f

# Vuosien 2000–08 Baltian tie -kilpailutehtävien ratkaisuja

**2002.1.** Koska $(x+y+z)^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz) = x^3+y^3+z^3+3xy^2+3x^2y+3y^2z+3yz^2+3x^2z+3xz^2+6xyz$, havaitaan, että kun tehtävän yhtälöiden vasemmista puolista kaksi ensimmäistä lasketaan yhteen ja viimeinen vähennetään, syntyy lauseke, joka on $(a+b-c)^3$. Jos vasemmista puolista ensimmäinen ja viimeinen lasketaan yhteen ja keskimmäinen vähennetään, syntyy lauseke $(a-b+c)^3$ ja kun kaksi viimeistä lasketaan yhteen ja ensimmäinen vähennetään, syntyy $(-a+b+c)^3$. Yhtälöiden oikeiisin puolista mainitut yhteen- ja vähennyslaskut tuottavat aina tuloksen 1. Koska yhtälön $x^3 = 1$ ainoa reaalilukuratkaisu on $x = 1$, alkuperäinen yhtälöryhmä implikoi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a+b-c=1 \\ a-b+c=1 \\ -a+b+c=1. \end{cases}$$

Helposti saadaan, että tämän ryhmän ratkaisu on $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Luvut toteuttavat myös tehtävän alkuperäisen yhtälöryhmän.

**2002.2.** Tehdään vastaoletus, jonka mukaan kukin luvuista $a$, $b$, $c$ ja $d$ on suurempi kuin $-1$. Olkoon $x = a+1$, $y = b+1$, $z = c+1$ ja $t = d+1$. Tehdyn oletuksen perusteella $x$, $y$, $z$ ja $t$ ovat positiivisia. Tehtävän ensimmäisestä yhtälöstä seuraa

$$x + y + z + t = 2. \tag{1}$$

Toisaalta $ab = (x-1)(y-1) = xy - x - y + 1$, $ac = xz - x - z + 1$ jne. Kaikkiaan tehtävän toinen yhtälö ja (1) antavat $0 = xy + xz + xt + yz + yt + zt - 3(x+y+z+t) + 6 = xy+xz+xt+yz+yt+zt$. Tämä on ristiriidassa $x$:n, $y$:n, $z$:n ja $t$:n positiivisuuden kanssa. Vastaoletus on väärä ja tehtävän väite tosi.

**2002.3.** Kun $m = n = 0$, saadaan $a_0 = 2a_0^2$. Siis joko $a_0 = \dfrac{1}{2}$ tai $a_0 = 0$. Tutkitaan ensin tapaus $a_0 = \dfrac{1}{2}$. Kun sijoitetaan $m = 1$, $n = 0$, saadaan $a_1 = a_1^2 + \dfrac{1}{4}$ eli $\left(a_1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$. Siis $a_1 = \dfrac{1}{2}$. Edelleen $a_2 = a_{1^2+1^2} = a_1^2 + a_1^2 = \dfrac{1}{2}$ ja $a_8 = 2a_2^2 = \dfrac{1}{2}$. Induktiivisesti päätellään, että on mielivaltaisen suuria kakkosen potensseja $2^j$, joille $a_{2^j} = \dfrac{1}{2}$. Koska jono $(a_n)$ on monotoninen, $a_n = \dfrac{1}{2}$ kaikilla $n$.

