Baltian Tie 2004 – ratkaisuja

1. Tehtävän ehdosta (2) ja aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä seuraa

$$\sqrt{a_n(n+1)} \geq \frac{a_{n+1}+n}{2} \geq \sqrt{na_{n+1}}$$

eli

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+1}{n}.$$

Kun tässä epäyhtälössä n korvataan luvuilla k, $k+1$, $\ldots$, $2k-1$, saadaan ja syntyneet $2k$ epäyhtälöä kerrotaan puolittain keskenään, saadaan

$$\frac{a_{2k}}{a_k} \leq \frac{2k}{k} = 2.$$

Siis $2a_n \geq a_{2n}$ kaikilla n. Ehdon (1) perusteella on nyt

$$3a_n = a_n + 2a_n \geq a_n + a_{2n} \geq 3n$$

eli $a_n \geq n$. Väite (a) on todistettu. Olkoon sitten $a_n = n+1$. Silloin $a_n + a_{2n} = n+1+2n+1 > 3n$ ja $a_{n+1}+n = 2n+2 = 2\sqrt{(n+1)^2} = 2\sqrt{a_n(n+1)}$. Jono $(a_n) = (n+1)$ on siis eräs kohtaan (b) kelpaava ratkaisu.

2. Koska P:n kertoimet ovat ei-negatiivisia ja ainakin yksi kerroin on $\neq 0$, niin $P(x) > 0$, kun $x > 0$. Olkoon $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Tarkastellaan lauseketta $P(x)P(x^{-1})$. Se on muotoa $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_{-(n-1)}x^{1-n} + b_{-n}x^{-n}$. Selvästi $b_n = a_na_0$, $b_1 = a_na_1 + a_{n-1}a_0$, $b_2 = a_na_2 + a_{n-1}a_1 + a_{n-2}a_0$, $\ldots$, $b_k = a_na_{n-k} + a_{n-1}a_{n-k-1} + \cdots + a_ka_0$, $\ldots$, $b_0 = \sum_{k=0}^n a_k^2$, $\ldots$, $b_{-k} = a_0a_k + a_1a_{k+1} + \cdots + a_{n-k}a_n$, $\ldots$, $b_{1-n} = a_1a_n + a_0an-1$, $b_{-n} = a_0a_n$. Näin ollen

$$P(x)P(x^{-1}) = \sum_{k=0}^n a_k^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} a_{j-k}a_k(x^j + x^{-j}).$$

Koska kaikilla positiivisilla luvuilla y on $y + y^{-1} \geq 2$, on

$$P(x)P(x^{-1} \geq \sum_{k=0}^n a_k + 2\sum_{j>k} a_ja_k = P(1)P(1^{-1}) = (P(1))^2 \geq 1.$$

3. Osoitetaan ensin, että väite pätee, kun $n = 3$. Silloin

$$\frac{1}{p^3+q^3+1} = \frac{1}{(p+q)(p^2-pq+q^2)+1} = \frac{1}{(p+q)(pq+(p-q)^2)+1} \leq \frac{1}{pq(p+q)+1} = \frac{r}{p+q+r}.$$

Vastaavasti

$$\frac{1}{q^3+r^3+1} \leq \frac{p}{q+r+p}, \quad \frac{1}{r^3+p^3+1} \leq \frac{q}{r+p+q}.$$

Saatujen kolmen epäyhtälön oikeiden puolien summa on 1, joten tehtävän epäyhtälö on tosi, kun $n = 3$. Yleisessä tapauksessa voidaan merkitä $p' = p^{n/3}$, $q' = q^{n/3}$ ja $r' = r^{n/3}$ ja soveltaa jo todistettua epäyhtälöä lukuihin p', q' ja r'. Väite seuraa heti.

4. Elleivät asiat ole niin kuin tehtävässä väitetään, jokaisella K, $1 \le K \le n$, on olemassa sellainen $k \le K$, että lukujen $x_k,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_K$ aritmeettinen keskiarvo on suurempi kuin X. On siis olemassa a_1 niin, että jonon $x_{a_1},\ x_{a_1+1},\ \ldots,\ a_n$ aritmeettinen keskiarvo on $> X$. Jos $a_1 > 1$, on edelleen olemassa $a_2 < a_1$, niin että jonon $x_{a_2},\ x_{a_2+1},\ \ldots,\ x_{a_1-1}$ aritmeettinen keskiarvo on $> X$ jne. Täten jono $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ tulee ositetuksi paloiksi, joiden jokaisen aritmeettinen keskiaro on $> X$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että itse jonon aritmeettinen keskiarvo on X.

