Baltian Tie 2001 – ratkaisuja

1. Olkoot tehtävät T_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Eräs mahdollisuus jakaa tehtävät kahdeksalle opiskelijalle O_j, $j = 1, 2, \ldots, 8$ on oheisessa taulukossa

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
O_1	$\times$	$\times$	$\times$					
O_2	$\times$			$\times$	$\times$			
O_3	$\times$					$\times$	$\times$	
O_4		$\times$		$\times$			$\times$	
O_5		$\times$				$\times$		$\times$
O_6			$\times$	$\times$				$\times$
O_7			$\times$		$\times$	$\times$		
O_8					$\times$		$\times$	$\times$

Koska taulukossa ei ole yhtään suorakaidetta, jonka joka kärjessä olisi $\times$, yksikään opiskelija ei saa kahta samaa tehtävää jonkin toisen kanssa. Opiskelijoita voi siis olla ainakin kahdeksan. Oletetaan, etä jokin tehtävä olisi annettu neljälle eri opiskelijalle. Tällöin kukin heistä tarvitsisi kaksi muuta tehtävää. Tehtäviä pitäisi siis olla ainakin yhdeksän. Mitään tehtävää ei siis voi antaa useammalle kuin kolmelle opiskelijalle. Yksittäin laskien tehtäviä ei siis voi antaa kuin 24 kappaletta. Mutta koska jokainen opiskelija saa kolme tehtävää, opiskelijoita ei voi olla enempää kuin kahdeksan.

2. Olkoon A_1 niiden positiivisten kokonaislukujen joukko, joiden nollasta eroavat numerot ovat lopusta alkaen paikoissa 1, n+1, 2n+1, jne., A_2 niiden positiivisten kokonaislukujen joukko, joiden nollasta eroavat numerot ovat lopusta alkaen paikoissa 2, n+2, 2n+2, jne., ja viimein A_n niiden positiivisten kokonaislukujen joukko, joiden nollasta eroavat numerot ovat lopusta alkaen paikoissa n, $2n$, jne. Jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan lausua yksikäsitteisesti n:n luvun summana, jonka jokainen yhteenlaskettava kuuluu eri joukkoon A_i, $1 \le i \le n$.

3. Koska $A + B$ on kaikkien sarakesummien ja kaikkien rivisummien summa, niin $A + B$ on kaksi kertaa koko ruudukon lukujen summa. Jos olisi $A = B$, olisi siis

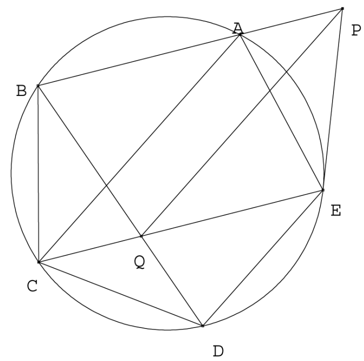
$$2B = 2\sum_{k=1}^{49} = 50 \cdot 49.$$

Tästä seuraisi, että B on pariton. Toisaalta B on parillisten lukujen summa ja siis parillinen. $A = B$ ei siis ole mahdollista.

4. Tarkastetaan janaa, jonka päätepisteet ovat $(0, 0)$ ja (q, p) ja koordinaattiakselien suuntaista suorakaidetta, jonka lävistäjä tämä jana on. Suoran, jolla se on, yhtälö on $y = \dfrac{p}{q}x$. Koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä janalla ei ole yhtään kokonaislukukoordinaattista pistettä. Pisteen $\left(k, \dfrac{pk}{q}\right)$ alapuolella on $\left\lfloor \dfrac{pk}{q} \right\rfloor$ kokonaislukukoordinaatista suorakaiteen pistettä. Lävistäjän alapuolella on kaikkiaan tasan puolet suorakaiteen kokonaislukukoordinaattista pisteistä, eli $\dfrac{1}{2}(p-1)(q-1)$ pistettä.

