Baltian Tie 1998 – ratkaisuja

98.1. Osoitetaan ensin, että ehdon täyttäviä funktioita on vain yksi. Selvästi $f(1, 1) = 1$. Olkoon $z \geq 2$. Osoitetaan induktiolla, että tehtävän ehdot määrittävät $f(x, y)$:n yksikäsitteisesti, kun $0 < x < z$ ja $0 < y < z$. Koska $zf(z-y, y) = yf(x, z)$, $f(x, z)$ on yksikäsitteisesti määritelty, kun $0 < x < z$. Koska $f(z, y) = f(y, z)$, $f(z, y)$ on yksikäsitteisesti määritelty, kun $0 < y < z$. Koska $f(z, z) = z$, $f(x, y)$ on yksikäsitteisesti määritelty, kun $0 < x < z+1$ ja $0 < y < z+1$. Olkoon $[x, y]$ lukujen x ja y pienin yhteinen monikerta eli pienin yhteinen jaettava ja (x, y) lukujen x ja y suurin yhteinen tekijä. $(x, y)[x, y] = xy$. Osoitetaan, että $f(x, y) = [x, y]$. Ilmeisesti $f(x, y) = [x, y]$ toteuttaa tehtävän kaksi ensimmäistä yhtälöä. Koska $(x, x+y) = (x, y)$, on

$$(x+y)[x, y] = \frac{(x+y)xy}{(x, y)} = y\frac{x(x+y)}{(x, x+y)} = y[x, x+y].$$

Myös kolmas yhtälö toteutuu, joten tehtävän ainoa ratkaisu on $f(x, y) = [x, y]$.

98.2. Kosinilauseen perusteella kolmikko (a, b, c) on kvasipythagoralainen, jos ja vain jos $c^2 = a^2 + ab + b^2$. Jos d on lukujen a, b ja c yhteinen tekijä, niin myös kolmikko $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right)$ on kvasipythagoralainen. Voimme rajoittua tarkastelemaan sellaisia kolmikkoja (a, b, c), joissa a:n, b:n ja c:n suurin yhteinen tekijä on 1. Silloin myöskin jokaiset kaksi luvuista a, b, c ovat yhteistekijättömiä. Osoitetaan epäsuorasti, että c ei ole jaollinen luvuilla 2, 3 eikä 5. Jos c olisi parillinen, luvut a ja b eivät molemmat voisi olla parittomia. Siis c ei ole jaollinen 2:lla. Oletetaan, että c on jaollinen kolmella. Silloin a ei ole jaollinen 3:lla. Koska

$$4c^2 = 3a^2 + (a+2b)^2\} \tag{1}$$

ja a ei ole jaollinen 3:lla, niin $3a^2$ ei ole jaollinen 9:llä. Toisaalta $(a+2b)^2$ on jaollinen 3:lla, joten neliönä se on jaollinen myös 9:llä. Siten $3a^2$ on jaollinen 9:llä ja a on jaollinen kolmella. Ristiriita osoittaa, että c ei ole jaollinen kolmella. Oletetaan viimein, että c on jaollinen 5:llä. Silloin a ei ole jaollinen 5:llä, ja $a^2 \equiv \pm 1 \mod 5$. Edelleen $4c^2 - 3a^2 \equiv \pm 2 \mod 5$. Mutta yhtälön (2) perusteella neliö $(a+2b)^2$ on silloin $\equiv \pm 2 \mod 5$, mikä on mahdotonta. c:n kaikki alkutekijät, ja tietysti suurinkin, ovat suurempia kuin 5.

98.3. Tehtävän yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $2x^2 - xy + 5y^2 - 10xy = -121$ ja jakaa tekujöihin muodossa $(2x-y)(5y-x) = 11^2$. Tekijöiden on oltava molempien negatiivisia tai molempien positiivisia. Jos molemmat tekijät olisivat negatiivisia, olisi $2x < y$ ja $5y < x$; koska x ja y ovat positiivisia, tämä on mahdotonta. Siis pari $(2x-y, 5y-x)$ voi olla vain jokin pareista $(1, 121)$, $(11, 11)$, $(121, 1)$. Vain ensimmäinen pari voi liittyä kokonaislukuihin x, y. Tällöin $(x, y) = (14, 27)$.

