäärä on $(n-3)(n-4)$. Mutta ne jonot, joissa beräkkäiset b_i ja b_j ovat 2 ja 3 tai 3 ja 2 liittyvät samaan eristämättömään osajoukkoon. Tällaiset jonot on siis laskettu kahdesti. Näitä jonoja on $n-4$ kappaletta. Eristämättömiä osajoukkoja on siis $(n-3)(n-4) - (n-4) = (n-4)^2$ kappaletta.

9. Olkoon a jokin yhteisön jäsen ja olkoon A a:n ehdokkaiden muodostama hallitus. Jos

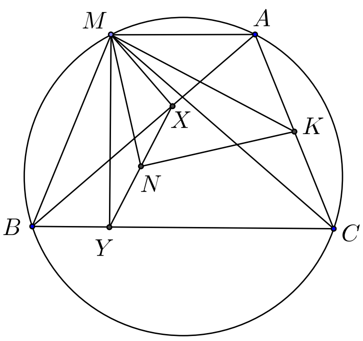
A:han kuuluu ainakin yksi jokaisen yhteisön jäsenen halitusehdokkaista, kaikki ovat tyytyväisiä. Elleivät kaikki ole tyytyväisiä, on olemassa yhteisön jäsen b, jonka hallituskandidaattien joukon B ja joukon A leikkaus on tyhjä. Jaetaan nyt $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, missä A_1, A_2, B_1 ja B_2 ovat kaikki viidestä henkilöstä muodostuvia. Silloin ainakin yksi joukoista $C_1 = A_1 \cup B_1$, $C_2 = A_2 \cup B_1$, $C_3 = A_1 \cup B_2$, $C_4 = A_2 \cup B_2$ tyydyttää kaikkia yhteisön jäseniä. Ellei näin ole, on olemassa yhteisön jäsenet x_1, x_2, x_3, x_4, niin että x_i ei ole tyytyväinen C_i:hin, $i = 1, 2, 3, 4$. Nyt ei ole sellaista kahdesta jäsenestä koostuvaa hallitusta, johon kaikki kuusi jäsentä a, b, x_1, x_2, x_3, x_4 olisivat tyytyväisiä. Jos $\{x, y\}$ olisi tällainen, niin $\{x, y\}$ sisältyisi tasan yhteen joukoista C_i, mutta koska C_i ei tyydytä x_i:tä, kumpikaan x:stä ja y:stä ei kuulu C_i:hin. Ristiriita, siis jokin joukoista C_i on kaikkia yhteisön jseniä tyydyttävä hallitus.

10. Osoitetaan, että tehtävässä esitetty menettely ei ole mahdollinen. Todetaan ansin, että laudalla, jossa on tasan 16 mustaa ruutua, on aina ainakin yksi 2×2-neliö, jonka ruuduista tasan yksi on musta. Koska ruudukossa on 18 riviä, ainakin jotkin rivit ovat kokonaan alkoisia. Jokin kokonaan valkoinen rivi on jonki ei kokonaan valkoisen rivin vieressä. Tässä ei-valkoisessa rivissä on enintään 16 mustaa ruutua, joten siinä on valkoisiakin ruutuja. Yhdestä mustasta ja sen viereisestä valkoisesta ja viereisen kokonaan valkoisen rivin kahdesta ruudusta syntyy 2×2-neliö, jossa on tasan yksi musta ruutu. Mutta jokainen operaatio, jossa jonkin rivin tai sarakeen kaikkien ruutujen väri muutetaan päinvastaiseksi, säilyttää tämän 2×2-neliön mustien ruutujen lukumäärän parillisuuden tai parittomuuden. Koska alkuaan neliössä on parillinen määrä (0) mustia ruutuja, siinä ei koskaan voi olla tasan yhtä mustaa ruutua.



