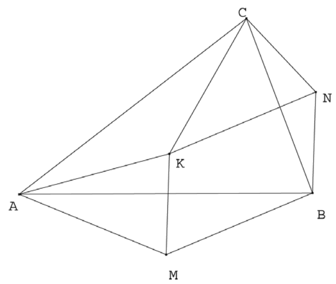
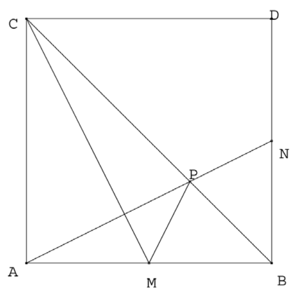
Baltian Tie 2000 – ratkaisuja

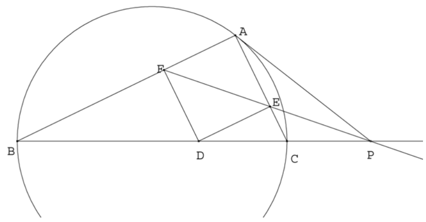
1. Kolmiot AMB, BNC ja AKC ovat tasakylkisiä ja yhdenmuotoisia. Siis $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AK}{AC}$ ja $\angle MAK = \angle BAC$. Kolmiot AMK ja ABC ovat yhdenmuotoisia (sks). Samoin $\dfrac{CN}{CB} = \dfrac{CK}{CA}$ ja $\angle NCK = \angle BCA$. Siis myös kolmiot KNC ja ABC ovat yhdenmuotoisia (sks). Näin ollen kolmiot AMK ja KNC ovat yhdenmuotoisia. Mutta $AK = KC$, joten AMK ja KNC ovat itse asiassa yhteneviä. Tästä seuraa $MB = AM = KN$ ja $BN = NC = MK$. Nelikulmio $KMBN$ on suunnikas, koska sen vastakkaiset sivut ovat pareittain yhtä pitkät.



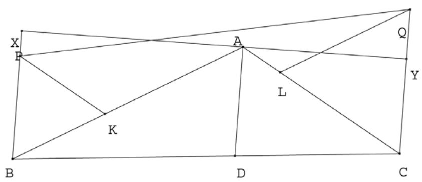
2. Täydennetään suorakulmainen kolmio ABC neliöksi $ABDC$. Koska $CM \perp AN$, ja $CA \perp AB$, niin $\angle NAB = \angle MAC$. Kulmat CAB ja ABN ovat suoria ja $AB = AC$. Kolmiot CAM ja ABN ovat yhteneviä (ksk), joten $BN = AM = MB$. Lisäksi $\angle MBP = \angle PBN = 45°$. Kolmiot MBP ja NBP ovat yhteneviä (sks), joten $\angle PMB = \angle BNP = \angle AMC$.



3. Leikatkoot suorat FE ja BC pisteessä P. Riittää, kun osoitetaan, etä PA on kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän tangentti. Tämä tulee osoitetuksi, kun osoitetaan, etä $\angle CAP = \angle CBA$. Koska $AFDE$ on neliö, $\angle DEF = \angle AEF$ ja $DE = AE$. Siis $\angle DEP = \angle AEP$ ja kolmiot EDP ja EAP ovat yhteneviä (sks). Siis $\angle PAC = \angle PAE = \angle PDE$. Mutta koska $AFDE$ on neliö, $DE \| AB$. Siis $\angle EDP = \angle ABC$, ja todistus on valmis.



4. Olkoon AD kullman BAC puolittaja. Silloin $\angle ABD = \angle DAC = 60°$. Koska myös $\angle PBA = \angle QCA = 60°$, $PB \| AD \| CQ$. Piirretään A:n kautta suoria BP ja QC vastaan kohtisuora suora, joka leikkaa BP:n pisteessä X ja QC:n pisteessä Y. Suorakulmaisten kolmioiden AXB ja AYC yksi kulma on $60°$. Tästä seuraa, että $AX = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$ ja $AY = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AC$. Toisaalta $XY \le PQ$. Väite seuraa.