Oletetaan sitten, että $a_0 = 0$. Jonon palautuskaava arvoilla $m = 1$, $n = 0$ antaa $a_1 = a_1^2$. Siis $a_1 = 0$ tai $a_1 = 1$. Jos nyt $a_1 = 0$, saadaan samoin kuin edellä, että $a_{2^j} = 0$ mielivaltaisen suurilla $j$. Monotonisuuden perusteella $a_n = 0$ kaikilla $n$. Jos taas $a_1 = 1$, niin $a_2 = 2a_1^2 = 2$, $a_4 = a_2^2 + a_0^2 = 4$ ja $a_5 = a_2^2 + a_1^2 = 5$. Edelleen $a_3^2 + a_4^2 = a_{25} = a_5^2 + a_0^2 = 25$. Siis $a_3^2 = 25 - 16 = 9$ ja $a_3 = 3$. Vielä $a_8 = 2a_2^2 = 8$, $a_9 = a_3^2 + a_0^2 = 9$ ja $a_{10} = a_3^2 + a_1^2 = 10$. Yhtälöt $a_6^2 + a_8^2 = a_{10}^2 + a_0^2 = 100$ ja $a_7^2 + a_1^2 = 2a_5^2 = 50$ puolestaan antavat $a_8 = 8$ ja $a_7 = 7$. Yhtälöiden $(2k+1)^2 + (k-2)^2 = (2k-1)^2 + (k+2)^2$ ja $(2k+2)^2 + (k-4)^2 = (2k-2)^2 + (k+4)^2$ avulla voidaan $a_n = n$ nyt perustella induktiolla todeksi kaikilla $n$.

Tehtävällä on siis kolme ratkaisua: vakiojonot $a_n = 0$ ja $a_n = \dfrac{1}{2}$ kaikilla $n$ sekä jono $a_n = n$ kaikilla $n$.

**2002.4.** Kun sulkeet avataan ja otetaan huomioon ehto $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, saadaan alkuperäisen epäyhtälöön kanssa yhtäpitävä epäyhtälö

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

Epäyhtälöän vasen puoli on sama kuin

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2-\frac{2}{n}-x_i\right)\left(x_i-\frac{1}{n}\right)$$

ja siis ei-negatiivinen.

**2002.5.** Kun tehtävän yhtälö neliöidään, saadaan $a+b+2\sqrt{ab}=2+\sqrt{3}$. Siis $2\sqrt{ab}=c+\sqrt{3}$, missä $c$ on jokin rationaaliluku. Mutta $4ab=c^2+2c\sqrt{3}+3$. Mutta tämä merkitsee, että $c\sqrt{3}$ on rationaaliluku. Koska $\sqrt{3}$ on irrationaalinen, on oltava $c=0$. Siis $4ab=3$ eli $ab=\frac{3}{4}$ ja $a+b=2$. Kun näistä ratkaistaan $a$ ja $b$, saadaan kaksi ratkaisua $(a,\,b)=\left(\frac{1}{2},\,\frac{3}{2}\right)$ ja $(a,\,b)=\left(\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}\right)$.

**2002.6.** Tarkastellaan mielivaltaista vaakariviä, joka ei ole se rivi, jolla torni alkujaan oli. Aina kun torni saapuu tämän rivin ruutuun, se jatkaa rivin toiseen ruutuun ja poistuu riviltä. Jokaisella käynnillä torni käyttää siis kaksi rivin ruutua. Jos torni käy kaikissa ruuduissa tasan kerran, rivillä on oltava pariton määrä ruutuja. Täsmälleen samalla tavalla nähdään, että sarakkeissa on parillinen määrä ruutuja. Osoitetaan sitten, että aina, kun $m$ ja $n$ ovat molemmat parillisia, $m=2p$, $n=2q$, vaadittu tornin kulku on mahdollinen. Numeroidaan rivit ylhäältä alas 1:stä $2p$:hen ja sarakkeet vasemmalta oikealle 1:stä $2q$:hun ja merkitään $i$:nnen rivin $j$:ttä ruutua $(i,\,j)$. Siirrot $(p+1,\,1)\to(1,\,1)\to(1,\,2q)\to(2p,\,2q)\to(2p,\,1)\to(2,\,1)\to\cdots\to(p,\,1)$ kattavat kaikki ensimmäisen ja viimeisen sarakkeen ruudut lukuun ottamatta ruutuja $(p,\,2q)$ ja $(p+1,\,2q)$. Tehdään seuraavaksi siirto $(p,\,1)\to(p,\,2q-1)$ ja samanlainen "reunojen kierto" kuin edellä, kunnes tullaan ruutuun $(p+1,\,2q-1)$. Tämä vaihe peittää kaikki sarakkeiden 2 ja $2q-1$ ruudut lukuun ottamatta ruutuja $(p,\,2)$ ja $(p+1,\,2)$. Toistamalla vaiheita tullaan lopulta tilanteeseen, jossa torni on ruudussa $(p+1,\,q+1)$ ja kaikki muut ruudut kuin ruudut $(p,\,2j)$, $(p+1,\,2j)$, $j=1,\,2,\,\ldots,\,q$, on käyty. Loput ruudut on helppo käydä läpi ja päätyä lähtöruutuun. Seuraava taulukko $6\times 8$-laudasta, jossa numerointi osoittaa siirtojärjestyksen (1 on aloitus- ja lopetusruutu), havainnollistaa metodin (ensimmäisen vaiheen jälkeen tyhjiksi jääneet ruudut on merkitty pienemmin numeroin).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 14 | 22 | 34 | 35 | 23 | 15 | 3 |
| 6 | 18 | 26 | 38 | 39 | 27 | 19 | 7 |
| 10 | 46 | 30 | 42 | 31 | 43 | 11 | 47 |
| 1 | 45 | 21 | 41 | 40 | 44 | 20 | 48 |
| 9 | 17 | 29 | 37 | 36 | 28 | 16 | 8 |
| 5 | 13 | 25 | 33 | 32 | 24 | 12 | 4 |