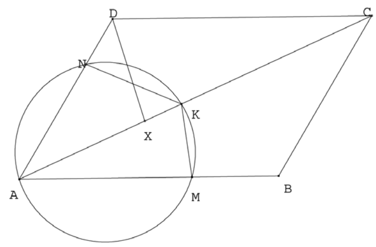
5. Numeroidaan pisteet 1:stä 2001:een niin, että vierekkäisillä pisteillä on vierekkäiset numerot. Tarkastellaan numerointia tarpeen vaatiessa mod 2001. Sanomme, että k pistettä muodostaa yksivärisen k-jonon, jos ne ovat vierekkäin ja ovat samanvärisiä. Olkoon $d(F)$ värityksen F suurin k, jolla värityksessä on yksivärinen k-jono. Koska 2001 on pariton, $d(F) \geq 2$ kaikille värityksille F. Jos $d(F_1) = 2001$, pisteet ovat samanvärisiä, ja $F_1 = F_2 = \ldots$. Tällöin $n_0 = 1$ kelpaa n_0:ksi. Oletetaan siis, että $1 < d(F_1) < 2001$. Jos $d(F_n) = 2$ jollakin n, niin F_{n+1} saadaan F_n:stä vaihtamalla kaikkien pisteiden väri. Silloin $F_{n+2} = F_n$ ja $F_{k+2} = F(k)$ kaikilla $k \geq n$. Olkoon nyt $d(F_n) = k \geq 3$ ja olkoon $(i+1, i+2, \ldots, i+k)$ yksivärinen k-jono. Silloin $(i+2, i+3, \ldots, i+k-1)$ on F_{n+1}:n yksivärinen k-jono. Siis $d(F_{n+1}) \geq d(F_n)-2$. Toisaalta, jos $k \geq 3$, ja $(i+1, i+2, \ldots, i+k)$ on F_{n+1}:n pisin yksivärinen k-jono, niin $(i, i+1, \ldots, i+k+1)$ on F_n:n yksivärinen $(k+2)$-jono. Siis $d(F_n) \geq d(F_{n+1} - 2$. Kaikkiaan siis $d(F_{n+1} = d(F_n) - 2$, jos $3 < d(F_n) < 2001$. Eri mahdollisuudet läpikäymällä toteaa helposti, että jos $d(F_n) = 3$, niin $d(F_{n+1}) = 2$. Edellä sanotusta seuraa, että $d(F_{1000}) = 2$, joten $F_{n+2} = F_n$ kaikilla $n \geq 1000$. Jos erityisesti $d(F_1) = 2000$ (vain yksi piste muista poikkeavasti väritetty), niin $d(F_k) > 2$, kun $k < 1000$ ja $d(F_{1000}) = 2$. Luku 999 ei siis kelpaa luvuksi n_0.

6. Yhdensuuntaiset suorat leikkaavat ympyrän niin, etä leikkauspisteitä yhdistävät jänteet ovat yhtä pitkät. Siis $BC = AE = CD$. Koska EP on ympyrän c tangentti, niin kehäkulmalauseen nojalla $\angle CAD = \angle PEC$. Jännenelikulmion kulma ja vastaisen kulman vieruskulma ovat yhtä suuret, Siis $\angle BCE = \angle PAE$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot BCQ ja EAP ovat yhteneviä (ksk). Siis erityisesti $CQ = AP$. Mutta nyt nelikulmiossa $CQPA$ on yhtä pitkä ja yhdensuuntainen sivupari. Nelikulmio on siis suunnikas, ja $AC \| PQ$.



7. Todistus jäljittelee tavanomaista Ptolemaioksen lauseen todistusta. Valitaan AC:n piste X niin, että $\angle ADX = \angle AKN$. Silloin kolmiot AKN ja ADX ovat yhdenmuotoisia, joten

$$\frac{AK}{AN} = \frac{AD}{AX}. \tag{1}$$



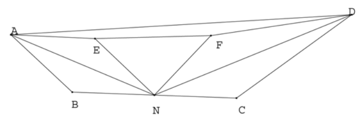
Koska $\angle ANK = \angle AXD$, niin $\angle DXC = \angle KND = \angle AMK$ (viimeinen yhtälö johtuu siitä, että $AMKN$ on jännenelikulmio.) Koska $\angle KAM = \angle XCD$, kolmiot AMK ja CXD ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AK}{AM} = \frac{CD}{CX} = \frac{AB}{CX}. \tag{2}$$

Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa

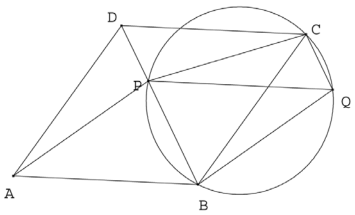
$$AN \cdot AD + AM \cdot AB = AX \cdot AK + CX \cdot AK = AC \cdot AK.$$