5. Merkitään $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Piirretään kulman ACB puolittaja; se leikkaa

AB:n pisteessä D. Kulmanpuolittajalauseen perusteella $BD = \dfrac{a}{a+b}c$. Tehtävän ehdosta seuraa $ab = c^2 - a^2$ ja $\dfrac{c}{a+b} = \dfrac{a}{c}$. Mutta tämä merkitsee, että

$$\frac{BD}{BC} = \frac{c}{a+b} = \frac{BC}{BA}.$$

Koska kolmioissa BDC ja BCA on yhteinen kulma $\angle B$, kolmiot ovat yhdenmuotoisia (sks). Mutta silloin $\angle Bca = 2 \cdot \angle BCD = 2 \cdot \angle BAC$. Kysytty suhde on siis $1 : 2$.

6. Jos hotellissa on asukas, joka tuntee kaikki muut, hotelliasukkaan tuttavien määrä on jokin luvuista $1, \ldots, n-1$. Ellei kukaan tunne kaikkia muita, asukkaan tuntemien muiden asukkaiden määrä on jokin luvuista $0, 1, \ldots, n-2$. Joka tapauksessa hotellin n:n asukaan joukossa on aina jotkin kaksi, sanokaamme A ja B, joilla on yhtä monta tuttavaa muiden asukkaiden joukossa. Oletetaan, että A:lla ja B:llä ei ole yhteisiä tuttavia. Silloin A ja B voivat kumpikin tuntea enintään $\left\lfloor \frac{1}{2}(n-2) \right\rfloor$ (elleivät tunne toisiaan) tai $\left\lfloor \frac{1}{2}(n-2) \right\rfloor + 1$ (jos A ja B tuntevat toisensa) muuta asukasta. Jos n on pariton, $2\left\lfloor \frac{1}{2}(n-2) \right\rfloor = n-3$, ja välttämättä ainakin yksi asukas on tuntematon sekä A:lle että B:lle. Jos $n = 4$, Pertti on väärässä: oletetaan, että asukas A tuntee B: ja C:n, asukas B tuntee A:n ja D:n, C tuntee A:n ja D tuntee B:n. Silloin A:lla ja B:llä yhtä monta tuttua, muttei yhteisiä tuttuja eikä myöskään tuntemattomia. Samoin C:llä ja D:llä on yhtä monta tuttavaa, muttei yhteisiä tuttuja eikä tuntemattomia.

Olkoon sitten n parillinen ja ≥ 6. Merkitään hotellin kaikkien asukkaiden joukkoa $\mathcal{H}$:lla. Oletetaan, että vieraillа A ja B on sama määrä tuttuja, muttei yhtään yhteistä tuttua tai tuntematonta. Aikaisemman päättelyn mukaan kummallakin on $\frac{1}{2}n$ tai $\frac{1}{2}n - 1$ tuttavaa joukossa $\mathcal{H}$. Tarkastellaan sitten joukkoa $\mathcal{H} \setminus \{A, B\}$. Siinä on kaksi henkilöä, C ja D, joilla on sama määrä tuttavia joukossa $\mathcal{H} \setminus \{A, B\}$. Koska C ja D eivät ole sekä A:n että B:n tutuja tai tuntemattomia, kummallakin on sama määrä tuttuja joukossa $\mathcal{H}$. Määrä on $\frac{1}{2}n$ tai $\frac{1}{2}n-1$. Koska $n \geq 6$, joukossa $\mathcal{H} \setminus \{A, B, C, D\}$ on henkilöt E ja F, joilla on yhtä monta tuttavaa joukossa $\mathcal{H} \setminus \{A, B, C, D\}$. Jokaisella joukkoon $\mathcal{H} \setminus \{A, B, C, D\}$ kuuluvalla on tasan kaksi tuttua ja tasan kaksi tuntematonta joukossa $\{A, B, C, D\}$. Tästä seuraa, että E:llä ja D:llä on yhtä monta tuttua joukossa $\mathcal{H}$ ja tämä lukumäärä on jälleen $\frac{1}{2}n$ tai $\frac{1}{2}n - 1$. Joukossa $\{A, B, C, D, E, F\}$ on siis ainakin neljä hotellivierasta, joilla on sama määrä tuttavia. (A:n ja B:n, C:n ja D:n ja E:n ja F:n tuttavien määrä on sama.) Jos näistä neljästä valitan mitkä hyvänsä kolme, niin yksi näistä kolmesta on joko kahden mun yhteinen tuttava tai outo kummallekin. (Esimerkiksi A, B ja C; C tuntee tasan toisen A:sta ja B:stä, esimerkiksi A:n; jos A ja B tuntevat toisensa, A on B:n ja C:n yhteinen tuttava, jos A ja B eivät tune toisiaan, B on outo A;lle ja C:lle.)