98.4. Oletetaan, että $P(n) = 0$ jollakin kokonaisluvulla n. Silloin $P(n) \equiv 0 \mod 1998$. Olkoon $m \in \{1, 2, \ldots, 1998\}$ sellainen luku, että $m \equiv n \mod 1998$. Silloin $P(m) \equiv P(n) \mod 1998$. Nyt $1 \leq P(m) \leq 999$. Ei voi olla $P(m) = 0$.

98.5. Jos $b = 0$, luku $10^n a$ täyttää asetetun vaatimuksen. Oletetaan, että $b \neq 0$. Olkoon n kinteä. Osoitetaan, että jokaisella k, $1 \leq k < n$ on olemassa sellainen luku $m_k < 5^k$, että luvun $2^n m_k$ viimeisistä k:sta numerosta jokainen on a tai b. Koska 2^n päättyy johonkin numeroista 2, 4, 6, on olemassa jokaista mahdollista b:tä kohden olemassa m_1, $1 \le m_1 \le 4$, niin että $2^n m_1$ päättyy b:hen. Väite on siis tosi, kun $k = 1$. Oletetaan sitten, että jollekin k, $1 \le k < n$ on olemassa m_k niin, että $2^n m_k$:n k viimeistä numeroa ovat a tai b. Olkoon c $2^n m_k$:n $(k+1)$. numero oiekalta laskettuna. Tarkastellaan lukua $5^k 2^n$. Se loppuu tasan k:hon nollaan ja näitä nollia edeltävä numero on parillinen; olkoon se d. Nyt oli r mikä luku hyvänsä, luvun $m_k 2^n + r5^k 2^n$ $(k+1)$. numero oikealta on $\equiv c + rd \bmod 10$ (yhteenlaskun jälkimmäinen luku päättyy nolliin, joten se ei tuota muistinimeroa). Samoin kuin tapauksessa $k = 1$ voidaan valita sopiva r, $1 \le r \le 4$ niin, että $(k+1)$. numero oikealta on joko a (jos c on pariton) tai b (jos c on parillinen). Valitaan nyt $m_{k+1} = m_k + r5^k$. Luvun $2^n m_{k+1}$ $k+1$ viimeistä numeroa kuuluvat kaikki joukkoon $\{a, b\}$. Lisäksi $m_{k+1} < 5^k + 4 \cdot 5^k = 5^{k+1}$. Prosessia voidaan jatkaa, kunnes saadaan luku m_n, jolle luvun $2^n m_n$ kaikki viimeiset n numeroa ovat joukossa $\{a, b\}$. Koska $m^n < 5^n$, luvussa $2^n m_n$ on enintään n numeroa. Ne kuuluvat siis kaikki joukkoon $\{a, b\}$.

98.6. Polynomin $Q(x) = P(x) - P(-x)$ aste on enintään 5. Q:lla on nollakohdat a, b, 0, $-a$, $-b$. Koska $Q'(0) = 0$, 0 on ainakin kaksinkertainen Q:n nollakohta. Mutta silloin Q:n on oltava vakio 0; siis $P(x) = P(-x)$ kaikilla x.

98.7. Selvästi funktio $f(x) = 0$ kaikilla x toteuttaa tehtävän yhtälön. Osoitetaan, että se on ainoa ehdon toteuttava funktio. Olkoon x_0 mielivaltainen ja $f(x_0) = a$. Sijoitetaan yhtälööön $x = y = x_0$. Saadaan $f(a^2) = 2a$. Sijoitetaan nyt $x = y = a^2$. Saadaan $f(4a^2) = 4a$. Toisaalta, jos sijoitetaan $x = x_0$ ja $y = 4a^2$, saadaan $5a = a + 4a = f(x_0) + f((2a)^2) = f(f(f(x_0)f((2a)^2) = f(a \cdot 2 \cdot 2a) = f(4a^2)$. Siis $4a = 5a$, joten $a = 0$.