5. Jos k ja p ovat positiivisia kokonaislukuja, merkitään $[k]_p$:llä sitä yksikäsitteistä kokonaislukua välillä $[0,\ p-1]$, joka on $\equiv\ k \mod p$. Koska $(k)_{2n+1} = t(2n+1)$, missä $k-n \le t(2n+1) \le k+n$, $[k+n]_{2n+1} = k+n-t(2n+1)$ joten $(k)_{2n+1} = k+n-[k+n]_{2n+1}$. Siis $(k)_3 = k+1-[k+1]_3$, $(2k)_5 = 2k+2-[2k+2]_5$ ja $(3k)_7 = 3k+3-[3k+3]_7$ ja siis $f(k) = 6-([k+1]_3+[2k+2]_5+[3k+3]_7)$. Olkoot nyt a, b, c kokonaislukuja, joille pätee $0 \le a \le 2$, $0 \le\le 4$ ja $0 \le c \le 6$. Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} k+1 \equiv a \mod 3 \\ 2k+2 \equiv b \mod 5 \\ 3k+3 \equiv c \mod 7 \end{cases}$$

on yhtäpitävä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} k \equiv a-1 \mod 3 \\ k \equiv -2b-1 \mod 5 \\ k \equiv -2c-1 \mod 7 \end{cases}$$

kanssa. Kiinalaisen jäännöslukulauseen nojalla ryhmällä on ratkaisu kaikilla valinnoilla $(a,\ b,\ c)$. Mutta tämä merkitsee, että f saa kaikki arvot lukujen $6-0 = 6$ ja $6-(2+4+6) = -6$ väliltä.

6. Olkoot a_1 ja a_2, b_1 ja b_2 sekä c_1 ja c_2 kuution kolmella vastakkaisella sivutahkolla sijaitsevat luvut. Kysytty summa on $a_1b_1c_1 + a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1 + a_2b_2c_2 = (a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$. Koska $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, ja tulon tekijät ovat suurempia kuin 1, yksi tulon tekijöistä on 7, yksi on 11 ja kolmas on 13. Siis kysytty summa on $a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2 = 7+11+13 = 31$.

7. Olkoon X jokin tehtävässä mainittu joukko. Olkoot $m < n$ sen kaksi pienintä lukua. Koska $n = k^2m$ ja $k \in X$, niin $m \le k \le k^2 \le n$. Joko $k = m$ tai $k = n$, jolloin on oltava $k = m = n = 1$. Vain edellinen vaihtoehto on mahdollinen, joten $n = m^3$. Olkoon sitten p X:n kolmanneksi pienin luku, siis $n < p$. Nyt $p = k_1^2m$. Koska $m \le k_1 < p$ ja $k_1 \ne m$ (jos olisi $k_1 = m$, olisi $p = n$), on oltava $k_1 = n = m^3$ ja $p = m^7$. Edelleen X:ssä on luku k_2 niin, että $p = k_2^2n$ eli $m^7 = k_2^2m^3$. Siis $k_2 = m^2$. Mutta $m^2 \notin X$, joten tultiin ristiriitaan. Joukossa X ei siis ole kolmanneksi pienintä lkua, ja $X = \{m,\ m^3\}$. Kaikki muotoa $\{m,\ m^3\}$ olevat joukot selvästikin toteuttavat tehtävän ehdon.

8. Osoitetaan, että $f(n)$:llä voi n:n valinnasta riippuen olla mielivaltaisen monta alkutekijää. Ellei näin olisi, jollain arvolla $n = n_0$ luvulla $f(n) = k$ olisi mahdollisimman monta alkutekijää. Voidaan olettaa, että $n_0 = 0$ (tarpeen vaatiessa voidaan siirtyä tarkastelemaan polynomia $f(x - n_0)$). Koska $f(0) = k$, $f(tk^2) \equiv k \bmod k^2$. Siis kaikilla kokonaisluvuilla t $f(tk^2) = bk^2 + k = k(bk + 1)$. Luvuilla k ja $bk + 1$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Koska luvulla $f(tk^2)$ ei ole useampia alkutekijöitä kuin luvulla k, on oltava $bk + 1 = \pm 1$. Mutta silloin $f(tk^2)$:lla olisi vain kaksi mahdollista arvoa, mikä on mahdotonta, koska f on polynomi, joka ei ole vakio.