**2002.7.** Osoitetaan, etä kysytty enimmäismäärä on $4n^2-4n+2$. Tämän voi todistaa induktiolla. Jotta ei tarvitsisi arvaata lauseketta $4n^2-4n+2$, johdetaan se. Oletetaan, että $k$ nelikulmiota $Q_1,\,Q_2,\,\ldots,\,Q_k$ jakaa tason $a_k$:ksi alueeksi. Voidaan vielä olettaa, että mikään nelikulmion kärki ei ole toisen nelikulmion sivulla (jos näin on, voidaan nelikulmiota hiukan suurentaa, niin että sivulla sijainnut kärki tulee sellaiselle puolelle toisen nelikulmion sivua, että syntyneiden alueiden lukumäärä kasvaa, mutta muut kärjet eivät siirry niin, että alueiden määrä toisaalta vähenisi). Kun piirretään uusi nelikulmio $Q_{k+1}$, niin kuperuuden vuoksi sen kukin sivu kohtaa enintään kaksi monikulmion $Q_j$ sivua. $Q_{k+1}$:n sivut jakautuvat enintään $2k+1$:ksi janaksi, joista jokainen kasvattaa alueiden määrää yhdellä. Jos kuitenkin $Q_{k+1}$:n sivu leikkaa kaikkien nelikulmioiden $Q_j$, $j \le k$, sivut kahdesti, sivun päätepiste on kaikkien näiden nelikulmioiden ulkopuolella ja päätepisteeseen liittyvät kaksi viereisten sivujen osaa tuottavat vain yhden uuden alueen. Näin ollen $Q_{k+1}$:n piirtäminen tuottaa uusia alueita enintään $4(2k+1) - 4 = 8k$ kappaletta. Siis $a_{k+1} - a_k \le 8k$. Tarkastelemalla ympyrän sisään piirrettyjä neliöitä huomaa helposti, että $a_{k+1} = a_k + 8k$ on mahdollista. Jos nyt annamme $a_k$:n tarkoittaa maksimaalista alueiden määrää, todetaan, että $a_k$ toteuttaa lineaarisen differenssiyhtälön $a_{k+1} - a_k = 8k$, $a_1 = 2$. Yhtälön ratkaisemiseksi sijoitetaan $a_k = Ak^2 + Bk + C$. Kertoimet toteuttavat ehdot $2Ak + A + B = 8k$, kaikilla $k$ sekä $A + B + C = 2$. Ensimmäisestä ehdosta seuraa $A = 4$ ja $B = -4$, viimeisestä $C = 2$. Siis $a_n = 4n^2 - 4n + 2$.