98.8. Kerrotaan väitetyn yhtälön vasen puoli A ja oikea puoli B polynomilla $1 - x$. Koska $(1-x)P_k(x) = 1 - x^k$ ja $1 - x^0 = 0$, niin binomikaavan perusteella saadaan

$$(1-x)A = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(1-x^k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1-x^k) = 2^n - (1+x)^n.$$

Toisaalta $1 - x = 2\left(1 - \dfrac{1+x}{2}\right)$, joten

$$(1-x)B = 2\left(1 - \frac{1+x}{2}\right) \cdot 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2^n\left(1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right) = 2^n - (1+x)^n.$$

Siis $A = B$ aina. kun $x \ne 1$. Koska molemmat puolet ovat polynomeja (tai jatkuvia funktioita), yhtälö $A = B$ pätee myös, kun $x = 1$.

98.9. Tunnetusti

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt{1 + \tan^2 x},$$

kun $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Koska kosinifunktio on välillä $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ positiivinen ja vähenevä, väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että $\dfrac{1}{\cos\gamma} < \dfrac{1}{\cos\delta}$. Olkoon $f(t) = \sqrt{1+t^2}$. Nyt

$$\frac{1}{\cos\gamma} = f(\tan\gamma) = f\left(\frac{1}{2}(\tan\alpha + \tan\beta)\right)$$

ja

$$\frac{1}{\cos\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}\right) = \frac{1}{2}(f(\tan\alpha) + f(\tan\beta)).$$

Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan

$$\sqrt{1 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} < \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}\right),$$

kun x ja y ovat positiivisia ja $x \neq y$. Mutta tämä viimeksi todistettava epäyhtälö osoittautuu kahden neliöön korottamisen jälkeen yhtäpitäväksi epäyhtälön $(x-y)^2 > 0$ kanssa. [Viimeiset tarkastelut voi sivuuttaa, jos toteaa funktion f alaspäin kuperaksi esimerkiksi havainnosta $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} > 0$.]

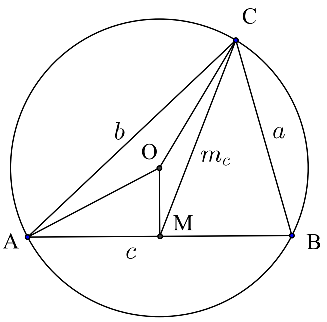
98.10. Olkoon $(n-1)$-kulmio $A_0A_1 \ldots A_{n-2}$ ja n-kulmio $B_0B_1 \ldots B_{n-1}$. Sovitaan mukavuussyistä, että sen ympyrän, jonka sisään monikulmiot on piirretty, kehän pituus on $2n(n-1)$ (eikä 2π). Kierretään kehä auki x-akselin välille $[0, 2n(n-1)]$ niin, että yksi pisteistä A_i on origossa ja pisteessä $x = 2n(n-1)$. Nyt jokaisen A_j-pisteen koordinaatti on jokin luvuista $2kn$, $0 \le k \le n-2$. Koska välejä $[2kn, 2kn+2n]$, $0 \le k \le n-2$ on $n-1$ kappaletta, jotkin kaksi vierekkäistä B_j-kärkeä ovat samalla välillä. Numerointi voidaan tehdäö niin, että tämä väli on $[0, 2n]$ ja että sanottujen B_j pisteiden koordinaatit ovat x_0 ja $x_1 = x_0 + 2(n-1)$, $0 \le x_0$, $x_1 < 2n$. Erityisesti pätee $x_1 < 1$. Jos pisteen B_k koordinaatti on x_k, niin $x_k = x_0 + k \cdot (2(n-1))$, $1 \le k \le n-1$. Heti nähdään, että jos $1 \le k \le \dfrac{n}{2}$, niin $(2k-1)n \le x_k \le 2kn$ ja jos $\dfrac{n}{2} < k \le n-1$, niin $(2k-2)n \le x_k \le (2k-1)n$. Jos siis $1 \le k \le \dfrac{n}{2}$, niin B_k on A_{k-1}:n ja A_k:n välissä, lähempänä A_k:ta, ja jos $\dfrac{n}{2} < k \le n-1$, niin B_k on A_{k-1}:n ja A_k:n välissä, mutta lähempänä A_{k-1}:tä. Edellisessä tapauksessa B_k:n ja lähimmän A_j:n välinen etäisyys on $2kn - x_k = 2k - x_0$, jälkimmäisessä $x_k - (2k-2)n = x_0 - 2k + 2n$. Lyhimpien etäisyyksien summa on siis

