Baltian Tie 2005 – ratkaisuja

1. Osoitetaan, että jonossa on aina kaksi samaa lukua. Olkoon k pienin positiivinen kokonaisluku, jolle on voimassa

$$(k+1)\cdot 9^{2005} < 10^k.$$

(Tällainen luku on olemassa, koska epäyhtälön vasen åpuoli on k:n ensimmäisen asteen polynomi ja oikea puoli eksponenttifunktio.) Osoitetaan, että on olemassa n_0 niin, että a_n:n kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden lukumäärä on pienempiu kuin $k+1$ kaikilla $n > n_0$. Olkoon a_i:ssä tasan $j+1$ numeroa, ts. $10^j \le a_i < 10^{j+1}$. Osoitetaan että (1) jos $j < k$, niin a_{i+1}:ssä on vähemmän kuin $k+1$ numeroa, ja (2) jos $k \le j$, niin $a_{i+1} < a_i$. (1): Koska $a_{i+1} \le (j+1)\cdot 9^{2005} < (k+1)\cdot 9^{2005} < 10^k$, niin a_i:ssä on vähemmän kuin $k+1$ numeroa. (2): Jälleen $a_{i+1} \le (j+1)\cdot 9^{2005}$. Koska $j \ge k$, $a_i \ge 10^j > (j+1)\cdot 9^{2005} \ge a_{i+1}$. Todistetaan nyt tehtävän väite. Jos a_0:ssa on enintään k numeroa, niin kaikissa jonon jäsenissä on (1):n perusteella enintään k numeroa. Jono on rajoitettu ja päättymätön, joten sen taytyy kohdata jokin sama luku useamman kerran. Jos a_0:ssa on numeroita $k+1$ tai enemmän, jono alkaa vähenevänä. Jossain termissä a_{n_0} on silloin enintään k numeroa, ja tästä alkaen kaikissa jonon termeissä on enintään k numeroa. Laatikkoperiaatteesta seuraa taas, että jonossa on samoja lukuja.

2. Koska $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, todistettava epäyhtälö on

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma} \ge 3+\frac{3}{8} = \frac{27}{8}.$$

Sovelletaan harmonisen ja aritmeettisen keskiarvon epäyhtälöä ja aritmeettisen ja neliöllisen keskiarvon epäyhtälöä:

$$\frac{3}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\gamma}} \le \frac{\cos^\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3} = \frac{3-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{3}$$
$$= 1-\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

Väite seuraa.

3. Jonon määritelmästä seuraa heti, että $a_{k+2} > a_k + \dfrac{1}{2}a_{k+1}$. Kun tämmä epäyhtälö jaetaan luvlla $a_k a_{k+1} a_{k+2}$ ja termit järjestetään uudelleen, saadaan

$$\frac{1}{a_k a_{k+2}} < \frac{2}{a_k a_{k+1}} - \frac{2}{a_{k+1}a_{k+2}}.$$

Näin tehtävän summalle saadaa ”teleskooppinen” yläraja:

$$\sum_{k=1}^{98}\frac{1}{a_k a_{k+2}} < \sum_{k=1}^{98}\left(\frac{2}{a_k a_{k+1}} - \frac{2}{a_{k+1}a_{k+2}}\right) = \frac{2}{a_1a_2} - \frac{2}{a_{99}a_{100}} < \frac{2}{a_1a_2} = 4.$$

4. Olkoon $Q(x) = x^2+1$. Tehtävän yhtälö on $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Tämän yhtälön toteuttavat ainakin $P(x) = x$, $P(x) = Q(x) = x^2+1$ ja $P(x) = Q(Q(x)) = (x^2+1)^2+1 = x^4+2x^2+2$.