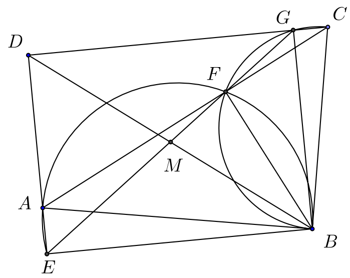
11. Piste Q puolittaa kolmion ABC ympärysympyrän kaaren $\overset{\frown}{BC}$. Tästä seuraa, että AQ on kulman $\angle BAC$ puolittaja. Koska $QR \perp AC$ ka $RS \perp AB$, kulman $\angle QRS$ puolittaja on kohtisuorassa kulman $\angle BAC$ puolittajaa vastaan. Kolmio RSQ on tasakylkinen, joten kulman $\angle QRS$ puolittaja on kohtisuorassa kantaa SQ vastaan. Mutta tästä seuraa, että SQ on kulman $\angle BAC$ puolittajan suuntainen. Koska Q on tällä puolittajalla, SQ on myös, ja erityisesti S on $\angle BAC$:n puolittajan piste. Täydennetään nyt PQR suunnikkaaksi $PQRT$. Nyt piste T puolittaa ABC:n ympärysympyrän kaaren $\overset{\frown}{CA}$, joten BT on kulman $\angle ABC$ puolittaja. Kulman $\angle SRT$ kyljet ovat kohtisuorassa kulman $\angle ABC$ kylkiä vastaan ja kulman $\angle SRT$ puolittaja on kohtisuorassa ST:tä vastaan. Samoin kuin edellä, nähdään että S on kulman $\angle ABC$ puolittajalla. S on siis kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste eli kolmion sisäympyrän keskipiste.

12. Tarkastellaan kolmioita MCA ja MYX. Koska $MBYX$ ja $MBCA$ ovat jännenelikulmioita ja $\angle MBY = \angle MBC$, niin $\angle MAC = \angle MXY$. Koska $MY \perp BC$ ja $MX \perp AB$, $\angle XMY = \angle ABC = \angle AMC$. Kolmiot MCA ja MYX ovat yhdenmuotoisia (kk). MK ja MN ovat näiden kolmioiden keskijanoja, joten $\angle NMY = \angle KMC$. Siis $\angle YMC = \angle NMK$. Lisäksi keskijanojen suhde $MN : MK$ on sama kuin vastinsivujen suhde $MY : MC$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot MNK ja MYC ovat yhdenmuotoisia (sks). Koska $\angle MYC$ on suora, myös $\angle MNK$ on suora.



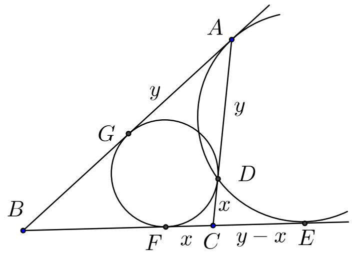
13. Jos suorat ovat kaikki yhdensuuntaisia, niin tehtävän mukainen murtoviiva on helppo muodostaa mihin tahansa sellaiseen tasoon, joka on kohtisuorassa jokaista suoraa $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vastaan. Ellei näin ole, niin olkoon suorien t_i ja t_{i+1} ($t_1 = t_{k+1}$) välinen terävää tai suora kulma α_i ($i = 1, 2, \ldots, k$). Kaikki kulmat eivät ole $= 0$, joten $0 \le \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_k < 1$. Olkoon P_{k+1} pisteen P_k kohtisuora projektio suoralla t_1. On osoitettava, että P_1 voidaan valita niin, että $P_{k+1} = P_1$. Annetaan pisteen P_1 liikkua pitkin suoraa t_1 nopeudella v. Silloin P_2 liikkuu pitkin suoraa t_2 nopeudella $v\cos\alpha_1$, P_3 pitkin suoraa t_3 nopeudella $v\cos\alpha_1\cos\alpha_2$ ja viimein P_{k+1} pitkin suoraa t_1 nopeudella $v\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots\cos\alpha_k$. Koska pisteet P_1 ja P_{k+1} liikkuvat pitkin samaa suoraa eri nopeudella, ne kohtaavat toisensa jonain hetkenä.