$$x_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k - x_0) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1}(x_0 - 2k + 2n).$$

Summassa on tasan yhtä monta x_0:aa ja $(-x_0)$:aa, joten se ei riipu x_0:sta. Tämä todistaa väitteen.

98.11. Olkoon tehtävän kolmio ABC, M sivun AB keskipiste, O ympärysympyrän keskipiste ja keskijana $CM = m_c$. Esimerkiksi ns. suunnikaslauseesta seuraa heti kolmion keskijanalle (tunnettu) lauseke

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$



Todistettava epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoihin $4Rm_c \geq a^2+b^2$ ja $8Rm_c \geq 4m_c^2+c^2$ ja $|OM|^2 = R^2 - \frac{1}{4}c^2 \geq R^2 - 2Rm_c + m_c^2 = (R-m_c)^2 = |OC - CM|^2$. Epäyhtälö on siis kolmion COM kolmioepäyhtälö. Epäyhtälössä on yhtäsuuruus, jos kolmio surkastuu; näin käy, jos kolmio on tasakylkinen ($a = b$) tai suorakulmainen ($\angle BCA = 90°$), jolloin M ja O yhtyvät.

98.12. Olkoon $\angle BAD = x$ ja $\angle DAC = y$; siis $x + y = 90°$ ja $\sin y = \cos x$. Silloin $\angle BDA = 2x$ ja $\angle ADC = 2y$. Nyt $\angle ABD = 180° - 3x$ ja $\angle ACB = 180° - 3y$. Sovelletaan sinilausetta kolmioon ABD. Saadaan

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin(3x)}{\sin x}.$$

Mutta $\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x = \sin x(2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x)$, joten

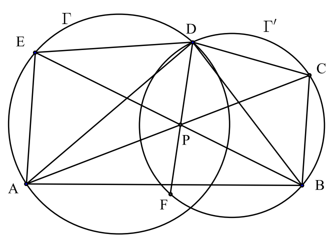
$$\frac{AD}{BD} = 3\cos^2 x - \cos^2 x.$$

Kolmiosta ADC saadaan analogisesti

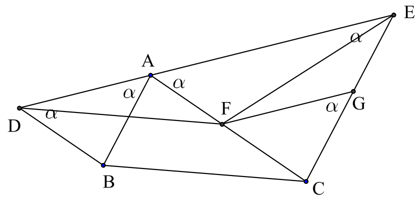
$$\frac{AD}{DC} = 3\cos^y - \sin^2 y = 3\sin^2 y - \cos^2 x.$$

Koska $3\cos^2 x - \cos^2 x + 3\sin^2 y - \cos^2 x = 2$, saadaan väite.

98.13. Olkoot Γ ja Γ' kolmioiden ADE ja BCD ympärysympyrät. Olkoon F suoran DP ja Γ':n toinen leikkauspiste. Koska $AE \| BC$, kolmioiden APE ja CPB kulmat ovat pareittain yhtä suuret, joten $APE \sim CPB$. P-keskinen homotetia vie AE:n janaksi CB. Koska AE ja CB vastavat Γ:n ja Γ':n yhtä suuria kehäkulmia, on Γ:n ja Γ':n säteiden suhde sama kun $AE : CB$. Mutta tämä merkitsee sitä, että Γ' on Γ:n kuva mainitussa homotetiassa. Tämä homotetia kuvaa kaaren $\overset{\frown}{DE}$ kaareksi $\overset{\frown}{BF}$. Siis $\angle EAD = \angle BDF = \angle BDP$. Toinen yhtälö todistetaan samalla tavalla.