5. Koska kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x on $2x \le x^2+1$, niin

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \le \frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1} = \frac{1}{2+\dfrac{1}{a}}+\frac{1}{2+\dfrac{1}{b}}+\frac{1}{2+\dfrac{1}{b}}.$$

Tehtävän epäyhtälö on siis yhtäpitävä epäyhtälön

$$\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)+\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)+\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right) \le \left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)$$

kanssa. Kun tässä suoritetaan kertolaskut, niin nähdään edelleen, että tehtävän epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{abc} \ge 4$$

eli

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \ge 3$$

kanssa. Mutta vimeinen epäyhtälö seuraa heti aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon epäyhtälöstä ja oletuksesta $abc = 1$:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{abc}\right)^3} = 3.$$

6. Jakoyhtälön mukaan $N = qK + r$, $0 \le r < K$. Numeroidaan kortit numeroilla yhdestä N:ään, alkaen pakan pohjalta. Kortit $N-(j-1)$ siirtyvät korteiksi j, $1 \le j \le K$ ja kortit m, $1 \le m \le N-K$ siirtyvät korteiksi $m+K$. Selvitetään, miten kortit, joiden numero on $1, 2, \ldots, K$ vaihtavat paikkaa sekoitusoperaatioissa. Olkoon $i \le r$. Silloin kortin numero i paikka vaihtuu seuraavasti:

$$i \to K+i \to 2K+i \to \cdots \to qK+i \to r+1-i \to K+r+1-i \to \cdots \to qK+r+1-i \to i$$

Tähän kiertoon tarvitaan $2q+2$ sekoitusta. Kortit i, $r < i \le K$ puolestaan kiertävät näin:

$$\begin{gathered} i \to K+i \to 2K+i \to \cdots \to (q-1)K+i \to K+r+1-i \\ \to 2K+r+1-i \to \cdots \to qK+r+1-i \to i. \end{gathered}$$

Tämän kierron pituus on $2q$ sekoitusta. Jokainen luku $1, 2, \ldots, N$ on mukana jommassakummassa kierrossa. Jokainen kortti palaa siis alkuperäiselle paikalleen joko $2q+2$:n tai $2q$:n sekoituksen jälkeen. Lukujen $2q$ ja $2q+2$ pienin yhteinen monikerta on $2q(q+1)$. Jokainen kortti palaa paikalleen viimeistään $2q(q+1)$:n sekoituksen jälkeen. Koska $q+1 \le 2q$, niin

$$2q(q+1) \le (2q)^2 \le 4\left(\frac{N}{K}\right)^2,$$

ja väite on todistettu.

7. Oletetaan, että taulukossa on rivi, jossa on tasan yksi nolla; voidaan olettaa, että brivi on (1, 1, 1, 1, 1, 0). Jos nyt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 1)$ on taulukon rivi, niin myös $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$ on taulukon rivi; taulukon viimeisessä sarakkeessa on siten ainakin puolessa riveistä 0. Oleteaan sitten, että jossain rivissä olisi tasan kaksi nollaa; voidaan olettaa, että rivi on $(x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 0)$. Olkoon k_{ij} sellaisten sivien lukumäärä, joiden kaksi viimeistä lukua ovat i ja j. Samoin kuin yllä nähdään, että $n_{00} \geq n_{11}$. Voimme olettaa, että $n_{10} \geq n_{01}$. Viimeisessä sarakkeessa on $n_{00} + n_{10}$ nollaa ja $n_{11} + n_{01}$ ykköstä; nollia on siis ainakin yhtä monta kuin ykkösiä. Oletetaan sitten, että kaikissa riveissä on ainakin kolme nollaa (paitsi mahdollisesti rivissä (1, 1, 1, 1, 1, 1), jos sellainen taulukossa on.) Koska $n \geq 3$, taulokossa on ainakin kaksi riviä, joissa on nollia. Koska rivit eivät ole samoja, niiden alkioiden tulojen joukossa on ainakin neljä nollaa. Taulukon nollien määrä on siis suurempi kuin $3(n-1)$. Ei ole mahdollista, että jokaisessa sarakkeessa olisi enintään $\frac{n-1}{2}$ nollaa; siis jossain sarakkeessa on oltava $\frac{n}{2}$ nollaa.