7. Jokaisen painikkeen tilaa on muutettava pariton määrä kertoja. Näin tapahtuu, jos jokaista painiketta painetaan kerran: samalla rivillä olevien painikkeiden painaminen muuttaa tilaa 50 kertaa ja samassa sarakkeessa olevien painikkeiden painaminen lisäksi 39 kertaa. Kaikkien painikkeiden tilan voi siis muuttaa 2000:lla painalluksella. Osoitetaan, että kaikkien painikkeiden tilan muuttaminen vaatii sen, että jokaista painiketta painetaan ainakin kerran. Oletetaan, että jotakin painiketta ei ole ollenkaan koskettu. Voidaan olettaa, että tämä painike on ylimmän rivin vasemmanpuoleisin painike. Jotta tämän painikkeen tilaa olisi muuttunut, on joko ylimmän rivin tai vasemmanpuoleisen sarakkeen muita painikkeita painettava yhteensä pariton määrä kertoja. Oletetaan, että ylimmän rivin painikkeita on painettu yhteensä pariton määrä kertoja. Jokaisessa sarakkeessa on toisesta rivistä alkaen oltava parillinen määrä painalluksia, jotta ensimmäisen rivin painikkeiden tila muuttuisi. Koska rivejä on pariton määrä, on jossain rivissä, sanokaamme toisessa, oltava parillinen määrä painalluksia. Mutta silloin ensimmäisen sarakkeen toiseen painikkeeseen kohdistuisi parillinen määrä tilanmuutoksia. Jotta kaikkien painikkeiden tila muuttuisi, on siis painikkeita painettava ainakin 2000 kertaa.

8. Olkoot Pertin ystävät juhlissa $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{13}$ Oletetaan, että Pertti palasi juhlaan k kertaa eli että hän hyvästeli ystäviään $k+1$ kertaa. Tämä merkitsee, että Pertti unohti hyvästellä ainakin yhden ystävänsä k kertaa. Olkoon tämä ystävä Y_{13}. Olkoon x_j se määrä kertoja, jonka Pertti unohti hyvästellä ystävänsä Y_j:n. Koska Pertti hyvästeli kunkin ystävänsä eri määrän kertoja, ystävien numerointi voidaan laatia niin, että $x_j \ge j-1$. Kullakin hyvästelykerralla Pertti unohti tasan kolme ystäväänsä. Siis

$$3(k+1) = \sum_{j=1}^{12} x_j + k \ge \sum_{k=0}^{11} j + k = 66 + k.$$

Siis $2k \ge 63$ eli $k \ge 32$. Osoitetaan vielä, että $k = 32$ on mahdollinen. Seuraavan 33-sarakkeisen taulukon pystyrivit osoittavat niiden Pertin ystävien järjestysnumerot, jotka hän kunakin hyvästelykertana unohti:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
13\ldots13 & 13 & 13\ldots13 & 13\ldots13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 11\\
11\ldots11 & 11 & 8\ldots\ 8 & 7\ldots\ 7 & 7 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3\\
\underbrace{10\ldots10}_{10} & 9 & \underbrace{9\ldots\ 9}_{8} & \underbrace{6\ldots\ 6}_{6} & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 1
\end{array}$$