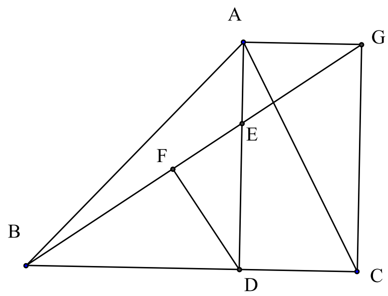
98.14. Piirretään F:n kautta DE:n suuntainen suora. Se leikkaa CE:n pisteessä G. Koska DE on kulman $\angle CAB$ vieruskulman puolittaja, $\angle DAB = \angle EAC = \alpha$. Yhdensuuntaisuuksista seuraa $\angle ADB = \angle AEC = \angle GFC = \angle FGC = \alpha$. Kolmiot BAD, CEA ja CGF ovat yhdenmuotoisia tasakylkisiä kolmioita. Koska $AB = FC$, BAD ja CGF ovat yhteneviä, joten $AD = FG$. Selvästi $AF = EG$. Kulmien $\angle FAD$ ja $\angle FGE$ vieruskulmat ovat yhtä suria, joten $\angle FAD = \angle FGE$. Kolmiot FAD ja EGF ovat siis yhteneviä (sks), joten $FD = FE$.



98.15. Täydennetään suorakulmainen kolmio ADC suorakaiteeksi $ADCG$. Koska

$$\frac{AE}{ED} = \frac{DC}{BD} = \frac{AG}{BD},$$

suorakulmaiset kolmiot EBD ja EAG ovat yhdenmuotoiset. Siis $\angle DEB = \angle AEG$. Mutta tästä seuraa, että B, E ja G ovat samalla suoralla. Koska $\angle FDG = \angle FDE = 90°$, F on suorakaiteen $ADCG$ ympärysympyrällä. Koska AC on tämän ympyrän halkaisija, $\angle AFC = 90°$.



98.16. Väritetään ruudukko neljällä värillä A, B, C ja D niin, että ylimmän rivin väri on A, toiseksi ylimmän B, seuraavan C, seuraavan D, seraavan A jne. Keskimmäinen ruutu jätetään värittämättä. Nyt värillä B vöritettyjä rutuja on $3 \cdot 13 = 39$ ja cärillä C väritettyjä $13 \cdot 39 - 1 = 38$. Jos vaadittu laudan peitto 1×4-laatoilla onnistuisi, niin jokainen laatta peittäisi neljä samanväristä ruutua tai neljä uutua, jotka kaikki olisivat erivärisiä. Tämä merkitsee, että mustien ja valkoisten ruutujen lukumäärän erotuksen pitäsi olla neljällä jaollinen. Koska 1 ei ole jaollinen 4:llä, vaadittua peittoa ei ole.

98.17. Jos $k = 1$, pakkaus voidaan tehdä. Oletetaan, että se voidaan tehdä, kun $k = j$. Olkoon sitten esineitä $(j+1)n$, jokainen väritettynä jollain $j+1$:stä eri väristä, ja laatikoita $j+1$. Silloin jotakin väriä, esimerkiksi vihreää, on enintään n kappaletta ja jotakin väriä, esimerkiksi sinistä, on enemmän kun n kappaletta. Otetaan kaikki vihreat, pannaan ne laatikkoon, ja täytetään laatikko (jos tarpeen) sinisillä esineillä. Nyt jäljellä on jn esinettä, kukin väritettyinä jollakin j:stä eri väristä (kun vihreät ovat kaikki yhdessä laatikossa). Induktio-oletuksen mukaan nämä jn esinettä voidaan pakata vaaditulla tavalla j:hin laatikkoon; $(j+1)$:ssä laatikossa on myös vain kahdenvärisiä esineitä. Väitteen totuus seuraa induktioperiaatteesta.