**2002.8.** Kun $n = 3$, kolmioita on yksi. Osoitetaan, että kun $n \ge 4$, niin joukko $T$ voidaan valita $n$:llä ei tavalla. Kun $X \in P$, merkitään $T_X$:llä kaikkien niiden kolmioiden joukkoa, joiden kärjet ovat joukossa $P$ ja joiden yksi kärki on $X$. Joukossa $T_X$ on $\binom{n-1}{2}$ alkiota ja jokaisella $T_X$:n kolmiolla, esimerkiksi $XAB$, on ainakin yksi sivu, $AB$, joka ei ole minkään muun $T_X$:ään kuuluvan kolmion sivu. Jos $X \ne Y$, $T_X \ne T_Y$ (koska $n \ge 4$, on olemassa $X$:stä ja $Y$:stä eroavat $A$, $B \in P$ ja kolmio $XAB$ ei kuulu joukkoon $T_Y$). Osoitetaan, että jokainen tehtävässä määritellyistä joukoista $T$ on $T_X$ jollakin $X \in P$. Olkoon siis $T = \left\{ t_i \,|\, i = 1, 2, \ldots \binom{n-1}{2} \right\}$ tällainen joukko ja olkoon $S = \left\{ s_i \,|\, i = 1, 2, \ldots \binom{n-1}{2} \right\}$ niiden joukkoon $T$ kuuluvien kolmioiden sivujen joukko, joille $s_i$ on $t_i$:n sivu, muttei $t_j$:n sivu, kun $i \ne j$. Olkoon $C$ kaikkien sellaisetn kolmioiden jouko, joiden kärjet ovat joukossa $P$. Joukossa $C$ on $\binom{n}{3}$ kolmiota ja joukossa $C \setminus T$ $\binom{n}{3} - \binom{n-1}{2} = \binom{n-1}{3}$ kolmiota. Olkoon nyt $m$ sellaisten parien $(s, t)$ lukumäärä, missä $s \in S$ on jonkin kolmion $t \in C \setminus T$ sivu. Tällaisen kolmion kolmas kärki voi olla mikä hyvänsä muu $P$:n piste kuin sen $T$:hen kuuluvan kolmion kärki, jonka sivu $s$ on. Siis

$$m = (n-3) \cdot \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)!(n-3)}{2!(n-3)!} = \frac{3 \cdot (n-1)!}{3!(n-4)!} = 3 \cdot \binom{n-1}{3}.$$

Tästä seuraa, että jokaisen $C \setminus T$:n kolmion kaikki sivut kuuluvat joukkoon $S$.

**2002.9.** Menettelytapoja on useita. Yksi mahdollisuus: Oletetaan, että katsojien valitsemat numerot ovat $x_1$, $x_2$ ja $x_3$. Jaetaan joukko $\{1, 2, \ldots, 96\}$ neljäksi yhtä suureksi osajoukoksi $S_1 = \{1, 2, \ldots, 24\}$, $S_2 = \{25, 26, \ldots, 48\}$, $S_3 = \{49, 50, \ldots, 72\}$ ja $S_4 = \{73, 74, \ldots, 96\}$. Ainakin yksi joukoista, sanokaamme $S$, on sellainen, että mikään luvuista $x_k$ ei kuulu $S$:ään. Jaetaan $S$ kuudeksi osajoukoksi, niin että $S$:n ensimmäiset neljä lukua ovat $S_1$:ssä. seuraavat neljä $S_2$:ssa jne. Numeroidaan lukujen $x_k$ kuusi eri mahdollista järjestystä: jos $x_1 < x <_2 < x_3$, $i = 1$, jos $x_1 < x_3 < x_2$ $i = 2$, $\ldots$, jos $x_3 < x_2 < x_1$ $i = 6$. Olkoon vielä $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ niiden lukujen $x_k$ lukumäärä, jotka ovat suurempia kuin kaikki $S$:n alkiot. Nähtyään luvut $x_k$ toinen taikuri valitsee luvun

$x_4$ joukosta $S_i$ niin, että $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv j \mod 4$. Kun ensimmäinen taikuri näkee kortit, joissa on luvut $a$, $b$, $c$ ja $d$, hän laskee summan $a+b+c+d \mod 4$. Jos tulos on $x$, hän tietää, että $x$ suurinta korttia ovat katsojien valitsemia ja naitä seuraavaksi pienempi kuuluu joukon $S$ osajoukkoon $S_y$. Osajoukko kertoo, missä järjestyksessä katsojat olivat valinneet kortit.

