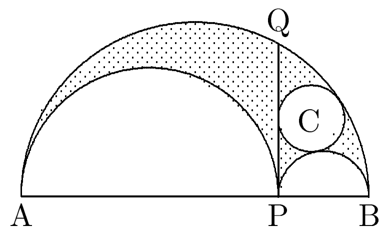
Baltian tie 1996

Language: Finnish

1. Olkoot α ja $\beta \neq 0$ mitkä tahansa kaksi kulmaa, joiden kyljet sisältävät säännöllisen 1996-kulmion lävistäjät. Todista, että α/β on rationaaliluku.

2. Alla olevan kuvan ympyrä C sivuaa kahta puoliympyrää ja janaa PQ, joka on kohtisuorassa halkaisijaa AB vastaan. Varjostetun alueen pinta-ala on 39π, ja ympyrän C ala on 9π. Laske halkaisijan AB pituus.



3. Olkoon $ABCD$ yksikköneliö, ja olkoot P ja Q sellaisia tason pisteitä, että Q on kolmion BPC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja D on kolmion PQA ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Etsi kaikki janan PQ mahdolliset pituudet.

4. $ABCD$ on puolisuunnikas ($AD \parallel BC$). P on sellainen suoran AB piste, että $\measuredangle CPD$ on suurin mahdollinen. Q on sellainen piste suoran CD piste, että $\measuredangle BQA$ on suurin mahdollinen. Olettaen, että P on janalla AB, osoita, että $\measuredangle CPD = \measuredangle BQA$.

5. Olkoon $ABCD$ ympyrän sisään piirretty konveksi nelikulmio, ja olkoot r_a, r_b, r_c, r_d kolmioiden BCD, ACD, ABD, ABC sisään piirrettyjen ympyröiden säteet. Osoita, että $r_a + r_c = r_b + r_d$.

6. Olkoot a, b, c, d sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $ab = cd$. Osoita, että $a + b + c + d$ ei ole alkuluku.

7. Kokonaislukujono $a_1, a_2, \ldots,$ on sellainen, että $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ja kun $n \geq 1$,

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & \text{jos } a_n \cdot a_{n+1} \text{ on parillinen} \\ a_{n+1} - a_n, & \text{jos } a_n \cdot a_{n+1} \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Osoita, että kaikilla n:n arvoilla $a_n \neq 0$.

8. Tutkitaan jonoa

$$x_1 = 19, \quad x_2 = 95,$$
$$x_{n+2} = \mathrm{pyj}(x_{n+1}, x_n) + x_n$$

kun $n \geq 1$, missä $\mathrm{pyj}(a, b)$ tarkoittaa a:n ja b:n pienintä yhteistä monikertaa. Etsi lukujen x_{1995} ja x_{1996} suurin yhteinen tekijä.

9. Olkoot n ja k kokonaislukuja, $1 < k \leq n$. Etsi joukko A, joka koostuu n:stä kokonaisluvusta, ja kokonaisluku b, jotka täyttävät seuraavat ehdot:
(i) Yksikään $k-1$:n A:n eri alkion tulo ei ole b:llä jaollinen.
(ii) Jokainen k:n A:n eri alkion tulo on b:llä jaollinen.
(iii) Jos a ja a' ovat A:n alkioita, a' ei ole a:lla jaollinen.

10. Merkitään $d(n)$llä positiivisen kokonaisluvun n erisuurten positiivisten tekijöiden lukumäärää (mukaan lukien 1 ja n). Olkoot $a > 1$ ja $n > 0$ sellaisia kokonaislukuja, että $a^n + 1$ on alkuluku. Todista, että

$$d(a^n - 1) \geq n .$$

11. Reaaliluvuilla $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ on seuraava ominaisuus: jos W on mikä tahansa toisen asteen polynomi, ainakin kolme luvuista $W(x_1), W(x_2), \ldots, W(x_{1996})$ on yhtä suuria. Osoita, että ainakin kolme luvuista $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ on yhtä suuria.

12. Olkoon S kokonaislukujoukko, joka sisältää luvut 0 ja 1996. Oletetaan myös, että S sisältää jokaisen sellaisen polynomin juuret, jonka kertoimet sisältyvät S:ään ja joka ei ole identtisesti nolla. Osoita, että S sisältää luvun -2.

13. Tarkastellaan kokonaislukujen joukossa määriteltyjä funktioita f, jotka toteuttavat ehdon

$$f(x) = f(x^2 + x + 1)$$

kaikilla kokonaisluvuilla x. Etsi kaikki tällaiset a) parilliset, b) parittomat funktiot.

14. Funktion $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (missä $n > 1$) kuvaaja leikkaa suoran $y = b$ pisteissä $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (vasemmalta oikealle) ja suoran $y = c$ ($c \neq b$) pisteissä $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (vasemmalta oikealle). Olkoon P suoran $y = c$ piste, joka sijaitsee pisteen C_n oikealla puolella. Laske summan $\cot(\measuredangle B_1 C_1 P) + \cdots + \cot(\measuredangle B_n C_n P)$ arvo.

15. Mille positiivisille reaaliluvuille a, b pätee epäyhtälö

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1 \geq x_1^a \cdot x_2^b \cdot x_3^a + x_2^a \cdot x_3^b \cdot x_4^a + \cdots + x_n^a \cdot x_1^b \cdot x_2^a$$

kaikille kokonaisluvuille $n > 2$ ja kaikille positiivisille reaaliluvuille $x_1, \ldots, x_n$?

16. Kaksi pelaajaa merkitsee vuorotellen äärettömän neliöruudukon jo merkitsemättömiä ruutuja. Toinen käyttää merkkiä $\times$, toinen merkkiä $\circ$. Ensimmäinen, joka täyttää 2×2-neliön omilla merkeillään, voittaa. Voiko aloittava pelaaja aina voittaa?

17. Käyttäen kutakin kahdeksasta numerosta 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 tasan kerran muodostetaan kolminumeroinen luku A, kaksinumeroiset luvut B ja C ($B < C$) ja yksinumeroinen luku D. Lisäksi pätee, että $A + D = B + C = 143$. Monellako tavalla luvut voidaan valita?

18. Olympialaisten tuomaristossa on 30 jäsentä. Tuomariston jokaisen jäsenen mielestä osa hänen kollegoistaan on päteviä ja kaikki muut epäpäteviä. Nämä mielipiteet eivät muutu. Jokaisen istunnon alussa pidetään äänestys jokaisen jäsenen pätevyydestä. Sen jälkeen tuomaristosta erotetaan sellaiset jäsenet, joita ei pidä pätevänä aito enemmistö (yli puolet) äänestäjistä. Osoita, että korkeintaan 15 istunnon jälkeen tuomariston kokoonpano ei enää muutu. (Huomaa, että kukaan ei äänestä omasta pätevyydestään.)

19. Neljässä kasassa on kussakin 38, 45, 61 ja 70 tulitikkua. Vuorollaan pelaaja valitsee jotkin kaksi kasaa ja ottaa toisesta positiivisen määrän tulitikkuja ja toisesta myös positiivisen määrän tulitikkuja. Jos pelaaja ei voi tehdä siirtoa, hän häviää. Kummalla pelaajista on voittostrategia?

20. Onko mahdollista jakaa positiiviset kokonaisluvut kahteen erilliseen joukkoon A ja B, joille

(i) mitkään kolme A:n alkiota eivät muodosta aritmeettista jonoa, ja

(ii) B:n luvuista ei voida muodostaa kasvavaa ääretöntä aritmeettista jonoa?