14. Olkoon M janan BD keskipiste ja G suorien EF ja DC leikkauspiste. Koska $BE \| DC$, kolmioiden EBM ja GDM vastinkulmat ovat yhtä suuria. Koska $MD = MB$, kolmiot ovat yhteneviä (ksk tai kks). Siis $EB = DG$, ja $EBGD$ on suorakaide. Koska siis $\angle BGC$ on suora, nelikulmio $BCGF$ on jännenelikulmio. Nelikulmiossa $AEBF$ on myös kaksi suoraa kulmaa, joten sekin on jännenelikulmio. Kehäkulmalauseen ja ristikulmien yhtäsuuruuden perusteella



$\angle CBG = \angle CFG = \angle AFE = \angle ABE$. Koska $\angle EBG$ on suora, on myös $\angle ABC = \angle EBG - \angle ABE + \angle CBG$ suora. Koska $\angle CDA$ on suora, $ABCD$ on jännenelikulmio.

15. Sivutkoon kolmion ABC sisäympyrä sivua AB pisteessä G ja sivua BC pisteessä F. Olkoon toinen tehtävän ympyrä Γ; piste, jossa Γ sivuaa suoraa BC olkoon E. Olkoon vielä $DC = x$ ja $AD = y$. Silloin $AG = y$, $FC = x$, $FE = AG = y$ ja $CE = y - x$. Lasketaan pisteen C potenssi ympyrän Γ suhteen sekantin CDA ja tangentin CE avulla. Saadaan $x(x+y) = (y-x)^2$, josta $3xy = y^2$ ja $3x = y$. Kysytty suhde on siis 3.



16. Murtoluvut a ja b voidaan tehdä samannimisiksi: $a = \dfrac{m}{k}$, $b = \dfrac{n}{k}$; k voidaan valita niin, että lukujen m, n ja k suurin yhteinen tekijä on 1. Oletuksen mukaan

$$s = \frac{m+n}{k} = \frac{m^2+n^2}{k^2},$$

eli

$$(m+n)k = m^2 + n^2. \tag{1}$$

Jos nyt jokin alkuluku on k:n ja m:n tekijä, se on myös n:n tekijä ja jos jokin alkuluku on k:n ja n:n tekijä, se on myösn m:n tekijä. Koska s.y.t.$(k,\, m,\, n) = 1$, on oltava s.y.t.$(k,\, m) =$ s.y.t.$(k,\, n) = 1$. Jos s kirjoitetaan supisteussa muodossa olevaksi murtoluvuksi, niin tämän murtoluvun nimittäjä on k:n tekijä. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan, että 2 ja 3 eivät voi olla k:n tekijöitä. Jos $3|k$, niin m ja n ovat jaottomia kolmella. Silloin $m^2 \equiv n^2 \equiv 1 \mod 3$. Yhtälön (1) vasen puoli on kolmella jaollinen ja oikea puoli kolmella jaoton. Jos $2|k$, niin m ja n ovat parittomia. Silloin $m+n$ on parillinen ja yhtälön (1) vasen puoli on jaollinen neljällä. Mutta $m^2 + n^2 \equiv 1 + 1 = 2 \mod 4$. Oletus, että s.y.t.$(k,\, 6) > 1$ johti siis ristiriitaan ja oli väärä.

17. Olkoon $x = dx'$, $y = dy'$ ja $z = dz'$. Silloin

$$\begin{aligned} n = \frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x} &= \frac{d^2x'z'(dx'+1) + d^2y'x'(dy'+1) + d^2y'z'(dz'+1)}{d^3x'y'z'} \\ &= \frac{d^3(x'^2z' + x'y'^2 + y'z'^2) + d^2(x'z' + x'y' + y'z')}{d^3x'y'z'}. \end{aligned}$$

Koska n on kokonaisluku, d^3 on osoittajan tekijä, joten d on luvun

$$x'z' + x'y' + y'z' = \frac{xz + xy + yz}{d^2}$$

tekijä. Siis $d^3 \le xy + yz + zy$, eli väite on tosi.