9. Oletetaan, että on olemassa tehtävän ehdon täyttävä joukko $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$, jolla ei ole mainitunlaista osajoukkoa. Voimme olettaa, että $a_{n-2} - a_{n-1}$ ei ole jaollinen n:llä. Olkoon $S_i = x_1 + \ldots + x_i$, $1 \le i \le n - 1$. Nyt jokainen S_i antaa n:llä jaettaessa eri jakojäännöksen. Jos nimittäin olisi $S_i \equiv S_j \bmod n$, $i < j$, niin joukon $\{x_{i+1}, \ldots x_j\}$ alkioiden summa olisi n:llä jaollinen. Olkoon sitten $S_n = S_{n-3} + a_{n-1}$. Sama päättely kuin edellä osoittaa, että $S_n \equiv S_j \bmod n$ ei ole mahdollista, jos $j \ne n - 2$, ja luvuista a_{n-2} ja a_{n-1} tehty oletus osoittaa, että ei myöskäään ole $S_n \equiv S_{n-1} \bmod n$. Summilla $S_1, S_2, \ldots, S_n$ on siis kaikilla eri jakojäännös $\bmod n$, joten jollain niistä jakojäännös on 0. Ristiriita, siis väite on oikea.

10. Osoitetaan, että tällaista jonoa ei ole. Jos sellainen olisi, niin olisi $p_3 > 3$. ($p_3 = 3$ tarkoittaisi $p_2 = 2$ ja $2p_1 = 1$ tai $2p_1 = 3$, kummatkin mahdottomia.) Silloin $p_3 \equiv 1 \bmod 3$ tai $\equiv 2 \bmod 3$. Oletetaan, että $p_3 \equiv 1 \bmod 3$. Koska $p_4 = 2p_3 \pm 1 > 3$, ja p_4 alkulukuna ei ole kolmella jaollinen, on oltava $p_4 = 2p_3 - 1$ ja $p_4 \equiv 1 \bmod 3$. Samoin jatkaen saadaan $p_j = 2p_{j-1} - 1 = 2(p_{j-1} - 1) + 1$, $j \ge 5$. Tästä seuraa $p_{n+1} - 1 = 2^{n-2}(p_3 - 1)$ kaikilla $n \ge 4$. Asetetaan nyt $n = p_3 + 1$. Silloin $p_{p_3+2} - 1 = 2^{p_3-1}(p_3 - 1)$. Fermat'n pienen lauseen nojalla $2^{p_3-1} \equiv 1 \bmod p_3$. Siis $p_{p_3+2} \equiv 0 \bmod p_3$. Tämä ei ole mahdollista, koska p_{p_3+2} ja p_3 ovat eri alkulukuja.

11. Osoitetaan, että näin voi tehdä, jos ja vain jos ainakin toinen luvuista m ja n on pariton. Todistetaan ensin "vain jos" -osa. Ajatellaan taulukko ruudukoksi, jossa ruutujen reunat ovat yksikköjanoja. Jos jokin jana rajaa kahta ruutua, joissa molemmissa on 0, poistetaan se. Kun kaikkiin ruutuihin on kirjoitettu 0, on täytynyt poistaa yhteensä $m(n-1) + n(m-1) = 2mn - m - n$ janaa. Toisaalta ruutuun, jossa on ollu $+1$ on voinut tulla 0 vasta sitten, kun siinä oleva luku on muuttunut -1:ksi. Luvun on pitänyt muuttaa merkkiään pariton määrä kertoja eli kerran tai kolmesti. Kaikkien ruutujen, joissa on -1 (paitsi ensimmäisen ruudun) ympärysruuduissa on siten pariton määrä nollia. Kun tällainen -1 muuttuu nollaksi, poistuu aina pariton määrä yksikköjanoja. Tästä seuraa, että poistettavien yksikköjanojen määrä on kongruentti alkuperäisessä ruudukossa olevien ykkösten lukumäärän kanssa. Siis $2mn - m - n \equiv mn - 1 \bmod 2$ eli $(m-1)(n-1) \cong 0 \bmod 2$. Luvuista $m - 1$ ja $n - 1$ ainakin toinen on parillinen.