8. Olkoon pisteen B peilikuva suorassa AN ja F pisteen C peilikuva suorassa DN. Silloin $AX = AB$, $YD = CD$ ja $XN = YN = \frac{1}{2}BC$. Lisäksi $\angle ANB +$



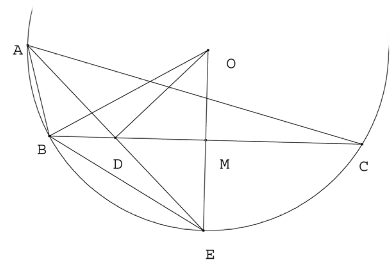
$\angle CND = 45°$, joten $\angle BNE + \angle CNF = 90°$ ja siis $\angle ENF = 90°$. Mutta tästä seuraa, että $EF = \sqrt{2} \cdot EN = \frac{1}{\sqrt{2}}BC$. Väite seuraa nyt siitä, että $AD \le AE + EF + FD$.

9. Osoitetaan, että kysytty joukko on venoneliön lävistäjien pisteiden joukko. Olkoon P jokin piste, jolle $\angle APD + \angle BPC = 180°$. Täydennetään kolmio PCD suunnikkaaksi $PQCD$. Silloin myös $ABQP$ on suunnikas ja $\angle BQC = \angle APD$. Tehtävän ehdosta seuraa, että nelikulmio $PBQC$ on jännenelikulmio, eli sen ympäri voidaan piirtää ympyrä. Siis $\angle PBC = \angle PQC =$



$\angle CDP$. Kolmioissa DPC ja BCP on kaksi yhtä pitkää sivuparia (DC ja BC sekä yhteinen PC) ja sama toista sivua vastassa oleva kulma. Kolmiot ovat joko yhtenevät, jolloin $\angle DPC = \angle CPB$ ja P siten lävistäjällä AC, tai kolmioissa on kaksi kulmaa, jotka ovat toistensa vieruskulmia, eli $\angle DPC + \angle CPB = 180°$ ja P on lävistäjällä BD. Kääntäen nähdään helposti, että kaikki vinoneliön lävistäjien pisteet P toteuttavat tehtävän ehdon.

10. Piirretään kolmion ABC ympäri ympyrä. Olkoon O sen keskipiste. Leikatkoon suora AD tämän ympyrän myös pisteessä E. Koska AE on kulman BAC puolittaja, E on kaaren BC keskipiste. Siis OE on janan BC keskinormaali. Suorakulmaisessa kolmiossa DEM on $\angle MDE = \angle ADB = 45\}as$, joten myös $\angle DEM = 45°$. Kolmio OAE on tasakylkinen, joten myös $\angle OAE = 45°$ ja siis kulma EOA on suora ja



$AO \| BC$. Koska $AD^2 = BD \cdot DC = AD \cdot DE$ (pisteen D potenssi ympyrän suhteen), on $AD = DE$. Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista EOA ja EMD saadaan $EM = MO$. Kolmiot BEM ja BOM ovat yhteneviä (sks), joten $BE = BO$. Kolmio OBE on siis tasasivuinen, joten $\angle BOA = 60°$ ja $\angle BAE = 30°$. Siis $\angle BAC = 60°$. Kolmiosta ABD saadaan nyt $\angle ABC = \angle ABD = 105°$. Viimein $\angle BCA = 15°$.

11. Nähdään heti, että funktiot $f(x) = 0$ ja $f(x) = \frac{1}{2}$ toteuttavat tehtävän ehdon. Osoitetaan, että $f(2001) = 0$ tai $f(2001) = \frac{1}{2}$. Koska $2001 = 3 \cdot 667$ ja s.y.t.$(3, 667) = 1$, niin $f(2001) = f(1)(f(3) + f(667))$. Siis $f(1) \ne 0$. Koska s.y.t.$(2001, 2001) = 2001$, niin

$$f(2001^2) = f(2001)(f(1) + f(1)) = 2f(1)f(2001), \tag{1}$$

joten $f(2001^2) \neq 0$. Nyt $f(2001^4)$ voidaan lausua kahdella eri tavalla. Toisaalta s.y.t.$(2001, 2001^3) = 2001$, joten $f(2001^4) = f(2001)(1 + f(2001^2)) = f(2001)f(1)(1 + 2f(2001))$, toisaalta s.y.t.$(2001^2, 2001^2) = 2001^2$ joten $f(2001^4) = f(2001^2)(f(1)+f(1)) = 4f(1)^2 f(2001)$. Näistä ratkaistaan $4f(1) = 1 + 2f(2001)$ eli $f(2001) = 2f(1) - \frac{1}{2}$. Tasan sama päättely aloitettuna epäyhtälöstä $f(2001^2) \neq 0$ johtaa yhtälöön $f(2001^2) = 2f(1) - \frac{1}{2}$. Yhtälön (1) perusteella on siis $2f(1) - \frac{1}{2} = 2f(1)\left(2f(1) - \frac{1}{2}\right)$. Koska $2f(1) - \frac{1}{2} = f(2001) \neq 0$, saadaan $2f(1) = 1$. Siis $f(2001) = 2f(1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

