Eystrasaltskeppnin 2006

Turku, 3. nóvember, 2006

Version: Icelandic

1. Fyrir runu rauntalna $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er gefið að

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2} \quad \text{fyrir } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Hver er mesti fjöldi samfelldra talna í rununni sem allar eru jákvæðar?

2. Gerum ráð fyrir að rauntölurnar $a_i \in [-2, 17]$; $i = 1, 2, \ldots, 59$ uppfylli $a_1 + a_2 + \cdots + a_{59} = 0$. Sannið að

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006.$$

3. Sannið að fyrir allar margliður $P(x)$ með rauntölustuðlum er til jákvæð heiltala m og margliður $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_m(x)$ með rauntölustuðlum þannig að

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3.$$

4. Látum a, b, c, d, e, f vera rauntölur sem ekki eru neikvæðar og uppfylla $a + b + c + d + e + f = 6$. Finnið stærsta gildi á

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

og ákvarðið öll mengi með 6 stökum (a, b, c, d, e, f) þannig að þetta stærsta gildi náist.

5. Prófessor sem stundum er mistækur hefur helgað síðustu bók sína rannsókn á tiltekinni reikniaðgerð $*$. Þegar þessari aðgerð er beitt á einhverjar tvær heiltölur er útkoman einnig heiltala. Vitað er að aðgerðin uppfyllir eftirfarandi frumforsendur:

a) $x * (x * y) = y$ fyrir öll $x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $(x * y) * y = x$ fyrir öll $x, y \in \mathbb{Z}$.

Prófessorinn fullyrðir í bók sinni að

1. víxlreglan gildi um $*$ aðgerðina: $x * y = y * x$ fyrir öll $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. tengireglan gildi um $*$ aðgerðina : $(x * y) * z = x * (y * z)$ fyrir öll $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Hver þessara fullyrðinga leiðir af frumforsendunum?

6. Ákvarðið hámarksstærð mengis jákvæðra heiltalna með eftirfarandi eiginleika:

1. Heiltölurnar eru myndaðar úr tölustöfunum í menginu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Enginn tölustafur kemur oftar en einu sinni fyrir í sömu heiltölu.
3. Tölustafir sérhverrar heiltölu eru í vaxandi röð.
4. Sérhverjar tvær heiltölur hafa að minnsta kosti einn sameiginlegan tölustaf (hugsanlega ekki í sama sæti) .
5. Enginn tölustafur kemur fyrir í öllum heiltölunum.

7. Ljósmyndari nokkur tók myndir í veislu með 10 gestum. Öll 45 möguleg pör gesta eru saman á nákvæmlega einni mynd og á sérhverri mynd eru tveir eða þrír gestir. Hver er minnsti mögulegi fjöldi mynda sem var tekinn?

8. Stjórnandi nokkur hefur uppgötvað sex samsæri í deildinni sinni. Í hverju þeirra eru nákvæmlega 3 einstaklingar. Sannið að stjórnandinn geti skipt deildinni í tvær undirdeildir þannig að um ekkert samsæri gildi að allir þátttakendur í samsærinu séu í sömu undirdeild.

9. Á sérhvern hornpunkt reglulegs fimmhyrnings er sett rauntala. Við framkæmum eftirfarandi aðgerð ítrekað. Við veljum tvo aðlæga hornpunkta og skiptum tölunum tveimur út fyrir meðaltal þeirra. Í upphafi er summa allra talnanna fimm jöfn núlli. Er öruggt að úr sérhverri upphafsstöðu sé hægt að fá núll á alla hornpunktana fimm í einu.

10. Í 30×30 töflu er komið fyrir 162 plús-merkjum og 144 mínus-merkjum þannig að í sérhverri röð og sérhverjum dálki séu í mesta lagi 17 merki. (Í engum reit er meira en eitt merki). Fyrir sérhvert plús-merki teljum við fjölda mínus-merkja í röð þess og fyrir sérhvert mínus-merki teljum við fjölda plús-merkja í dálki þess. Hver er stærsta summa þessara talna?

11. Hæðir þríhyrnings eru 12, 15 og 20. Hvert er flatarmál þríhyrningsins?

12. Látum ABC vera þríhyrning, látum B_1 vera miðpunkt hliðarinnar AB og C_1 miðpunkt hliðarinnar AC. Látum P vera skurðpunkt (annan en A) umrituðu hringa þríhyrninganna ABC_1 og AB_1C. Látum P_1 vera skurðpunkt (annan en A) línunnar AP við umritaðan hring þríhyrningsins AB_1C_1. Sannið að $2AP = 3AP_1$.

13. Í þríhyrningnum ABC, liggur punkturinn D á hliðinni AB og punkturinn E á hliðinni AC. Línurnar BE og CD skerast í F. Sannið að ef

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA,$$

þá liggi punktarnir A, D, F, E á hring.

14. Á yfirborði kúlu eru merktir 2006 punktar. Sannið að hægt er að skera yfirborðið í 2006 einslaga hluta þannig að nákvæmlega einn punktur sé í hverjum hluta.

15. Miðlínur þríhyrnings ABC skerast í M. Línan t sem fer í gegnum M sker umritaðan hring ABC í X og Y þannig að A og C eru sömu megin við t. Sannið að
$BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$.

16. Eru til 4 mismunandi jákvæðar heiltölur þannig að margfeldi sérhverra tveggja að viðbættum 2006 sé ferningstala.

17. Ákvarðið allar jákvæðar heiltölur n þannig að $3^n + 1$ sé deilanleg með n^2.

18. Fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n látið a_n vera síðasta tölustafinn í $n^{(n^n)}$. Sannið að runan (a_n) er lotubundin og ákvarðið lotulengdina.

19. Er til runa $a_1, a_2, a_3, \ldots$ af jákvæðum heiltölum þannig að summa allra n talna sem eru samliggjandi í rununni er deilanleg með n^2 fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n?

20. Tólf-stafa jákvæð heiltala sem er rituð aðeins með tölustöfunum 1, 5 og 9 er deilanleg með 37. Sannið að summa tölustafa hennar er ekki jöfn 76.

Tími: $4\frac{1}{2}$ klukkustund. Hvert dæmi er 5 stig.