Oletetaan sitten, että n, ruudukon sarakkeiden lukumäärä, on pariton. Oletaan, että -1 on i:nnellä rivillä. Nyt koko i:s rivi voidaan muuttaa nolliksi etenemällä ensimmäisestä -1:stä (tarvittaessa) vasemmalle ja oikealle. Samalla i:nnen rivin ylä- ja alapuoliset rivit (tai toinen, jos $i = 1$ tai $i = m$) muuttuvat kokonaan -1:ksi. Rivi, jossa on pelkkiä -1:siä pariton määrä saadaan nolliksi muuttamalla ensin parittomissa asemissa olevat

-1:t nolliksi. Välissä olevat parillisissa asemissa olevien ruutujen luvut vaihtavat jokainen merkkinsä kahdesti, joten ne ovat -1:siä ja poistettavissa. Rivin viereisen rivin ykköset muuttuvat tässä prosessissa -1:siksi. Sama voidan toistaa joka rivillä.

12. Merkitään tilannetta, jossa luku y on rivissä sillä paikalla, jossa suuruusjärjestyksen mukaan tulisi olla x, $x \to y$. Alkuaan jonossa voi olla tilanteita, *syklejä*, (1) $x \to x$, (2) $x \to y \to x$ tai (3) $\cdots \to x \to y \to z \to \cdots$, joissa on mukana kolme tai useampia lukuja. Lopputilanteessa on $2n$ sykliä $x \to x$. Syklit (1) ovat tavoiteltuja, jokaisesta (2)-syklistä päästään kahteen (1)-sykliin ensimmäiseen vaihtamalla x ja y keskenään. (3)-tyyppisissä Kolmannessa tilanteessa x:n, y:n ja z:n syklinen kierrätys vie ainakin x:n ja y:n omille paikoilleen, ja (1)-syklien määrä lisääntyy ainakin kahdella. Siirtoja tarvitaan siis enintään n kappaletta. Jos alkuperäinen järjestys on sellainen, että siinä on n (2)-sykliä (esimerkiksi) 2, 1, 4, 3, $\ldots$, $2n$, $2n-1$) tarvitaan tasan n siirtoa.

13. Jos yksi ja sama maa on edustettuna joka kokouksessa, voi muissa kokouksissa olla aina eri osajoukko muista 24:stä maasta. Osajoukkoja on $2^{24} = 16777216$ kappaletta, joten kokouksia voi olla ainakin niin monena päivänä. Neljäs sääntö ei salli, että kahdessa eri kokouksessa olisi edustettuina jotkin kaksi 25 jäsenmaan komplementaarista osajoukkoa. Kokouksien määrä voi siis olla enintään puolet 25 alkion joukon osajoukkojen määrästä, eli $\dfrac{1}{2} \cdot 2^{25} = 2^{24}$.

14. Osoitetaan, että tällainen strategia on olemassa täsmälleen silloin, kun $n = 4k + r$, missä $r = 0$, 1 tai 2, ja että kun $r = 3$, voittostrategia on toisella pelaajalla. Todistetaan väite induktiolla k:n suhteen. Jos $k = 1$, $r \le 2$, niin $4 \le n \le 6$. Ensimmäisen pelaaja, olkoon hän A, voi tehdä siirron, jonka jälkeen kasoja ei ole. Hän siis voittaa. Jos $r = 3$, $n = 7$. A:n siirron jälkeen jäljellä on tasan yksi kasa, jonka B voi hajottaa. Nyt B voittaa.

Käytetään hyväksi aputulosta: *Jos pelissä jollain hetkellä on tasan kaksi kasaa, joissa on* $4s+1$ *ja* $4t+1$ *pähkinää, missä* $t+s \le k$, *niin se pelaaja, joka siirtää toisena tämän tilanteen jälkeen, voittaa.* Jos $k = 1$, aputulos on triviaalisti tosi (ehtolause ei voi toteutua). Jos $k = 2$, on oltava $t = s = 1$ ja ensiksi siirtävä hajottaa kasoista toisen ja toiseksi siirtävä toisen.