12. Hölderin epäyhtälön nojalla

$$3 = \sum_{k=1}^{n} a_i^3 = \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_i^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k^2)^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = 5^{\frac{2}{5}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_i^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}.$$

Siis

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_i^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} \geq \frac{3}{5^{\frac{2}{5}}} > \frac{3}{2}.$$

(Viimeinen epäyhtälö siksi, että $2^5 > 5^2$, joten $2 > 5^{\frac{2}{5}}$.) Tehtävän väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{5}{3}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{5}{3}}. \tag{1}$$

Olkoon

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Silloin $\frac{a_k}{S} \leq 1$ ja $\left(\frac{a_k}{S}\right)^{\frac{5}{3}} \leq \frac{a_k}{S}$. Koska

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S} = 1,$$

on

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{S}\right)^{\frac{5}{3}} \leq 1,$$

mistä väite seuraa.

13. Tarkastellaan funktiota f, $f(x) = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^x$. Selvästi $f(1) < 1$, mutta

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}+1}{3} > 1.$$

On siis olemassa sellainen t, $\frac{1}{2} < t < 1$, että $f(t) = 1$. Osoitetaan, että on olemassa vakio M siten, että

$$a_n \le M \cdot n^t \tag{1}$$

kaikilla n. Silloin $\frac{a_n}{n} \le Mn^{t-1} \to 0$, kun $n \to \infty$, joten $\frac{a_k}{k} \le \frac{1}{2001!}$ kaikilla riittävän suurilla k:n arvoilla. Todistetaan (1) induktiolla. Valitaan sellainen M, etä $a_n \le Mn^t$, kun $1 \le n \le 8$. Jos $n \ge 9$, niin $1 < \left\lfloor \frac{7n}{9} \right\rfloor < n$ ja $1 \le \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor < n$. Oletetaan, että $k \ge 9$ ja (1) on tosi, kun $n < k$. Silloin

$$a_k = a_{\lfloor \frac{7k}{9} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{k}{9} \rfloor} \le M\left\lfloor \frac{7k}{9} \right\rfloor^t + M\left\lfloor \frac{k}{9} \right\rfloor^t \le M\left(\left(\frac{7k}{9}\right)^t + \left(\frac{k}{9}\right)^t\right) = Mk^t f(t) = Mk^t.$$

Induktioaskel on otettu.

14. Olkoot korteissa olevat luvut $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{2n-1} \le x_{2n}$. Olkoon s_1 kaikkien paritonindeksisten lukujen summa ja s_2 kaikkien parillisindeksisten lukujen summa. Silloin $\frac{s_1}{s_2} \le 1$. Lisäksi, koska $1 \le x_1$ ja $x_{2n} \le 2$, niin

$$\begin{aligned}\frac{s_1}{s_2} &\ge \frac{1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}}{x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n-1} + 2} \ge \frac{x_2 + \cdots + x_{2n-2} + 1}{x_2 + \cdots + x_{2n-2} + 2} \\ &= 1 - \frac{1}{x_2 + \cdots + x_{2n-2} + 2} \ge 1 - \frac{1}{(n-1)+2} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Jako paritonindeksisiin ja parillisindeksisiin toteuttaa tehtävän vaatimuksen.

15. Olkoon $i \ge 2$. Silloin

$$ix^2a_i^2 \ge (i+1)x^2a_{i+1}a_{i-1} \qquad)(1)$$

ja

$$(i-1)a_{i-1}^2 \ge ia_1a_{i-2}, \tag{2}$$

josta seuraa

$$\frac{a_{i-1}^2}{a_ia_{i-2}} \ge \frac{i}{i-1} > \frac{i+1}{i}.$$

Siis

$$iy^2a_{i-1}^2 > (i+1)y^2a_ia_{i-2}. \tag{3}$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) kerrotaan puolittain ja supistetaan, saadaan

$$(i-1)a_ia_{i-1} \ge (i+1)a_{i+1}a_{i-2}.$$

Lisätään tähän epäyhtälöön puolittain $(i+1)a_ia_{i-1}$ ja kerrotan yhtälö xy:llä. Saadaan

$$2ixya_ia_{i-1} \ge (i+1)xy(a_{i+1}a_{i-2} + a_ia_{i-1}). \tag{4}$$

Kun yhtälöt (1), (3) ja (4) lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$i(xa_i + ya_{i-1})^2 > (i+1)(xa_{i+1} + ya_i)(xa_{i-1} + ya_{i-2}),$$

eli väite.