**2002.10.** Pienin vaadittu $N$ on 11. Jos nimittäin $N = 11$, toinen pelaaja voi poistaa lukuja alkaen pinimmistä, kunnes jäljelle jääneiden lukujen summa on vähemmän kuin 212. Jos suurin poistettu luku oli $\leq 23$, niin jäljelle jääneiden lukujen summa on ainakin $212 - 23 = 189 = 200 - N$. Jos viimeinen poistettu luku oli 24 tai 25, niin jäljellä on vain lukuja 24 ja 25. Näitä lukuja on silloin tasan kahdeksan, sillä niiden summa on $< 212$ mutta $\geq 212 - 25 = 187$. Jäljelle jääneiden lukujen summa $S$ toteuttaa siis epäyhtälöt $8 \cdot 24 = 192 \leq S \leq 200 = 8 \cdot 25$.

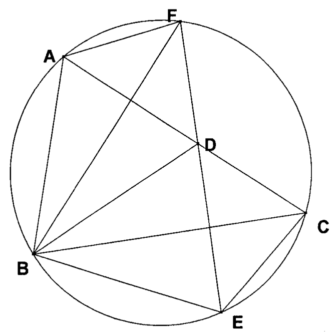
Oletetaan, että piste $A$ on liitetty 12 pisteeseen. Olkoot $B_1$, $B_2$, …, $B_{12}$ nämä pisteet järjestyksessä positiiviseen kiertosuuntaan. Kulmista $\angle B_1AB_3$, $\angle B_3AB_5$, …, $\angle B_{11}AB_1$ ainakin yksi on $\leq 60°$. Olkoon se $\angle B_1AB_3$. Silloin kulmat $\angle B_1AB_2$ ja $\angle B_2AB_3$ ovat myös alle $60°$. Janoista $AB_i$, $i = 1, 2, 3$, jokin on pisin; olkoon se $AD$. Silloin janaa $AD$ ei ole piirretty $A$:sta vaan $D$:stä. Olkoot muut kaksi janaa $AB_i$ $AB$ ja $AC$. Kosinilauseen perusteella $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) < AD^2 + AB^2(1 - 2\cos(\angle BAD) \leq AD^2$, koska $\cos(\angle BAD) \geq \dfrac{1}{2}$. Siis $BD < AD$. Samoin osoitetaan, että $CD < AD$. Näin ollen $A$ ei ole kahden $D$:tä lähimmän pisteen joukossa. $D$:stä ei ole piirretty janaa $A$:han. Ristiriita!

**2002.12.** Olkoon $S = \{A, B, C, D\}$. Voidaan olettaa, että mikään $S$:n kahden pisteen välisistä janoista ei ole pidempi kuin $AB$. Jos pisteeksi $X$ valitaan $A$, on valittava $Y = B$ (jos olisi esimerkiksi $Y = C$, olisi $AC = AB + AD > AB$). Siis $AB = AC + AD$. Samoin, jos valitaan $X = B$, on valittava $Y = A$, joten $AB = BC + BD$. Kaikkiaan siis

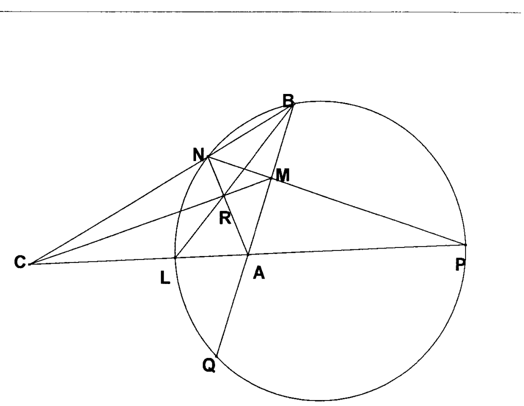
$$2 \cdot AB = AC + AD + BC + BD. \tag{1}$$