18. Oletetaan, että kokonaisluvut x, y, z, t toteuttavat yhtälön $x^2 + y^2 - 3z^2 - 3t^2 = 0$; luvut voidaan vielä valita niin, että x, y, z, t nelikko minimoi suureen $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ kaikkien yhtälön toteuttavien nelikkojen joukossa. Silloin $x^2 + y^2$ on kolmella jaollinen; koska neliöt ovat joko $\equiv 0$ tai $\equiv 1 \bmod 3$, lukujen x ja y on molempien oltava kolmella jaollisia: $x = 3x'$, $y = 3y'$. Mutta silloin $3(z^2 + t^2)$ on jaollinen 9:llä ja $z^2 + t^2$ on jaollinen kolmella. Mutta tämä on mahdollista vain, jos z ja t ovat molemmat jaollisia kolmella: $z = 3z'$, $t = 3t'$. Mutta nyt $x'^2 + y'^2 - 3z'^2 - 3t'^2 = 0$, mikä on mahdollista vain, jos $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2 = 0$. Vastaus tehtävän kysymykseen on siis "ei".

19. Oletetaan, että kieroutuneita lukuja on äärettömän paljon. Silloin on olemassa kieroutunut luku, jossa on ainakin $10k + 1$ numeroa. Olkoot c_1, c_2, ..., c_{10+1} tämän luvun peräkkäisiä numeroita. Silloin k-numeroiset luvut

$$a = c_1 10^{k-1} + c_2 10^{k-2} + \cdots + 10c_{k-1} + c_k,$$
$$b = c_2 10^{k-1} + c_3 10^{k-2} + \cdots + 10c_k + c_{k+1},$$

ovat r:llä jaollisia samoin kuin erotus $10a - b = c_1 10^k - c_{k-1}$. Jos merkitään $d_i = c_{ki+1}$, $i = 0, 1, \ldots, 10$, niin voidaan päätellä samoin kuin edellä, että luvut $10^k d_i - d_{i+1}$ ovat jaollsia r:llä, kun $i = 0, 1, \ldots, 9$. Koska d_0, d_1, ..., d_{10} on 11:n numeron jono, jotkin kaksi luvuista d_i ovat samoja. Siis joillain i ja j luvut d_1, d_2, ..., d_{j-1} ovat kaikki eri suuria, mutta $d_j = d_i$. Nyt summa

$$(10^k d_i - d_{i+1}) + (10^k d_{i+1} - d_{i+2}) + \cdots + (10^k d_{j-1} - d_j)$$
$$= (10^k d_i - d_{i+1}) + (10^k d_{i+1} - d_{i+2}) + \cdots + (10^k d_{j-1} - d_i) = (10^k - 1)(d_i + d_{i+1} + \cdots + d_{j-1})$$

on jaollinen r:llä. Mutta $d_i + \cdots + d_{j+1} \le 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$. Koska r:n alkutekijät ovat suurempia kuin 50, $10^k - 1$ on jaollinen r:llä. $10^k - 1$ on siis kieroutunut.

20. Väite tulee todistetuksi, jos jokaiselle alkuluvulle p korkein p:n potenssi, jolla $ab(a-b)$ on jaollinen, on p^{3m} jollain $m \ge 0$. Olkoon siis p alkuluku; olkoot p^k ja p^n korkeimmat p:n potenssit, joilla p^k on a:n tekijä p^n on b:n tekijä. Jos $k = n$, niin $ab(a-b)$ on jaollinen luvulla p^{3k}, mutta $a^3 + b^3 + ab$ on jaollinen enintään p^{2k}:lla. Tämä on mahdollista vain, jos $k = 0$. Olkoon sitten $k > n$. Silloin $ab(a-b)$ on jaollinen ainakin p^{k+2n}:llä. Luvun $a^3 + b^3 + ab$ yhteenlaskettavat ovat jaollisia p^{3k}:lla, p^{3n}:llä ja p^{k+n}:llä. Nyt $3n < k + 2n$ ja $k + n < k + 2n$. Jos $3n \ne k + n$, summa ei voi olla jaollinen p^{k+2n}:llä. Jaollisuus voi toteutua, jos $3n = k + n$ (koska $b^3 + ab$ voi tällöin olla jaollinen korkeammalla p:n potenssilla). Jaollisuus voi siis toteutua vain, jos $k = 2n$. Silloin ab on jaollinen luvulla $p^{2n+n} = p^{3n}$.