16. Alkuluvuille p p on p:n ainoa alkutekijä, joten $f(p) = f(1) - f(p)$, $f(p) = \frac{1}{2}f(1)$. Jos n on kahden alkuluvun p ja q tulo, niin joko $f(n) = f(p) - f(q)$ tai $f(n) = f(q) - f(p)$. Joka tapauksessa $f(n) = 0$. Jos n on kolmen alkuluvun tulo, niin jollekin niistä, esimerkiksi p:lle, on voimassa $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p)$. Koska $\frac{n}{p}$ on kahden alkuluvun tulo, $f(n) = -f(p) = -\frac{1}{2}f(1)$. Koska $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ ja $f(2001) = 1$, niin $f(1) = -2$. Neljän alkuluvun tulolle n pätee vastaavasti $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p) = -\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}f(1) = -f(1)$. Koska $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $f(2002) = 2$.

17. Valitaan luvuiksi kaikki parittomat luvut $\le 2^n - 1$ (2^{n-1} kappaletta) ja kaikki kahden potenssit $\le 2^n$ (n kappaletta). Tarkastetaan mahdolliset x:n ja y:n valinnat. Jos x ja y ovat molemmat parittomia, niin $x+y$ on parillinen ja xy on pariton. $x+y$ ei voi olla xy:n tekijä. Jos $x = 2^m$ ja $y = 2^k$, $m < k$, niin $x + y = 2^m(1 + 2^{k-m})$ ja $xy = 2^{k+m}$. Luvulla $x+y$ on pariton tekijä, mutta xy:n kaikki tekijät ovat parillisia. $x+y$ ei voi olla xy:n tekijä. Jos $x = 2^k$ ja $y = 2a+1$, niin $x+y$ on pariton luku ja $x+y > 2a+1$. Toisaalta luvun $xy = 2^k(2a+1)$ suurin pariton tekijä on $2a+1$. $x+y$ ei voi nytkään olla xy:n tekijä.

18. Todetaan, että $a^{2^n} + 2^{2^n} = a^{2^n} - 2^{2^n} + 2 \cdot 2^{2^n} = (a^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}})(a^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-1}} + 2 \cdot 2^{2^n} = \cdots = (a^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}})(a^{2^{n-2}} + 2^{2^{n-2}}) \cdots (a+2)(a-2) + 2 \cdot 2^{2^n}$. Jos joillain m, n, $m < n$, parittomilla luvuilla $a^{2^n} + 2^{2^n}$ ja $a^{2^m} + 2^{2^m}$ olisi yhteinen tekijä $d > 1$, niin d olisi pariton ja luvun $2 \cdot 2^{2^n}$ tekijä. Tämä ei ole mahdollista.

19. Jos luvun n alkutekijähajotelma on $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, n:n tekijöiden lukumäärä on $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$. Koska $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, sillä on $(3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 24$ tekijää. Koska $24 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, pienin pariton luku, jolla on 24 tekijää on $3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11 = 31185$.

20. Olkoon muunnos $(a, b, c, d) \mapsto (a', b', c', d')$. Olkoon $D = ad - bc$. Lasketaan $D' = a'd' - b'c'$ eri tapauksissa. Jos $(a', b', c', d') = (c, d, a, b)$, niin $D' = -D$. Jos $(a', b', c', d') = (b, a, d, c)$, niin $D' = -D$. Jos $(a', b', c', d') = (a + nc, b + nd, c, d)$, niin $D' = D$. Jos $(a', b', c', d') = (a + nb, b, c + nd, d)$, niin $D' = D$. Siis aina $|D'| = |D|$. Mutta jos $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$, niin $D = -2$ ja jos $(a', b', c', d') = (3, 4, 5, 7)$, niin $D' = 1$. Tehtävässä esitettyä muunnosketjua ei siis ole olemassa.