8. Osoitetaan, että on väritettävä ainakin 48 neliötä. Osoitetaan ensin, että 48 neliötä riittää. Tämä nähdään seuravalla tavalla. Olkoon A jokin ruudukon lävistäjällä oleva yksikköneliön kärkipiste ja olkoon B se lävistäjän kärkipiste, joka on kauimpana A:sta. Väritetään neliö, jonka lävistäjä on AB. Kun sama tehdään kaikille 48:lle lävistän pisteelle, jotainen ruudukon sivu tulee väritetyksi. Se, että neliöitä tarvitaan ainakin 48, nähdään tarkastelemalla niitä ruudukon yksikköjanoja, joiden toinen ja vain toinen päätepiste on ison neliön reunalla. Selvästi mikään ruudukkoon piirretty neliö ei voi sisältää kuin enintään kaksi tällaista janaa. Janoja on $4 \cdot 24$ kappaletta, joten neliöitä tarvitaan ainakin 48.

9. Hahmotetaan $n \times 3$-ruudukko niin, että siinä on n kolmen ruudun levyistä vaakariviä ja kolme n:n ruudun korkousta saraketta. Sanotaan tällaista ruudukkoa A_n-ruudukoksi. Tarkastellaan myös sellaista ruudukkoa, jossa ylimmällä rivillä on jommassakummassa laidassa kaksi vierekkäistä ruutua ja niiden alapuolella $n-2$ kolmen ruudun levyistä riviä. Kutsutaan näitä B_n-ruudukoiksi. Olkoon n parillinen. Olkoon A_n-ruudukkojen 1×2-paloittelujen lukumäärä N_n ja B_n-ruudukkojen vastaava lukumäärä K_n. Johdetaan suureille N_n ja K_n palautuskaava. A_n-ruudukon kaksi ylintä riviä voidaan paloitella sarakkeiden suuntaisilla 1×2 dominoilla vain yhdellä tavalla, ja alemmat $n-2$ riviä N_{n-2}:lla tavalla. A_n-ruudukko voidaan paloitella myös niin, että erotetaan siitä B_n ruudukko; tämä voidaan tehdä kahdella tavalla. yli jäävä neljän ruudun kuvio voidaan paloitella vain yhdellä tavalla. Kaikkiaan siis

$$N_n = N_{n-2} + 2K_n \tag{1}$$

ja

$$N_{n+2} = N_n + 2K_{n+2}. \tag{2}$$

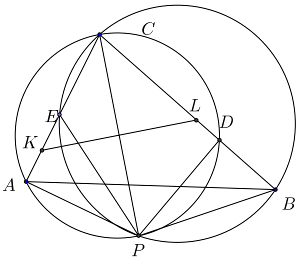
Tarkastellaan sitten B_{n+2}-ruudukon paloittelua. Siitä voidaan irrottaa ylin vajaa rivi omaksi palakseen, loppu on A_n-ruudukko, joka siis voidaan paloitella N_n eri tavalla. on myös mahdollista erottaa B_{n+2} ruudukosta kolme sarakkeiden suuntaista palaa, ja silloin jäljelle jää B_n-ruudukko, jonka voi paloitella K_n eri tavalla. Siis

$$K_{n+2} = N_n + K_n. \tag{3}$$

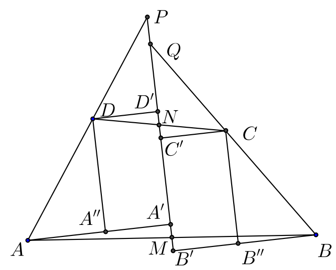
Yhtälöistä (1), (2) ja (3) on helppo eliminoida K_{n+2} ja K_n; jäljelle jää yhtälö $N_{n+2} = 4N_n - N_{n-2}$ ja $N_{n+2} \equiv N_n - N_{n-2} \bmod 3$. Heti nähdään, että $N_2 = 3 \equiv 0 \bmod 3$ ja $N_4 = 11 \equiv 2 \bmod 3$. Induktio-oletuksesta $N_{6k+2} \equiv 0 \bmod 3$ seuraa $N_{6k+6} \equiv N_{6k+4} \bmod 3$ ja $N_{6(k+1)+2} \equiv 0 \bmod 3$. Koska $200 = 33 \cdot 6 + 2$, N_{200} on kolmella jaollinen.