9. Merkitään ruudut lukupareilla $(i,\, j)$, $1 \le i,\, j \le 2k$. Olkoon L kaikkien tällaisten parien joukko. Muodostetaan funktio $f : L \to L$ asettamalla

$$f(i,\, j) = \begin{cases} (i+1,\, j+k), & \text{kun } i \text{ on pariton ja } j \le k,\\ (i-1,\, j+k), & \text{kun } i \text{ on parillinen ja } j \le k,\\ (i+1,\, j-k), & \text{kun } i \text{ on pariton ja } j > k,\\ (i-1,\, j-k), & \text{kun } i \text{ on parillinen ja } j > k. \end{cases}$$

On helppo tarkistaa, että f on bijektio. Koska pisteiden $(i,\, j)$ ja $f(i,\, j)$ etäisyys on $\sqrt{1+k^2}$, f kuvaa jokaisen $\times$:llä merkityn ruudun $\circ$:llä merkitylle ruudulle. $\circ$:llä merkittyjä ruutuja ei voi olla enempää kuin $\times$:llä merkittyjä.

10. Joka kerta kun operaatio tehdään, taululle jäävien lukujen erotus on puolet siitä, mikä se oli ennen operaatiota. Operaatio voidaan tehdä, jos lukujen erotus on parillinen. Operaatio voidaan tehdä n kertaa, jos lukujen erotus alkutilanteessa on $2^n a$. Koska $2^{11} = 2048 > 2000$, operaatio voidan tehdä enintään 10 kertaa. Jos toinen luvuista on aluksi $2000 - 2^{10} = 976$, operaatio voidaan tehdä 10 kertaa.

11. Eräs mahdollinen tehtävän ehdon toteuttava lukujono saadaan seuraavasti: jos luvun n alkutekijähajotelma on $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, asetetaan $a_n = 2^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$. Koska $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, $a_{2000} = 2^{3+4} = 128$. Pienin mahdollinen luvun a_{2000} arvo on siis ≤ 128. Kasvavassa jonossa 1, 5, 25, 125, 250, 500, 1000, 2000 jokainen luku on jaollinen edellisellä. Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_{2000}$ jokin tehtävän ehdon toteuttava jono. Silloin $a_1 \geq 1$ ja $a_{2000} \geq 2a_{1000} \geq 4a_{500} \geq 8a_{250} \geq 16a_{125} \geq 32a_{25} \geq 64a_5 \geq 128a_1 \geq 128$. Pienin mahdollinen luvun a_{2000} arvo on siis 128.

12. Olkoon joukossa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ luvut $y_1, y_2, \ldots, y_k$, joissa on maksimimäärä numeroita ja joissa on viimeistä lukuun ottamatta samat numerot (tällaisia lukuja voi olla vain yksikin). Silloin $y_1 = 10y + a_1, \ldots, y_k = 10y + a_k$, missä $0 \leq a_1 < \ldots < a_k \leq 9$. Tällöin

$$\frac{1}{y_1} + \cdots \frac{1}{y_k} \leq 10 \cdot \frac{1}{10y + 0} = \frac{1}{y}.$$

Luvuista x_i tehdyn oletuksen nojalla $y \notin X$. Jos luvut $y_1, y_2, \ldots, y_k$ poistetaan joukosta X ja tilalle laitetaan y, syntynyt joukko toteuttaa tehtävän ehdon (koska luvuissa y_i oli maksimimäärä numeroita, y ei voi olla minkään vähempinumeroisen luvun alku) ja lukujen käänteislukujen summa ei pienene. Samaa jatkaen tullaan lopulta epäyhtälöön

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} = \frac{7129}{2520} < 3.$$

13. Olkoon $a_i = k + id$. Tehdään vastaoletus: $n = pq$, missä p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä. Oletuksen mukaan p on $k+pd$:n tekijä ja q on $k+qd$:n tekijä. Silloin k on jaollinen p:llä ja q:lla, joten k on jaollinen n:llä. Mutta nyt $a_n = k + nd$, joten a_n on jaollinen n:llä. Ristiriita. Siis n:llä voi olla vain yksi alkutekijä, eli n on alkuluvun potenssi.