98.18. Tarkastelemalla mahdollisuuksia nähdään, että vaadittuja joukkoja ei ole, kun $n = 1, 2, 3$. Kun $n = 4$, joukko $\{3, 5, 6, 7\}$ kelpaa. Jos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ on kelvollinen joukko, sellainen on myös $\{1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n\}$. Kysyttyjä joukkoja on sis kaikilla $n \geq 4$.

98.19. Jos tarkastellaan kahden ei välttämättä samanakokoisen joukkueen jäsenten välisiä pelejä, niin ainakin toisessa joukkueessa on ainakin yksi pelaaja, joka on voittanut ainakin uolet toisen joukkueen pelaajista. Jos nimittäin joukkueessa A on m ja joukkueessa B n pelaajaa, niin oteluita on yhtensä mn; ellei kukaan A-joukkueesta ole voittanut ainakin puolta B-joukkueen pelaajista, A-joukkueen voittamien ottelujen määrä on $< m \cdot \frac{n}{2}$ ja ellei kukaan B-joukkueen jäsen ole voittanut ainakin puolta A-joukkueen jäsenistä, B-joukkueen voittaminen ottelujen määrä on $< n \cdot \frac{m}{2}$; näin ollen ottelujen määrä olisikin $< mn$. Tarkastellaan nyt kahden 1000-henkisen joukkueen pelejä. Toisessa joukkueessa, esimerkiksi A:ssa, on pelaaja a_1, joka on voitanut ainakin 500 B-joukkueen pelaajaa. Annetaan hänelle mitali, ja poistetaan B-joukkueesta kaikki a_1:lle hävinneet. Tarkastellaan tilannetta uudelleen. Jommassakummassa joukkueista on jälleen joku pelaaja, joka on voittanut ainakin puolet toisen joukkueen pelaajista. Annetaan hänellekin mitali, poistetaan hänet ja hänelle hävinneet. Prosessia voidaan jatkaa, kunnes toisessa joukkueessa ei enää ole yhtään pelaajaa jäljellä. Oletetaan, että tämä joiukkue on B. Joka kerta, kun B:stä on poistettu hävinneitä, nätä on ollut ainakin puolet B:n silloisesta vahvuudesta. Koska aluksi B:ssä oli alle 2^{10} pelaajaa, poistoja on ollut enintään 10. A:ssa on enintään 10 mitalinsaajaa. Nyt jokainen B:ssä ollut on hävinnyt jollekin A:n mitalinsaajalle. Jos heitä on alle 10, voidaan ryhmä täydentää millä hyvänsä A:n pelaajilla.

98.20. Olkoot $1 \le g < h < i < j \le n$ kiinnteitä kokonaislukuja. Tarkastellaan kaikkia sellaisa n-numeroisia lukuja $a = \overline{a_1a_2\dots a_n}$, joiden kaikki numerot ovat nollaa suurempia, joille $a_g = 1$, $a_h = a_i = 9$ ja $a_j = 8$ ja joille "1998" on mahdollisimman alussa, eli joille $a_p \ne 1$, kun $p < g$, $a_p \ne 9$, kun $g < p < h$ ja $h < p < i$ ja $a_p \ne 8$, kun $i < p < j$. Tällaisia lukuja on $k_{ghij} = 8^{g-1} \cdot 8^{h-g-1} \cdot 8^{i-h-1} \cdot 8^{j-i-1} \cdot 9^{n-j}$ kappaletta. Nyt $k_{ghij} \equiv 1 \bmod 8$ jos ja vain jos $g = 1$, $h = 2$, $i = 3$ ja $j = 4$ ja $k_{ghij} \equiv 0 \bmod 8$ kaikissa muissa tapauksissa. Koska $k(n)$ on kaikkien lukujen k_{ghij} summa, kysytty jakojäännös on 1.