10. Viisialkioisella joukolla $K = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ on kymmenen kahden alkion osajoukkoa. Jos valitaan kolme lukua niiden kymmenen m:n kahden alkuluvun tulon muotoisten tekijöiden joukosta, joiden molemmat tekijät ovat joukossa K, tulo ei voi olla m (koska tekijä 13 ei ole mukana). Siis $n \geq 11$. Jaetaan 15-alkioinen M viideksi osajoukoksi, joista jokaisessa alkioiden tulo on m: $\{2 \cdot 3, 5 \cdot 13, 7 \cdot 11\}$, $\{2 \cdot 5, 3 \cdot 7, 11 \cdot 13\}$, $\{2 \cdot 7, 3 \cdot 13, 5 \cdot 11\}$, $\{2 \cdot 11, 3 \cdot 5, 7 \cdot 13\}$ ja $\{2 \cdot 13, 3 \cdot 11, 5 \cdot 7\}$. Jos nyt valitaan mitkä tahansa M:n 11 lukua, niin laatikkoperiaatteen nojalla jotkin kolme, a, b ja c, kuuluvat samaan edellisistä viidestä joukosta. Silloin $abc = m$.

11. Piirretään kolmioiden ADC ja EBC ympärysympyrät. Niiden toinen leikkauspiste on P. Koska kahden toisiaan leikkaavan ympyrän yhteinen jänne on kohtisuorassa ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevaa suoraa vastaan, $CP \perp KL$. Kolmio CKL on tasakylkinen, jos sen C:stä piirretty korkeusjana yhtyy kulman C puolittajaan. On siis osoitettava, että CP on kulman $\angle ACB$ puolittaja. Tätä varten tarkastellaan jännenelikulmiota $APDC$. Jännenelikulmion perusominaisuuden perusteella $\angle CAP = \angle BDB$. Jännenelikulmiosta $CEPB$ saadaan samoin $\angle PBD = \angle PEA$. Koska $AE = BD$, kolmiot APE ja DPB ovat yhteneviä (ksk). Tästä seuraa, että kolmioiden P:stä suorille AC ja BC piirretyt korkeusjanat ovat yhtä pitkät. Mutta tämä merkitsee, että CP on kulman $\angle ACB$ puolittaja.



12. Olkoot A', B', C' ja D' pisteiden A, B, C ja D kohtisuorat projektiot suoralla MN ja olkoot A'' ja B'' pisteiden D ja C kohtisuorat projektiot suorilla AA' ja BB'. Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että kolmiot $DD'P$ ja $CC'Q$ ovat yhteneviä. Koska $AM =_M B$ ja $DN = NC$, suorakulmaisista kolmioista $AA'M$, $BB'M$ ja $DD'N$, $CC'N$ saadaan $AA' = BB'$ ja $DD' = CC'$. Nelikulmiot $A'D'DA''$ ja $C'B'B''C$ ovat suorakaiteita, joten $A'A'' = DD' = CC' = B'B''$ ja $AA'' = BB''$. Koska $AD = BC$ ja kolmiot $AA''D$ ja $BB''C$ ovat suorakulmaisia, ne ovat yhteneviä. Siis $\angle DAA'' = \angle CBB''$. Koska $DD' \| AA'$ ja $CC' \| BB'$, niin $\angle PDD' = \angle DAA'$ ja $\angle QCC' = \angle CBB'$. Siis $\angle PDD' = \angle QCC'$, jaten kolmiot $DD'P$ ja $CC'Q$ ovat todellakin yhteneviä (ksk).

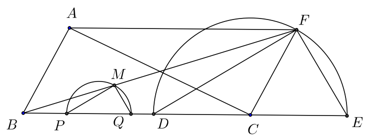


13. Jos ympyrän säde on $\sqrt{2}$, sen halkaisjan pituus on pienempi kuin 3. (a) Tarkastellaan suorakaiteen kärkiä ja pitempien sivujen keskipisteitä. Mitkä tahansa kaksi näistä ovat ainakin kolmen yksikön päässä toisistaan. Mitkään kaksi eivät siis voi olla saman ympyrän sisällä. Ympyröitä tarvitaan siis ainakin kuusi. Toisaalta 2×2-neliön ympärysympyrän säde on $\sqrt{2}$. Kuusi tällaista neliötä peittää 6×3-suorakaiteen, joten suorakaide voidaan peittää kuudella $\sqrt{2}$-säteisellä ympyrällä. (b) Suorakaiteen keskipisteen etäisyys suorakaiteen kärjestä on