14. Osoitetaan, että ainoa ehdon toteuttava luku on 2000. Merkitään $d(n)$:llä luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärää ja $a(p, n)$:llä alkuluvun p eksponenttia luvun n alkutekijähajotelmassa (siis esimerkiksi $a(2, 12) = 2$ ja $a(3, 12) = 1$). Merkitään vielä $f(n) = \dfrac{n}{d(n)}$. Tehtävänä on siis etsiä ne luvut n, joille $f(n) = 100$. Todistetaan ensin

Apulause. Jos n on positiivinen kokonaisluku ja $m < n$ on n:n tekijä, niin $f(m) \leq f(n)$ ja $f(m) = f(n)$ jos ja vain jos m on pariton ja $n = 2m$.

Todistus. Tunnetusti $d(n) = \prod_p (1 + a(p, n))$. Oletetaan ensin, että $n = mp$ ja p on alkuluku. Silloin $a(p, m) = a(p, n) - 1$ ja

$$\frac{f(n)}{f(m)} = \frac{nd(m)}{md(n)} = p\frac{1 + (a(p, m)}{1 + a(p, n)} = \frac{pa(p, n)}{1 + a(p, n)} \geq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $p = 2$ ja $a(2, n) = 1$ eli jos $p = 2$ ja m on pariton. Oletetaan sitten, että $n = ms$, missä s on jokin kokonaisluku. Kun edellistä päättelyä sovelletaan s:n kuhunkin alkutekijään, saadaan induktiolla helposti $f(m) \le f(n)$; jotta yhtäsuuruus säilyisi jokaisessa induktioaskeleessa, olisi "poistuvan tekijä aina oltava 2 ja "jäljelle jäävän tekijän" pariton. Tämä on mahdollista vain, jos $s = 2$. Apulause on todistettu.

Oletetaan nyt, että $f(n) = 100$ eli $n = 100d(n) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot d(n)$. Tehdään muutamia arvioita.

1°. $f(2^7 \cdot 5^2) = \dfrac{3200}{8 \cdot 3} > 100$. Jos olisi $(2^7 \cdot 5^2) \mid n$, niin apulauseen perusteella olisi $f(n) > 100$. Siis $a(2, n) \le 6$.

2°. $f(2^2 \cdot 5^4) = \dfrac{2500}{15} > 100$. Siis $a(5, n) \le 3$.

3°. $f(2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^4) = \dfrac{8100}{45} > 100$. Siis $a(3, n) \le 3$.

4°. Jos $q > 5$ on alkuluku ja $k \ge 4$, niin

$$f(2^2 \cdot 5^2 \cdot q^k) = \frac{100q^k}{9(k+1)} > \frac{100 \cdot 3^k}{9(k+1)} = f(2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^k) > 100.$$

Siis $a(q, n) \le 3$.

5°. Jos alkuluku $q > 7$ on on n:n tekijä, niin q on $d(n)$:n tekijä, eli $1 + a(p, n) = q$ jollain alkuluvulla p. Mutta jo todistetun mukaan $a(p, n) \le 6$ kaikilla p. Siis n:n alkutekijät ovat ≤ 7.

6°. Jos $7 \mid n$, niin $7 \mid d(n)$, joten $7 \mid 1 + a(p, n)$ jollain p. Edellä todisteun mukaan tämä on mahdollista jos ja vain jos $p = 2$ ja $a(2, n) = 6$. Mutta $f(2^6 \cdot 5^2 \cdot 7) = \dfrac{11200}{42} > 100$. Siis 7 ei voi olla n:n tekijä eikä myöskään $a(2, n) = 6$ ole mahdollinen.