Toisaalta kolmioepäyhtälön perusteella $AB \leq AC + BC$ ja $AB \leq AD + BD$. Elleivät kaikki pisteet ole samalla suoralla, näistä epäyhtälöistä ainakin toinen on aito. Tällöin olisi siis $2 \cdot AB < AC + BC + AD + BD$, mikä olisi ristiriidassa yhtälön (1) kanssa.

**2002.13.** Olkoon $E \neq A$ sellainen kolmoin $ABC$ ympäri piirretyn mpyrän piste, että $BE = BA$. Piirretään $E$:n kautta sivua $BC$ vastaan kohtisuora suora. Se leikkaa $AC$:n pisteessä $D$. Koska $BE = BA$, $\angle BCA = \angle BCE$. $CB$ on siis kolmion $CDE$ kulman puolittaja ja korkeussuora. Siis $CDE$ on tasakylkinen. Tästä seuraa, että myös kolmio $BED$ on tasakylkinen. Siis $BD = BE = BA = BD$. Mutta tämä merkitsee, että $D = D$, ja $F$, $D$ ja $E$ ovat samalla suoralla. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle FAC = \angle FEC$. Koska $FE \perp BC$, $90° = \angle BCE + \angle FEC = \angle FAC + \angle AFB$. Mutta tama osoittaa, että $AC \perp FB$.



**2002.14.** Leikatkoot $MN$ ja $AC$ pisteessä $P$. Oletuksen mukaan $\angle PLB = \angle PNB$. Pisteet $P$, $L$, $N$ ja $B$ ovat siis samalla ympyrällä $\Gamma$. Tehtävän väitteen todistamiseksi riittaa, että osoitetaan $PL$ tämän ympyrän halkaisijaksi. Leikatkoon $BA$ $\Gamma$:n myös pisteessä $Q$. Koska $BL$ puolittaa $\angle ABC$:n, $\angle QPL = \angle QBL = \angle LBN = \angle LPN$. $PL$ puolittaa siis $\angle NPQ$:n. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan $PQ = PN$. Kolmiot $PAQ$ ja $BAL$ ovat yhdenmuotoiset. Siis




$$\frac{PQ}{PA} = \frac{BL}{BA}. \qquad (1)$$

Myös kolmiot $NPC$ ja $LBC$ ovat yhdenmuotoiset. Siis

$$\frac{PN}{PC} = \frac{BL}{BC}. \qquad (2)$$

Koska $BL$ on kulman $ABC$ puolittaja,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{CL}. \qquad (3)$$

Kun yhtälöt (1), (2) ja (3) yhdistetään, saadaan

$$\frac{PN}{PQ} = \frac{AL}{AP} \cdot \frac{CP}{CL}.$$

On osoitettava, että tämän yhtälön vasen puoli on 1. Jos $R$ on janojen $CM$ ja $AN$ leikkauspiste (joka oletuksen mukaan on myös janalla $BL$, niin ns. täydellisiä nelikulmiota koskevan tuloksen mukaan puolisuorat $BN$, $BS$, $BM$ ja $NM$ leikaavat suoran $AC$ ns. harmonisessa pisteistössä (ks. esim. M. Lehtisen geometrian luentoja, lause 8.3.1.) Väite seuraa tästä.