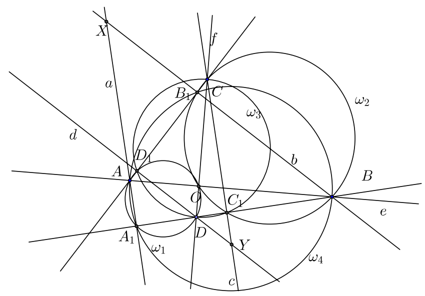
$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{34} > \frac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2}.$$

Ympyrä, jonka säde on $\sqrt{2}$ ei voi peittää suorakaiteen kärkeä ja keskipistettä. Ympyröitä tarvitraan siis ainakin viisi. Suorakaide voidaan jakaa kolmeksi $2 \times \frac{5}{3}$-suorakaiteeksi ja kahdeksi $1 \times \frac{5}{2}$-suorakaiteeksi. On helppo todeta, että tällaisten suorakaiteiden lävistäjä ovat lyhempiä kuin $2\sqrt{2}$, joten ne voidaan peittää $\sqrt{2}$-säteisillä ympyröillä. Viisi ympyrää riittää.

14. Täydennetään kolmion ABC suunnikkaaksi $ABCF$. Silloin piste F on ympyrällä, jonka keskipiste on C ja halkaisija DE. Thaleen lauseen nojalla $\angle DFE$ on suora. Koska $BD = 3 \cdot BP$, $BE = 3 \cdot BQ$ ja $BF = 3 \cdot BM$, D, E ja F ovat pisteiden P, Q ja M kuvat B-keskisessä homotetiassa, jossa suurennussuhde on 3. Siis myös $\angle PMQ$ on suora.



15. Käytetään hyväksi kahden ympyrän *radikaaliakselin* käsitettä. Radikaaliakseli on niiden pisteiden joukko, joiden potenssi on kummankin ympyrän suhteen sama. Radikaaliakseli on aina suora, ja jos ympyrät leikkaavat, se on leikkauspisteiden kautta kulkeva suora. Olkoot nyt A_1 ja C_1 suorien a ja c ja suoran BD leikkauspisteet sekä B_1 ja D_1 suoran AC ja suorien b ja d leikkauspisteet. Suorista kulmista nähdään heti, että pisteet A, D_1, O ja D ovat samalla ympyrällä ω_1, pisteet C, B_1, O ja B samalla ympyrällä ω_3, pisteet D_1, C_1, D ja C samalla ympyrällä ω_2 ja pisteet A_1, B_1, A sekä B samalla ympyrällä ω_4. Piste O on ympyröiden ω_1 ja ω_2 radikaaliakselilla. Piste Y on sekä ympyröiden ω_1 ja ω_3 että ympyröiden ω_2 ja ω_3 radikaaliakselilla. Siten pisteen Y potenssi ympyröiden ω_1 ja ω_2 suhteen on sama, joten Y on näiden ympyröiden radikaalikaselilla. Vastaavasti nähdään, että X on sekä ympyröiden ω_1 ja ω_4 että ympyröiden ω_2 ja ω_4 radikaaliakselilla. Se on siis myös ympyröiden ω_1 ja ω_2 radilaaliakselin piste. Näin ollen X, Y ja O ovat samalla suoralla.



16. Oositetaan ensin, että väite pätee, kun q on alkuluku. Koska $(n+1)^p - n^p = aq$, luvuilla $n+1$ ja q ja n ja q on sama suurin yhteinen tekijä. Sen on 1, koska peräkkäisistä luvuista