7°. Jos $a(5, n) = 3$, niin $5 \mid d(n)$ ja siis $5 \mid 1 + a(p, n)$ jollain p. Aiemmin todistetun nojalla $p = 2$. Siis $a(2, n) = 4$. Toisaalta, jos $a(2, n) = 4$, niin $5 \mid d(n)$ ja $5^3 \mid n$ ja kohdan 2° perusteella $d(5, n) = 3$. $f(2^4 \cdot 5^3) = \dfrac{2000}{20} = 100$. Luku 2000 toteuttaa tehtävän ehdon.

8°. Tarkastetaan vielä tapaus $a(5, n) = 2$. Nyt 7°:n mukaan $a(2, n) \ne 4$, joten $a(2, n) \in \{2, 3, 5\}$. Koska $a(5, n) = 2$, niin $3 \mid d(n)$ ja $3 \mid n$. Siis $a(3, n) \in \{1, 2, 3\}$. Nyt 7°:n mukaan $a(2, n) \ne 4$, joten $a(2, n) \in \{2, 3, 5\}$. Jos olisi $d(2, n) = 3$, niin $d(n)$ on jaollinen 2:lla, muttei 4:llä. Toisaalta $d(n)$ on jaollinen $1 + a(2, n)$:llä eli 4:llä. Ristiita. Siis $a(2, n) \in \{2, 5\}$. Tästä seuraa, että $3^2 \mid d(n)$ ja $3^2 \mid n$. Siis $a(3, n) \in \{2, 3\}$. Jos olisi $a(3, n) = 2$, niin $3^3 \mid d(n)$ ja $3^3 \mid n$ eli $d(3, n) \ge 3$. Jos olisi $a(3, n) = 3$, niin olisi $a(3, d(n)) = 2$ja edelleen $a(3, n) = 2$. Ristiriita taas.

Siis $n = 2000$ on ainoa tehtävän ratkaisu.

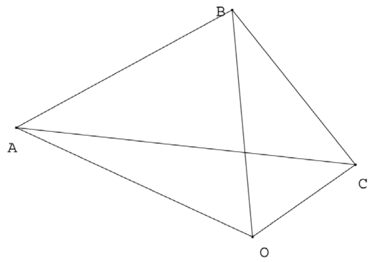
15. Koska n ei ole jaollinen 2:lla eikä 3:lla, $n \equiv \pm 1 \mod 6$. Jos $n = 1$, väite pätee. Jos $n = 5$, saadaan $(k+1)^5 - k^5 - 1 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k = 5k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1) =$

$5(k+1)(k^2+k+1)$, joten väite pätee. Olkoon siten $n > 6$ ja olkoon $t = k^2+k+1$. Lasketaan $\bmod t$:

$$\begin{aligned}(k+1)^n-k^n-1 &= (k+1)^2(k+1)^{n-2}-k^2k^{n-2}-1 = (t+k)(k+1)^{n-2}-(t-(k+1))k^{n-2}-1\\ &\equiv k(k+1)^{n-2}+(k+1)k^{n-2}-1 = (k^2+k)((k+1)^{n-3}+k^{n-3})-1 = (t-1)((k+1)^{n-3}+k^{n-3})-1\\ &\equiv -(k+1)^{n-3}-k^{n-3}-1 = -(k+1)^2(k+1)^{n-5}-k^2k^{n-5}-1\\ &= -(t+k)(k+1)^{n-5}-(t-(k+1))k^{n-5}-1 \equiv -k(k+1)^{n-5}+(k+1)k^{n-5}-1\\ &= -(t-1)((k+1)^{n-6}-k^{n-6})-1 \equiv (k+1)^{n-6}-k^{n-6}-1.\end{aligned}$$

Jos yhtälöäketjun viimeinen luku on jaollinen t:llä eli k^2+k+1:llä, myös ensimmäinen on. Väite todistuu siis induktiolla.