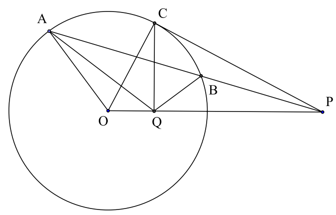
Oletetaan, että väite on tosi, kun pähkinöitä on aluksi $4k - 1$ ja että aputulos pätee, kun $s + t \le k$. Osoitetaan, että näillä edellytyksillä väite pätee, kun pähkinöitää on aluksi $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ tai $4k + 3$ ja että aputulos pätee, kun $s + t = k + 1$. Jos kasassa on $4k$, $4k + 1$ tai $4k + 2$ pähkinää, A muodostaa kasan, jossa on $4k - 1$ pähkinää. Induktio-oletuksen mukaan A nyt tässä tilanteessa toisena siirtäjänä, ja hänellä on voittostrategia. Oletetaan sitten, että kasassa on $4k + 3$ pähkinää. A:n siirron jälkeen tilanne on joko $(4p + 1, 4q + 2)$ tai $(4p, 4q + 3)$. Oletetaan ensimmäinen tilanne. Jos $p = 0$ tai $q = 0$, B voittaa induktio-oletuksen nojalla. Ellei näin ole, B:n siirto on yhden pähkinän poisto $4q+2$-kasasta. Silloin ollaan aputuloksen tilanteessa. Koska $p+q = k$, B voittaa. Oletetaan sitten, että A;n siirto on $(4p, 4q+3)$. Nyt B voi ottaa yhden pähkinän $4p$-kasasta. Tilanne on nyt $(4(p-1)+3, 4q+3)$. B voi soveltaa induktio-oletuksen mukaista voittostrategiaansa kumpaankin kasaan, ja voittaa.

On vielä osoitettava, että aputulos pätee, kun $s+t=k+1$. Siirtovuorossa olevan pelaajan siirron jälkeen tilanne on joko muotoa $(4s+1,\ 4p,\ 4q+1)$ tai $(4s+1,\ 4p+2,\ 4q+3)$. Edellisessä tapauksessa järjestyksessä toisen pelaajan siirto on yhden pähkinän poisto $4p$-kasasta. Induktio-oletuksen perusteella nyt järjestyksessä toisena siirtävä voittaa sekä tilanteen $(4s+1,\ 4q+1)$ että $(4p-1)$. Jälkimmäisessä tapauksessa seuraava siirto riippuu siitä, onko $p=0$ vai $p>1$. Jos $p=0$, pelaaja siirtää $(4q+3)\to(4q+1,\ 2)$ ja voittaa aputuloksen nojalla. Jos taas $p>0$, pelaaja siirtää $(4p+2)\to(4p+1,\ 1)$. Koska hän voittaa sekä lähtötilanteet $(4s+1,\ 4p+1)$ että $4q+3$, hän voittaa.

Oletetaan, että aputulos pätee, kun $t+s\le k$, $2\le 2$, ja oletetaan, että $t+s=k+1$. Ensimmäisen pelaajan siirto jakaa jommankumman kasan joukoiksi, joista toisessa on parillinen ja toisessa pariton määrä pähkinöitä. Oletaan ensin, että ensimmäistä siirtoa kuvaa $(4s+1,\ 4t+1)\to(4s+1,\ 4p,\ 4q+1)$.

15. Kirjoitetaan luvut 1, 2, ..., 13 järjestykseen **1**, 6, 11, **3**, 8, 13, **5**, 10, **2**, 7, 12, **4**, 9. Jokainen viiden askeleen hyppy on tässä jonossa siirtyminen viereiseen lukuun (tai ensimmäisestä viimeiseen tai viimeisestä ensimmäiseen. Koska kirput eivät voi olla samassa ruudussa, ne eivät tässä järjestyksessä voi ohittaa toisiaan. Jos kirput ovat lihavoitujen numeroiden kohdalla, ne ovat jossain järjestyksen A, C, E, B, D eli alkuperäisen asetelman kiertovaihtelussa.

16. Olkoon O ympyrän keskipiste. Suorakulmaisista kolmioista OQC ja OCP saadaan $OQ : OC = OC : OP$. Koska $OC = OA = OB$, $OQ : OA = OA : OP$, mistä seuraa, että kolmiot AOQ ja POA ovat yhdenmuotoiset (sks), ja samoin $QOB \sim BOP$. Koska OAB on tasakylkinen, $\angle OAB = \angle OBA = 180° - \angle OBP$. Lasketaan $\angle AQP + \angle BQP$:



$$\angle AQP + \angle BQP = (\angle AOQ + \angle AQO) + (\angle BOQ + \angle OBQ)$$
$$= (\angle AOQ + \angle APO) + (\angle BOQ + \angle BPQ) = (180° - \angle OAB) + (180° - \angle OBP) = 180°.$$

Kulmien $\angle AQP$ ja $\angle BQP$ keskiarvo on siis $90°$. Koska $\angle CQP = 90°$, QC on kulman $\angle AQB$ puolittaja.