n ja $n+1$ ainakin toinen on q:lla jaoton. Luvulla n on siis käänteisluku $\mod q$; olkoon se m. Siis $mn \equiv 1 \mod q$. Jos $s = m(n+1)$, niin $s^p = m^p(n+1)^p \equiv m^p n^p \equiv 1 \mod q$. Olkoon t pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $s^t \equiv 1 \mod q$. Silloin $t|p$. (Jos olisi $p = at + b$, $0 < b < t$, niin $1 \equiv s^p = s^{at+b} = (s^t)^a s^b \equiv s^b \mod q$, mikä olisi ristiriidassa t:n määritelmän kanssa.) Koska p on alkuluku, niin $t = 1$ tai $t = p$. Jos olisi $t = 1$, olisi $m(n+1) \equiv 1 \mod q$ ja $m \equiv 0 \mod q$, $mn \equiv 0 \mod q$. Siis $t = p$. Fermat'n pienen lauseen nojalla $s^{q-1} \equiv 1 \mod q$. Siis p on $q-1$:n tekijä. – Jos mille tahansa luvun q kahdelle tekijälle q_1 ja q_2 pätee, että $q_1 - 1$ ja $q_2 - 1$ ovat p:llä jaollisia, niin identiteetistä $(q_1-1)(q_2-1) = q_1q_2 - 1 - (q_1-1) - (q_2-1)$ seuraa, että $q_1q_2 - 1$ on p:llä jaollinen. Tästä ja todistuksen alkuosasta seuraa helposti, että tehtävän väite pätee myös, jos q on yhdistetty luku.

17. Määritelään jono y_n asettamalla $y_n = 2x_n - 1$. Nyt $y_n = 2(2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1) - 1 = 4x_{n-1}x_{n-2} - 2x_{n-1} - 2x_{n-2} + 1 = (2x_{n-1} - 1)(2x_{n-2} - 1) = y_{n-1}y_{n-2}$, kun $n \geq 2$. Siis $y_{n+3} = y_{n+2}y_{n+1} = y_{n+1}^2 y_n$. Luku y_{n+3} on neliöluku jos ja vain jos luku y_n on neliöluku. Koska $y_0 = 2a - 1$, tehtävän ehto toteutuu, kun y_0 on pariton neliöluku, $y_0 = (2m-1)^2$, ja

$$a = \frac{1}{2}\left((2m-1)^2 + 1\right),$$

m positiivinen kokonaisluku.

18. Olkoon $x = 2^s a$ ja $y = 2^t b$, a ja b parittomia kokonaislukuja. Voidaan olettaa, että $s \geq t$. Silloin

$$z = \frac{2^{2+t+s}ab}{2^t(2^{s-t}a + b)} = \frac{2^{s+2}ab}{2^{s-t}a + b}.$$

Jos olisi $s - t > 0$, niin z:n nimittäjä olisi pariton, ja z olisi parillinen. Siis $s = t$ ja

$$z = \frac{2^{s+2}ab}{a+b}.$$

Olkoon sitten $a = de$, $b = df$, missä e:n ja f:n suurin yhteinen tekijä on 1. Nyt

$$z = \frac{2^{s+2}def}{e+f}.$$

Koska z on pariton, $e + f$ on jaollinen $22 + 2$:lla ja siis ainakin 4:llä. Koska e ja f ovat parittomia kokonaoislukuja, toisen esimeskiksi e:n, on oltava $\cong 3 \mod 4$. Mutta e:n ja $e + f$:n suurin yhteinen tekijä on 1, joten e on z:n tekijä, ja väite on todistettu.

19. Lähdetään liikkeelle jostain Pythagoraan kolmikosta, esimerkiksi yhtälöstä $3^2 + 4^2 = 5^2$. Silloin $3^2(3^2 + 4^2) + 4^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 + (4 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5)^2$. Näin on saatu kolmen neliöluvun summa, joka on neliöluku. Menetelmä voidaan toistaa mielivaltaisen monesti ja päästä tilanteeseen, jossa mielivaltaisen monen neliöluvun summa on neliöluku.

20. Oletetaan, että p_k on n:n alkutekijöistä suurin. Olkoon $m = (p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$. Silloin p_k on m:n ja siis myös jonkin p_i+1:n alkutekijä. Oletetaan, että $p_k > 3$. Jos $p_i = 2$, niin $p_i+1 < p_k$. Ristiriita. Jos $p_i > 2$, niin p_i+1 on parillinen, ja sen tekijät 2 ja $\frac{1}{2}(p_i+1)$ ovat $< p_k$. Ristiriita. Siis $p_k \le 3$ ja $n = 2^r 3^s$. Vastaavasti $m = 3^r 4^s = 2^{2s} 3^r$. $n|m$ jos ja vain jos $s \le r \le 2s$.