16. Esitetään geometrinen todistus. Olkoon $OA = a$, $OB = b$ ja $OC = c$ ja olkoon $\angle AOB = \angle BOC = 60°$. Silloin $\angle AOC = 120°$. Koska $\cos 60° = \frac{1}{2}$ ja $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, sadaan kosinilauseesta heti $\sqrt{a^2-ab+b^2} = AB$, $\sqrt{b^2-bc+c^2} = BC$ ja $\sqrt{a^2+ab+c^2} = AC$. Väite seuraa kolmioepäyhtälöstä $AC \le AB+BC$.



17. Merkitään $X = x+z$, $Y = y+t$. Ryhmän kaksi ensimmäistä yhtälöä ovat nyt $X+Y = 5$ ja $XY = 4$. Ratkaistaan yhtälö $X + \frac{4}{X} = 5$. Nähdään heti, että ratkaisut ovat $X = 1$ ja $X = 4$. Siis $\{X, Y\} = \{1, 4\}$. Tehtävän ryhmän kolmas yhtälö on $Yxz + Xyt = 3$ ja koska $XY = 4$, viimeinen yhtälö voidaan kirjoittaa $(Yxz)(Xyt) = -4$. Nyt voidaan ratkaista samoin kuin edellä $\{Xyt, Yxz\} = \{-1, 4\}$. Ratkaistavaksi jää eri kombinatioita vastaavat yksinkertaiset yhtälöparit. Saadaan: Jos $X = 1$, $Y = 4$, $Yxz = -1$ ja $Xyt = 4$, niin $\{x, z\} = \left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $y = t = 2$, Jos $X = 4$, $Y = 1$, $Yxz = 4$ ja $Xyt = -1$, niin $x = z = 2$ ja $\{y, t\} = \left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Muut kaksi mahdollista yhdistelmää eivät johda reaalisiin ratkaisuihin.

18. Koska

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}+2-2\sqrt{2x+1} &= \frac{1}{x}((x+1)^2-2x\sqrt{2x+1} = \frac{1}{x}(x^2-2x\sqrt{2x+1}+2x+1)\\ &= \frac{1}{x}\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2,\end{aligned}$$

yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$\frac{1}{x}\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\frac{1}{y}\left(y-\sqrt{2y+1}\right)^2 = 0.$$

On koska x ja y ovat positiivisia, on oltava $x = \sqrt{2x+1}$ ja $y = \sqrt{2y+1}$. Ainoa ratkaisu on $x = y = 1+\sqrt{2}$.

19. Kirjoitetaan $t^{2n} = (t^2)^n = ((t-1)^2 + (2t-1))^n$ ja käytetään binomikaavaa. Koska $(t-1)^2 \geq 0$ ja $2t-1 \geq 0$, binomikaavan kaikki termit ovat positiivisia. Kun muut kuin ensimmäinen ja viimeinen termi jätetään pois, saadaan heti tehtävän epäyhtälö.

20. Kirjoitetaan

$$x_n^2 = \frac{(2n+1)((2n+1)(2n+3))((2n+3)(2n+5))\cdots(4n+1)}{(2n)^2(2n+2)^2\cdots(4n)^2}.$$

Sovelletaan osoittajaan epäyhtälöä $x(x+2) \leq (x+1)^2$ ja supistetaan. Saadaan

$$x_n^2 \leq \frac{(2n+1)(4n+1)}{(2n)^2} < 2 + \frac{2}{n}.$$

Kun samaa tekniikkaa soveletan nimittäjään, saadaan

$$x_n^2 \geq \frac{(4n+1)^2}{2n \cdot 4n} > 2 + \frac{1}{n}.$$

Siis

$$\frac{1}{n} < x_n^2 - 2 < \frac{2}{n}.$$

Erityisesti $\sqrt{2} < x_n < 2$. Lisäksi

$$\frac{1}{n(x_n + \sqrt{2})} < x_n - \sqrt{2} < \frac{2}{n(x_n + \sqrt{2})}.$$

Koska $2 + \sqrt{2} < 4$ ja $\dfrac{2}{2\sqrt{2}} < 2$, väite seuraa.