**2002.15.** Oletetaan, että hämähäkki on kuution särmän keskipisteessä. Jos kärpänen on vastakkaisen särmän keskipisteessä, hämähäkin ja kärpäsen minimietäisyys pitkin kuution sivuja on 2. Jos kärpänen siirtyy keskipisteestä matkan $s$ särmää pitkin, niin hämähäkin ja kärpäsen minimietäisyys on pienempi luvuista $\sqrt{s^2+4}$ ja $\sqrt{\frac{9}{4}+\left(\frac{3}{2}-s\right)^2}$. Kun $s > 0$ ja $\left(\frac{3}{2}-s\right)^2 > \frac{7}{4}$ eli $s < \frac{1}{2}(3-\sqrt{7})$, etäisyys on suurempi kuin 2. Vastakkainen kuution pinnan piste ei aina ole kärpäselle edullisin.

**2002.16.** Selvästi $a_0 = 5$, $a_1 = 65 = 5 \cdot 13$ ja $a_2 = 1025 = 5^2 \cdot 41$. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Vastaoletus: $m \geq 3$ ja $a_m = 4^{2m+1} + 1$ on jaollinen vain kahdella eri alkuluvulla. Toisen näistä on oltava 5. Koska

$$a_m = (2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)(2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1)$$

tässä $a_m$:n molemmat tekijät ovat parittomia, mutta tekijöiden erotus on kakkosen potenssi, tekijöiden suurin yhteinen tekijä on 1. Tekijöistä toinen on siis 5:n potenssi. Siis joko $2^{m+1}(2^m + 1) = 5^t - 1$ tai $2^{m+1}(2^m - 1) = 5^t - 1$ jollain $t$. Mutta $5^t - 1 = 4(5^{t-1} + 5^{t-2} + \cdots + 5 + 1)$. Jos $t$ on pariton, $5^t - 1$ ei ole jaollinen 8:lla eikä siis $2^{m+1}$:llä. Siis $t = 2u$ jollain $u$ ja $2^{m+1}(2^m \pm 1) = (5^u + 1)(5^u - 1)$. Mutta $5^u + 1 \equiv 2 \mod 4$. Siis $5^u - 1 = 2^m k$, missä $k$ on pariton. Toisalta $5^u + 1 = 2^m k + 2$ on luvun $2(2^m \pm 1)$ tekijä ja $2^{m-1}k + 1$ on luvun $2^m \pm 1$ tekijä. Tämä on mahdollista vain, jos $k = 1$. Koska $2^{m-1} + 1 < 2^m \pm 1 < 2(2^{m-1} + 1)$, tullaan ristiriitaan: luku ei voi olla pienempi kuin kaksi kertaa sen aito tekijä.

**2002.17.** Binomikertoimien perusominaisuuden perusteella

$$\binom{n+i}{2002} - \binom{n}{2002} = \binom{n}{2001}.$$

Tarkastellaan kokonaislukujonoa $(x_k)$, jonka erotusjono $(d_k) = (x_{k+1} - x_k)$ on jaksollinen mod $p$. Osoitetaan, että tällöin myös $(x_k)$ on jaksollinen mod $p$. Olkoon $t$ jonon $(d_k)$ jakso. Olkoon $h$ pienin positiivvvinen kokonaisluku, jolle $h(x_t - x_0) \equiv 0 \mod p$. Nyt jonon $(d_k)$ jaksollisuuden perusteella

$$x_{k+ht} = x_0 + \sum_{j=0}^{k+ht-1} d_j \equiv x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} d_j + h\sum_{j=0}^{t-1} d_j = x_k + h(x_t - x_0) \equiv x_k \mod p.$$

Jono $(x_k)$ on siis jaksollinen modulo $p$. Nyt siitä, että jono binomikertoiminen $\binom{k}{1} = k$ jono on jaksollinen $\mod p$ mielivaltaisella $p$ ja siitä, että binomikertoimien $\binom{n}{k}$, $n = k, k+1, \ldots$ jonon erotusjono on jono $\binom{n}{k-1}$, seuraa induktiolla, että jokainen binomikerroinjono $\binom{n}{k}$, $n = k, k+1, \ldots$ on jaksollinen $\mod p$ mielivaltaisella $p$.