17. Olkoot a, b, c ja d valittujen pisteiden etäisyydet sivujen keskipisteistä. Oletetaan, että a ja c ovat niillä sivuilla, joiden pituus on 3. Silloin

$$x^2+y^2+z^2+u^2=$$
$$\left(\frac{3}{2}-a\right)^2+\left(\frac{3}{2}+a\right)^2+\left(\frac{3}{2}-c\right)^2+\left(\frac{3}{2}+c\right)^2+(2+b)^2+(2-b)^2+(2+d)^2+(2-d)^2$$
$$=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+4\cdot 2^2+2(a^2+b^2+c^2+d^2)=25+2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

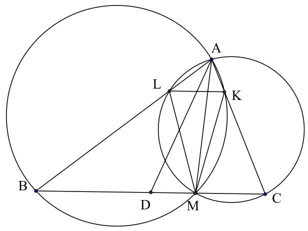
Nyt $0\le a,\ c<\frac{3}{2}$ ja $0\le b,\ d\le 2$. Kun ala- ja ylärajat sijoitetaan edellisen yhtälön oikealle puolelle, saadaan väite.

18. Harmonisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella

$$\frac{1}{AX}+\frac{1}{XY}\geq\frac{2}{\sqrt{AX\cdot XY}}.$$

Koska AY ja BC ovat kaksi kolmion ympärysympyrän jännettä ja ne leikkaavat pisteessä X, on $AX\cdot XY = BX\cdot XC$. Mutta $\sqrt{BX\cdot XC}\leq\frac{1}{2}(AX+XC)=\frac{1}{2}BC$. Väite saadaan kun epäyhtälöt yhdistetään.

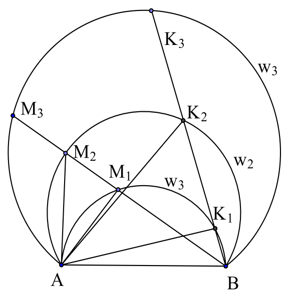
19. Väitteen todistamiseksi riittää, jos saadaan osoitetuksi, että $CK : LB = AC : AB$. Havaitaan. että kolmiot MBL ja MKC ovat yhdenmuotoisia kolmion ABC kanssa. Tämä seuraa siitä, että jännenelikulmiosta $ALMC$ saadaan $\angle BLM = \angle ACM$ ja jännenelikulmiosta $ABMK$ vastaavasti $\angle MKC = \angle ABC$. Nyt kolmiot MBL ja MKC ovat keskenäänkin yhdenmuotoiset. Siis todellakin



$$\frac{CK}{LB}=\frac{KM}{BM}=\frac{\dfrac{AM\sin(\angle KAM)}{\sin(\angle AKM)}}{\dfrac{AM\sin(\angle MAB)}{\sin(\angle MBA)}}=\frac{\sin(\angle KAM)}{\sin(\angle MAB)}=\frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle DAC)}$$
$$=\frac{\dfrac{BD\sin(\angle BDA)}{AB}}{\dfrac{CD\sin(\angle CDA)}{AC}}=\frac{AC}{AB}.$$

Yhtäläketjun toinen yhtäsuuruus seuraa sinilauseesta sobellettuna kolmioihin AKM ja ABM, kolmas siitä, että $\angle AKM = 180^\circ - \angle ABM$ (jännenelikulmio $ABMK$!), neljäs pisteen M määritelmästä, viides sinilauseesta sovellettuna kolmioihin ACD ja ABD ja viimeinen siitä, että D on sivun BC keskipiste.

20. Samaa jännettä vastaavina kehäkulmina $\angle BK_1A = \angle BM_1A$ ja $\angle BK_2A = \angle BM_2A$. Siis $AK_1K_2 \sim AM_1M_2$ (kk) ja



$$\frac{K_1K_2}{M_1M_2}=\frac{AK_2}{AM_2}.$$

Samoin perustein $AK_2K_3 \sim AM_2M_3$ ja

$$\frac{K_2K_3}{M_2M_3}=\frac{AK_2}{AM_2}.$$

Väite seuraa heti edellisistä kahdesta yhtälöstä.