**2002.18.** Osoitetaan, että vain luvulla $n = 2$ on tehtävässä vaadittu ominaisuus. Koska $2^6 - 1 = 63$, $(2^3 - 1)(2^2 - 1) = 21$, 2:lla on vaadittu ominaisuus. Oletetaan, että $n > 2$ on luku, jolla on tehtävässä mainittu ominaisuus. Koska $n^6 - 1 = (n^2 - n + 1)(n + 1)(n^3 - 1)$, luku $n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$ on pariton. Sillä on jokin pariton alkutekijä $p$. Koska $p|(n^3+1)$ $p$ ei ole luvun $n^3 - 1$ tekijä. Siis $p|(n^2 - 1)$ ja $p$ on myös luvun $n^3 + 1 + n^2 - 1 = n^2(n+1)$ tekijä. Koska $p$ ei ole $n$:n tekijä, $p|(n + 1)$. Mutta $p$ on myös luvun $(n^2 - 1) - (n^2 - n + 1) = n - 2$ tekijä. Alkuluku, joka on lukujen $n + 1$ ja $n - 2$ tekijä, on 3. On osoitettu, että jokainen $n^2 - n + 1$:n alkutekijä on 3. Siis $n^2 - n + 1 = 3^r$ jollain $r$. Koska $n$n toisen asteen yhtälön $n^2 - n + 1 - 3^r$ kokonaislukuratkaisu, yhtälön diskriminantti $1 - 4(1 - 3^r) = 3(4 \cdot 3^{r-1} - 1)$. on neliöluku. Jos olisi $r \geq 2$, jälkimmäinen tekijä olisi kolmella jaoton. Siis $r = 1$, joten $n^2 - n = 2$. Tämä on mahdotonta, kun $n > 2$.

**2002.19.** Oletetaan, että yhtälöllä olisi rationaalilukuratkaisu $x = \dfrac{p}{q}$, $y = \dfrac{r}{s}$. Oletetaan vielä, että $p$:n ja $q$:n suurin yhteinen tekijä on 1, samoin $r$:n ja $s$:n. Yhtäläö

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{r}{s} + \frac{s}{r} = 3n$$

on yhtäpitävä yhtälön

$$(p^2 + q^2)rs + (r^2 + s^2)pq = 3npqrs$$

kanssa. Päätellään, että $rs|(r^2 + s^2)pq$. Jos $rs$:llä ja $(r^2 + s^2)$:lla olisi yhteinen tekijä $d$, se olisi joko $r$:n tai $s$:n tekijä; jos $d$ olisi $r$:n ja $s^2 + r^2$:n tekijä, se olisi $s$:n tekijä, mutta $r$:llä ja $s$:llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Siis $rs|pq$. Samoin osoitetaan, että $pq|rs$. Siis $pq = rs$. Nyt $pq = rs$ joko on tai ei ole jaollinen 3:lla. Lukujen $p$, $q$, $r$, $s$ joukossa on sis kaksi tai ei yhtään kolmella jaollista lukua. Mutta

$$(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)rs = 3(rs)^2$$

ja $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 3nrs$. Koska $x^2 \equiv 1 \mod 3$, jos $x$ ei ole jaollinen kolmella, $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 \equiv 1$ tai $\equiv 2 \mod 3$. Risitiriita. Siis yhtälöllä ei ole rationaalisisia ratkaisuja.

**2002.20.** Jos $(a_1 + dk)$ on mielivaltainen aritmeettinen jono ja $m = \max\{a_1, d\}$, niin $\dfrac{1}{a_1 + dk} \ge \dfrac{1}{m(1+k)}$. Koska harmoninen sarja hajaantuu, hajaantuu myös aritmeettisen sarjan termien käänteisluvuista muodostettu sarja. Toisaalta

$$\sum k = 2^{\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{\dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}} = \frac{1}{x(1-x)}$$

Tästä seuraa, että jos tehtävässä esiintyvä sarja olisi olemassa, sen termien käänteislukujen summa ei olisi suurempi kuin

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots = 2,$$

Ristiriita, sis tehtävässä ehdotettua aritmeetista jonoa ei ole olemassa.